

Baskunnande
i matematik

Beställningsadress:
Fritzes kundservice
106 47 Stockholm
Tel: 08-690 95 76
Fax: 08-690 95 50
E-postadress: skolutveckling@fritzes.se
www.skolutveckling.se
Beställningsnummer: U03:013

ISBN 91-85128-08-2
ISSN 1651-9787
Omslag, layout och tryck:
Dreamforce Infomedia AB, 2003

Innehållsförteckning

Förord	5
I. Vad menas med baskunnande i matematik?	7
Bakgrund	7
Lärarens nyckelroll	9
Matematik – ett mångfasetterat ämne	10
Demokratisk kompetens	11
En problematisering	14
Baskunnande i matematik – några operationella inriktningar	20
Avslutning	26
II. Synen på baskunskaper i ett tidsperspektiv	28
Övergången från folkskola/realskola till grundskola	29
Läroplan 94	31
Tillbaka till skolreformen	32
Skolreformen och individualiseringen	34
Tiden mellan Lgr 62 och Lgr 69	36
Lgr 69 och den nya matematiken	39
SIA-utredningen och handledningen Basfärdigheter i matematik	43
Lgr 80	47
GEM-projektets försöksverksamhet med olika elevgrupperingar	49
Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet (DsU 1986:5)	52
Det nya uppdraget	54
III. Bedömning och betygssättning	60
Olika instrument för bedömning och betygssättning på nationell nivå	63
Standardprovet för årskurs 9	63
Ämnesprovet för skolår 9	64
De diagnostiska materialen och ämnesprovet för skolår 5	66
Bedömning på internationell nivå – exemplet PISA	67
Bedömning av elevers kunskaper på kommunal nivå	70
Baskunnande ur ett bedömningsperspektiv	71

Bilagor	77
Generell bedömningsmatris för skriftligt prov	79
Generell bedömningsmatris för muntligt prov	80
Delprov B – Del B2	81
Bedömningsanvisningar Delprov B – Del B2 (max 5/7)	82
Kunskapsprofil – matematik	91
Du och matematiken	93
 IV. Bibliografi – baskunnande i matematik	94
Beställningsadresser	109
Litteratursökning via Internet	110
Doktorsavhandlingar	111

Förord

I Läroplan för det obligatoriska skolväsendet anges, att varje elev efter avslutad grundskola skall "kunna behärska grundläggande matematiskt tänkande och kunna tillämpa det i vardagslivet". I kursplanerna på grund- och gymnasieskolan ges denna generella beskrivning en konkret uttolkning. Kursplanerna anger statens uppfattning om vad som skall ingå i grundläggande matematiskt tänkande till stöd för lärares och elevers planering av matematikundervisningen.

Frågan om vad som är basfärdigheter, grundläggande färdigheter eller baskunnande i matematik är inte enkel att besvara. Det som krävs av en elev eller medborgare ändras med tiden. Det som var viktigt i jordbrukarsamhället är inte på samma sätt viktigt idag när nya behov har kommit till. Nödvändiga förändringar i kursplaner påverkar också behovet av förkunskaper i matematik. Som framgår av denna bok har det gjorts försök i Sverige och utomlands, att finna något slags minimikrav för att våra elever skall nå en acceptabel kunskapsbas för samhälle och utbildning. En uppenbar risk är att sådana minimikrav uppfattas som ett slags normering. Matematikundervisningens historia visar att strävan att ge preciserade krav ofta lett till för låga förväntningar och sämre kunnande i stort.

Den här boken strävar efter att stimulera, problematisera och utveckla resonemangen kring baskunskaper och baskunnande i matematik. Utgångspunkten för arbetet har varit att utifrån nationellt och internationellt utvecklingsarbete ge underlag för relevanta diskussioner på lokal och nationell nivå. Författarna är personer med djupt kunnande och mångårig erfarenhet inom forskning och/eller utveckling av ämnet matematik. De ansvarar själva för sina åsikter och förslag.

Lars Mouwitz, Göran Emanuelsson och **Bengt Johansson** belyser matematiken som utbildningsämne med en kort historik, diskuterar matematikens mångfasetterade karaktär, problematiserar baskunskaper i anknytning till skolans värdegrund och det livslånga lärandet. Artikeln avslutas med ett förslag på operationella inriktningar till stöd för att beskriva mål för baskunnande i matematik.

Wiggo Kilborn tar oss med på en personlig och kritisk resa inom området baskunskaper i matematik i Sverige under de senaste 50 åren. Enligt hans sätt att se har tydligheten i måldokumentet inte varit tillräcklig för att ge lärare och skolledare det stöd som behövts. Uthålligheten från statsmaktens sida har varit otillräcklig för att ge relevanta utvecklingsinitiativ en chans till framgång. Han menar att det under perioder har rått oklarhet eller oenighet var gränserna mellan pedagogik och politik skall dras, vilket exemplifieras med frågan om elevgrupperingar.

Astrid Pettersson belyser i den tredje artikeln baskunnande ur ett utvärderingsperspektiv. Förändringar i läro- och kursplaner samt i betygssystem under 90-talet har inneburit ett behov av att utveckla komplexa bedömningsinstrument av en annan karaktär än de vi tidigare använt för att fånga elevens kunnande och ge återkoppling till elever, föräldrar och lärare om kunskapsutvecklingen. I artikeln beskrivs även internationella projekt kring utvärdering av matematikundervisning där Sverige deltar.

Boken avslutas med en bibliografi som presenterar relevant och aktuell litteratur avsedd för lärare och pedagogiska ledare med ansvar för lärandet i matematik i olika skolformer.

Ingemar Gullstam har varit ordförande i den grupp som ansvarat för arbetet. Han är enhetschef vid Myndigheten för skolutveckling i Karlstad och har tidigare haft skolledande befattningar på kommunal nivå, bl.a. med ansvar för grundskolan i Stockholms stad och från senare delen av 80-talet som skoldirektör i Karlstad. Myndigheten för skolutveckling har också representerats av **Laila Backlund**, undervisningsråd och projektledare för NOT-projektet, **Lena Hammarberg**, chef för Analysavdelningen samt **Janne Holmquist**, undervisningsråd och sekreterare i arbetsgruppen.

Övriga ledamöter har varit **Göran Emanuelsson**, universitetslektor vid NCM (Nationellt centrum för Matematikutbildning), Göteborgs universitet, tillika redaktör och ansvarig utgivare för tidskriften Nämnamnaren, **Bengt Johansson**, universitetslektor och föreståndare för NCM, **Astrid Pettersson**, docent och prorektor för Lärarhögskolan i Stockholm, tillika projektledare för PRIM-gruppen.

Utöver arbetsgruppen har många andra lämnat värdefulla bidrag och synpunkter och ett särskilt tack riktas till medarbetarna vid NCM i Göteborg och PRIM-gruppen i Stockholm.

Kristina Wester
Avdelningschef

Ingemar Gullstam
Enhetschef

I. Vad menas med baskunnande i matematik?

I detta bidrag ges först en bakgrund som beskriver matematik som skolämne med en kort historik och en diskussion kring lärares nyckelroll och matematikämnets mångfasetterade karaktär. Därefter diskuteras baskunskaper i anknytning till skolans värdegrund och det livslånga lärandet. En kritisk genomlysning och problematisering med beskrivning av terminologi och syften presenteras. Analysen avslutas med ett förslag på operationella inriktningar för att ge stöd för att identifiera och beskriva mål för baskunnande i matematik.

Bakgrund

Alltsedan Sverige fick en folkskola 1842 har grundläggande färdigheter i matematik, väsentligen räkning, ansetts höra till det som alla barn ska inhämta under sin skolgång. Samtidigt har det också setts som fullständigt naturligt och tagits för givet att en del barn kommer att misslyckas och inte lära sig ens ganska enkla begrepp och metoder. Matematik har ansetts som abstrakt och svårt, ett ämne som skiljer ut de intelligenta och snabbtänkta från de obegåvade och tröga. Vissa kunskaper, t.ex. snabbhet och säkerhet i aritmetik, har varit lätta att mäta och det har påverkat synen på framgång i ämnet som väsentligen begränsat till att räkna rätt eller fel. Problemlösning har från början setts som instrument för ett fåtal i en intellektuell elit. Psykologer har utnyttjat test med matematikinnehåll bl.a. i värnpliktsundersökningar för att få prognosinstrument för vidare studier.

Att studera matematik och latin har ansetts utveckla individens tänkande och kapacitet även inom andra områden. Matematikens status har på något sätt medverkat till att dess plats och volym i svensk skola obetydligt ifrågasatts – eller motiverats. Så har t.ex. antalet årskursveckotimmar för matematik i primärskolan varit i stora drag oförändrat i 150 år och inte förrän i 1980 års läroplan för grundskolan har staten ansett sig behöva ge motiv för matematikämnets innehåll (Skolverket, 1997). Matematik är på något sätt självklart viktigt och varför har inte tidigare gjorts klart i våra nationella styrdokument.

Historiskt och internationellt kan motiven för matematik i skolan härledas komma från samhällets eller individens behov (Emanuelsson & Johansson, 1994; Niss, 1981). Till de förra räknas anspråken på social, ekonomisk och teknisk utveckling inom i stort sett alla samhällssektorer. Som individ har man också behov av att förstå och ta ställning till fenomen i och påståenden om natur och samhälle och att aktivt kunna delta i demokratiska processer.

Då folkskolan kom till levde vi i ett jordbrukssamhälle. Mot slutet av 1800-talet skedde en omvandling till ett industrisamhälle och nu är vi på väg in i ett kunskapssamhälle som kännetecknas

av rika och varierade kunskaps- och informationsflöden och tillgång till avancerade hjälpmedel. Mål, innehåll och undervisning i ämnet matematik har naturligtvis förändrats på olika nivåer i vår skola. Men en del personer – även lärare – kan leva kvar i matematik som räkning med de fyra räknesätten och undra: Vad ska vi göra på matematiklektionerna nu när vi har miniräknare?

Uppfattningar om skolmatematik som ett statiskt ämne med små förändringar i mål och innehåll samt oberoende av samhällsutvecklingen är inte ovanliga. Det kan möjligen bero på att tillämpningar och problemlösning fått liten plats eller på att utvecklingen av matematik som disciplin lämnat små bidrag till innehållet i skolan de senaste 50 åren.

Bland politiker och utbildningsbyråkrater har matematik setts som ett viktigt ämne och stora ansträngningar har lagts ned under perioden efter andra världskriget för att få bra innehåll och god undervisning i det offentliga skolväsendet. Skolan har liksom samhället förändrats och utvecklats. Bestämda gränser mellan olika skeden är svåra att ange. För att få perspektiv på dagens grund- och gymnasieskola i Sverige behöver man gå tillbaka till reformarbetet under 1940- och 50-talen, då linjerna för vårt nuvarande system drogs upp. 1950 togs principbeslut om nioårig bottenskola för alla, 1962 kom den första läroplanen. Ännu på 40-talet hade vi ett internationellt sett ganska gammalmodigt parallellskolssystem med tämligen blygsam insats för folkbildningen (Marklund, 1984).

Tillämpningar av matematik i vardags- och samhällsliv, i utbildning och vetenskaplig verksamhet har ökat kraftigt under andra hälften av 1900-talet. Utveckling av informationsteknologin och tekniska hjälpmedel som räknare och datorer ställer nya krav. Sverige har blivit alltmer mångkulturellt och det internationella samarbetet inte minst i Europa ökar. Frågor om t.ex. ekonomi, miljö, vård och utbildning blir alltmera komplexa och svåra att hantera med bibehållna krav på demokrati och jämlikhet. Matematikkunnande skall ge självförtroende och möjligheter till påverkan. Det är en demokratisk rättighet att förstå och delta i beslutsprocesser som gäller t.ex. landets och kommunens ekonomi eller miljö.

Alla elever skall ha möjlighet att skaffa sig matematikkunskaper för att lösa vardagsproblem, för att kunna förstå och granska information och reklam, för att kunna fungera i rollen som medborgare och kunna värdera påståenden från politiker, journalister och marknadsförare. Utbildningen i matematik i grundskolan och gymnasieskolan skall ge kunnande i väsentlig matematik för vardag och samhälle. Dessutom för bruk i andra ämnen och högre studier – samt för det livslånga och livsvida lärandet. Det räcker naturligtvis inte att enbart lära sig ”räkna” med eller utan hjälpmedel.

Samhälls- och teknikutvecklingen har alltså lett till krav på att fler ska lära sig mer matematik. Undan för undan har vi lagt till flera moment och höjt kraven på tillämpning, kommunikation och problemlösning i matematikkurserna. En minskning av betoningen på mekanisk räkning med förskjutning till förmån för förståelse och resonemang är tydlig. Detta har, knappast överraskande, lett till stora problem i utbildningen på olika nivåer. Matematikämnet har visserligen en etablerad

position i vår grund- och gymnasieskola, ett självklart utrymme som sällan sätts ifråga, men idag av helt andra skäl än under 1800-talet.

Matematik har fortfarande hög status men anses också fortfarande svårt att lära. Kan vi verkligen nå uppställda mål – inom de ramar som nu bjuds? Om inte – vad är det som i så fall hindrar oss? Vilken roll spelar medvetna eller omedvetna, traditionella uppfattningar av ämnets natur och karaktär eller av hur elever lär matematik? Sådana uppfattningar har sannolikt starkt påverkat politikernas, beslutsfattares, massmedias, skolans, föräldrars, elevers och sist men inte minst lärares sätt att agera i matematikutbildningsfrågor under den senaste 50-åriga reformperioden.

Lärarens nyckelroll

Lärare har alltid haft en nyckelroll genom att i sista hand bestämma innehåll och uppläggning av matematikundervisningen i skolan. Genom läroplanerna Lpo 94 och Lpf 94 blev lärarens ansvar större och också tydligare. I kursplanerna i matematik formuleras uppdrag till skolor och lärare i termer av mål som undervisningen skall sträva mot och uppnå. Detta motiveras av den förändrade formen av styrning – från regelstyrning till decentraliserat ansvar med tillhörande mål- och resultatstyrning. Statligt fastställda ämnen och tillhörande kursplanemål är ett första urval av innehåll för grundskolans undervisning. Kursplanen ger inte direkta anvisningar för hur undervisningen skall gå till utan anger syfte och mål för utbildningen. Vägarna till målet, hur undervisningen skall utformas för att svara mot syften, samhällsutveckling och matematikdidaktisk utveckling med val och sekvensering av innehåll, arbetssätt och organisation, är en fråga för rektor, lärare och elever i samverkan.

Under egen skolgång och lärarutbildning, genom påverkan av olika aktörer i skola och samhälle har lärare undan för undan byggt upp en oformulerad, osynlig tradition kring vad matematik i skolan är och hur det ska undervisas. Eftersom synen på och motiven för matematikämnet så litet analyserats eller diskuterats i relation till samhällsmål och utbildningsmål, eftersom vi saknat kontinuerlig nationell uppföljning av kursplaner och elevresultat, och eftersom vi i stort sett saknat forskning med matematikdidaktisk inriktning så finns det skäl att misstänka att dessa oftast omedvetna, ej diskuterade, ej reflekterade traditioner i vår matematikutbildning styr mera än samhällsförändring och statens uppdrag.

Det är kanske så att traditionen sätter gränser som gör att nuvarande mål är omöjliga att nå för många elever med den undervisning vi har och som gör kommande revideringar närmast verkningslösa. Inom de ”spelregler” som hör till traditionen kommer lärare (och elever!) att bestämma sig för vad som ska vara undervisningsinnehåll, vad som ska undervisas och hur, vad som ska läras och hur. Detta görs oberoende av och ibland i strid med nuvarande syften och mål. Traditionell syn på matematik har i mycket styrts av formell behandling av framförallt skriftliga beräkningar efter bestämda regler och formler. Den upprätthålls i konsistens med gammal styrning uppifrån och traditionen att läraren är en auktoritet som i inget annat ämne. Ensidigt läromedelsberoende och

en traditionsmättad kvantitativ bedömnings- och betygssättningspraxis i lärarkåren är ytterligare faktorer med starkt bromsande och konserverande effekt. Det är av stor vikt att denna traditionella undervisningskultur synliggörs, genomlyses och problematiseras.

I en av tradition regelstyrd skola är det lätt att lärare passiviseras och avprofessionaliseras och följer minsta motståndets lag. Hur traditionen ser ut, vad den innehåller, hur den uppstått och vidmakthålls är nödvändigt att söka förstå för att kunna utveckla matematikundervisningen i relation till elevers och lärares potential och mot givna mål. Mycket tyder på att nu aktuella kursplaner istället omtolkas så att de stämmer med traditionen, inte tvärtom!

Matematiker, lärare och lärarutbildare i matematik har ofta visat osäkerhet eller ointresse för de politiska och ideologiska strömningar som ligger bakom utvecklingen av statens styrinstrument för grund- och gymnasieskolans matematik. Politiker och fackpedagoger (generalister) har naturligt nog haft bristfälliga kunskaper i och om matematik och matematikundervisning och även de varit produkter av skoltraditionen. Den matematikdidaktiska kunskapsbildningen har varit eftersatt, och även många specialpedagoger och speciallärare saknar erforderliga kunskaper i matematik och matematikdidaktik. Detta tillsammans har hindrat utvecklandet av en grundläggande matematikutbildning för alla i fas med vårt kunskapssamhälles framväxt.

Vad finns det för spår av synen på matematikämnet i den utvecklingsprocess som lett till dagens kursplaner och tradition? Samhällsförändringar för att kunna bevara välstånd och demokrati i ett teknologiskt samhälle ifrågasätts knappast. Vi har gått från att inommatematiska metoder inom räkning och geometri ska läras av ett fåtal till att i princip alla medborgare ska förfoga över matematikverktyg och matematiskt tänkande för utbildning, yrkesliv och samhälle. Det är inte konstigt att detta lett till stora konflikter. På vilket sätt har dessa förändringar hanterats och åtgärdats på olika nivåer?

Matematik – ett mångfasetterat ämne

Matematik är ett av skolans viktigaste ämnen. Bristande tilltro och kunskaper påtalas ständigt både nationellt och internationellt som orsaker till stängda utbildningsvägar för våra unga och sämre möjligheter till fortsatt kompetensutveckling och reell demokrati – inte minst gäller detta IT-sidan. Matematikens roll kommer till uttryck i ämnets utrymme i timplaner, i kurspoäng och det faktum att det i matematik tillsammans med svenska, alternativt svenska som andraspråk, och engelska krävs slutbetyget godkänd från grundskolan för behörighet till gymnasieskolans nationella program. Förkunskaper i matematik krävs ofta för studier i andra ämnen, enligt traditionen särskilt för naturvetenskapliga och tekniska inriktningar.

Som det uttrycks i grundskolans kursplan behövs kunskaper i matematik för att kunna fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer, för att kunna tolka och använda det ökande flödet av information och för att kunna följa och delta i beslutsprocesser i samhället. Utbildningen skall ge en god grund för studier i andra ämnen, fortsatt utbildning och ett livslångt lärande.

Matematiken är också en viktig del av vår kultur och utbildningen skall ge eleven insikt i ämnets historiska utveckling, betydelse och roll i vårt samhälle. Utbildningen syftar till att utveckla elevens intresse för matematik och möjligheter att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer. Den skall också ge eleven möjlighet att upptäcka estetiska värden i matematiska mönster, former och samband samt att uppleva den tillfredsställelse och glädje som ligger i att kunna förstå och lösa problem.

Matematisk problemlösning innebär att eleven tränas i att strukturera sitt eget tänkande och i att argumentera för sina idéer och lösningsförslag muntligt och skriftligt. Dessa övergripande kognitiva och kommunikativa färdigheter har ett värde långt utöver matematikkunskan som sådant. Den ökade tilltron till den egna förmågan hos en elev som på detta sätt bearbetat, diskuterat och löst matematiska problem leder också till att eleven kommer att känna sig mer motiverad och kapabel att ta itu med andra problemställningar i vidare mening inom skola, samhälle och yrkesliv. Dessutom innebär en saklig gruppdiskussion i matematik med logiska argument en träning i demokrati och ett stärkande av tron på det förnuftiga samtalets möjlighet.

Matematik är också ett ämne som har en estetisk och bildande sida med djup förankring inom konst, musik, arkitektur och filosofi och matematiken kan därför visa på samhörigheten mellan den naturvetenskapliga och den humanistiska kulturen både i ett historiskt perspektiv och i ett framtidsperspektiv.

Demokratisk kompetens

Förskolors och skolors uppdrag är att utveckla *demokratisk kompetens* hos barn och unga. I detta uppdrag ingår att verka för demokratiska arbetsformer, att utveckla demokratiska medborgare och ge kunskap om demokratins innehåll och former. Begreppet demokratisk kompetens innefattar att ha kunskaper om och förmåga att leva i, verka i samt utveckla ett demokratiskt samhälle, att ha kommunikativ förmåga, att ha förmåga att ta ställning och att förstå skäl till andras ställningstagande. En satsning på baskunskaper i matematik måste förhålla sig till detta överordnade mål.

På senare år har dets.k. *deliberativa samtalets* särskilt poängterats, bland annat i Utbildningsdepartementets och Skolverkets texter, som varande centralt för utvecklande av demokratisk kompetens i lärmiljöer. Se t.ex. *Värdegrundsboken – om samtal för demokrati i skolan* (Utbildningsdep., 2000), *En fördjupad studie om värdegrunden* (Skolverket, Dnr 2000:1613) samt *Deliberativa samtal som värdegrund – historiska perspektiv och aktuella förutsättningar* (Skolverket, Englund, 2000).

Ett deliberativt samtal genomsyras av vilja till kommunikation, ömsesidig respekt för andras argument och ståndpunkter och vilja till kollektiva överenskommelser. Samtalet innefattar tron på det förnuftiga samtalets möjlighet och kraft och en vilja till samarbete och utveckling. För individen innebär det också att bli sedd, att få uttrycka sig och att få vara en del av en gemenskap. Den demokratiska kompetensen är också en del av och en förutsättning för individens *livslånga lärande*. Istället för att betrakta individer som enskilda subjekt uppmärksammas en ständigt närvarande

ömsesidighet och möjligheter för elever att få göra praktiska demokratiska erfarenheter i själva undervisningssituationen, ”här och nu”. Demokrati är inte en uppsättning fakta att memorera utan ett sätt att förhålla sig till medmänniskor som utvecklas i verkliga sociala kontexter.

Ur skolmatematikens synvinkel så är arbetet för demokratisk kompetens en självklar del. Inte minst vad gäller att *alla* elever ska ha rätt till sådana *baskunskaper* i ämnet matematik att de kan leva i, verka i och utveckla vårt demokratiska samhälle. Något som däremot kanske inte problematiserats i högre grad är att även den traditionella matematikundervisningens *arbetsformer* kanske bör sättas i fråga. Det är inte ovanligt att matematikämnet framställs som enbart en rad fakta som ska memoreras och reproduceras, en framställning som kanske görs auktoritärt och ensidigt av läraren och via den enda använda läroboken. Ämnet får då sin legitimitet enbart utifrån auktoritetstro och lydnad och det deliberativa samtalet lyser helt med sin frånvaro. Denna traditionella oreflekterade undervisningskultur är märklig och kontraproduktiv men har fortfarande ett fast grepp om matematikutbildningen.

En klassrumsmiljö där istället samtal om matematik förs, där argument vägs mot varandra, där alla får komma till tals och där läraren tillsammans med sina elever legitimerar ämnets metoder, teorier och resultat via förnuftiga argument kommer däremot att *stödja* skolans generella arbete med att utveckla elevernas demokratiska kompetens. Dessutom talar all matematikdidaktisk forskning kring lärande för att en undervisning som på detta sätt bygger på förståelse, engagemang, helhetssyn och argumentation är vida effektivare än en mer auktoritetshävdande och monologisk framställning. Detta gäller av naturliga skäl skolan i stort som lärmiljö, se t.ex. *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv* (Säljö, 2000), men just matematikklassrummet är kanske en av skolans mest auktoritära lärmiljöer.

Elevers demokratiska kompetens undergrävs också av de ibland odemokratiska strukturer som finns i skolan, där elever många gånger inte har ett verkligt inflytande. Detta gäller inte minst ett ämne som matematik där givna läromedel, arbetssätt och innehåll ofta framställs som ”nödvändiga” och omöjliga att diskutera, se *Med demokrati som uppdrag* (Skolverket 2000).

I ett vidare perspektiv kan konstateras att många barn och unga, liksom personalen, har en låg tilltro till de formellt demokratiska strukturerna i skolan. Denna skolkultur som ofta finns på personalsidan genomsyrar även klassrumskulturen:

Det är viktigt att personalen är en del av en demokratisk organisation. Annars får de i sin tur svårt att fungera i förhållande till eleverna och deras inflytande. Om inte personalen får inflytande över sin arbetssituation finns det en risk att deras förtroende och tilltro till demokratiska strukturer minskar, något som lätt kan smitta av sig till eleverna. (Med demokrati som uppdrag, s. 26)

En förutsättning för det deliberativa samtalet i matematikklassrummet är därför att även *matematiklärarna* deltar i samtal, där de blir uppmärksammade och där det finns möjlighet att fritt framföra och diskutera t.ex. läromedel, alternativa arbetssätt, innehåll, problemlösning, ämnessamverkan och goda lektionsexempel. Genomgående för barnomsorg och skolor som arbetar

framgångsrikt med värdegrunden är att de skapat förutsättningar för fler möten för sådana samtal lärare emellan och i förhållande till skolledningen.

Det livslånga och livsvida lärandet

En identifikation av och en satsning på baskunnande i matematik måste också relateras till lärandet som ett *livslångt projekt* och därmed lägga en grund för utveckling och tillämpning i vitt skilda lärmiljöer. Det livslånga lärandet innefattar två dimensioner, dels att man lär *bela livet*, dels att man lär i *olika lärmiljöer*. Dessa lärmiljöer sammanfattas vanligen i tre kategorier, se t.ex. *Det livslånga och livsvida lärandet* (Skolverket, 2000) och *Memorandum om livslångt lärande* (EU-kommissionen, 2000):

- *Formell utbildning*: utbildningssystemet från förskola till gymnasium och vuxenutbildning
- *Icke-formell utbildning*: relaterad till arbetsplats och yrkesliv, t.ex. kompetensutveckling, arbetsplatsutbildning och lärande arbetsplatser
- *Informell utbildning*: mer eller mindre oformulerat lärande i närsamhället, i familjen och i frivilliga organisationer.

Ur detta perspektiv är det den enskilda individens förhållningssätt till sitt utbildningsbehov, sin förmåga att lära nytt och individens attityder till utbildning som blir avgörande för det livslånga lärandet. Ämnesspecifika kunskaper måste därför kompletteras med lusten att lära, självförtroende och förmåga att flexibelt hantera förändring. Det formella utbildningssystemet har här en viktig uppgift att ge ett baskunnande som är *utvecklingsbart* och som *inspirerar* till vidare studier. Det statiska synsättet att skolan utbildar till ett givet yrkes- och livsinnehåll för eleven måste ersättas av ett mer dynamiskt synsätt där ungdomsskolan lägger en grund till och blir ett incitament för ett livslångt flexibelt lärande i ett samhälle under snabb utveckling och förändring.

Den traditionella synen på innebörden av "baskunskaper" bör således utmanas och problematiseras relativt individens rätt och möjlighet till det livslånga och livsvida lärandet:

Vilka baskunskaper i matematik har sådan karaktär att de är både inspirerande och utvecklingsbara, så att individen får lust och reell möjlighet till fortlöpande matematiklärande hela livet?

Inte minst misslyckanden i just matematik kan fungera som ett utsorterande filter och ett livslångt stigma. Svårigheter med att värdera och validera det matematikkunnande som faktiskt utvecklas i icke-formella och informella lärmiljöer gör också att många vuxna drabbas av inlåsningar och återvändsgränder. Detta trots att de besitter en avsevärd praktisk matematisk kompetens. De brister vad gäller baskunskaper och de negativa attityder till ämnet som ofta grundläggs hos eleven redan i ungdomsskolan leder istället ofta till en livslång och hämmande matematikångest, med stora förluster både för individ och samhälle.

En problematisering

Terminologiska överväganden

Uttrycket "basfärdigheter" är inte väldefinierat. Kanske får man vaga associationer till något som utgör grunden för ett ämne, eller grunden för en utbildning eller ett medborgarskap? Ibland associeras till en förfluten tid då allt syntes enklare, tydligare och bättre, "back-to-basics", i kontrast till dagens friare skola med vaga och komplexa målbeskrivningar och en mer mångfasetterad pedagogik.

Termen "färdighet" syftar vanligen på ett handlag, ett kompetent hanterande, och ställs ibland mot "kunskaper" i meningen fakta eller förståelse. Ett exempel på detta är att elevens kunnande i svenska styrdokument för skolan av tradition beskrivits som elevens "kunskaper och färdigheter". Ett annat exempel är i *Skola för bildning* (SOU 1992:94) där "färdighet" beskrivs som en *praktisk kunskapsform*. Detta förtydligas metaforiskt med: "En simmare ser till att hålla sig flytande, en ryttare att hålla sig kvar i sadeln" (s. 66). Å andra sidan framhålls också att en färdighet kan vara "intellektuell", t.ex. "förmågan att utföra tankeoperationer".

För matematikens del kopplas "basfärdigheter" av tradition till ett kompetent, och kanske delvis automatiserat, hanterande av de fyra räknesätten med hjälp av olika typer av algoritmer och representationer.

Termen "baskunskaper" ger kanske inte samma associationer till ett praktiskt kompetent utförande utan istället till en uppsättning minneskunskaper vad gäller "nödvändiga" fakta eller förståelse av vissa grundläggande begrepp och teorier i ett ämne. Varför just denna uppsättning av fakta och begrepp skulle vara "nödvändiga" och i vilket sammanhang är ofta outtalat eller i vilket fall inte explicit härlett från några övergripande syften och mål.

Innebörden av de båda termerna är som nämnts tämligen vag. För ett effektivt och framgångsrikt mål- och resultatstyrt utvecklingsarbete vad gäller grundläggande kunskaper krävs därför en *problematiserande analys* och en *bättre definierad terminologi*. Det finns god anledning att misstänka att de traditionella tolkningarna, som skisserats ovan, är otillräckliga och missvisande ställt i relation till vår tids läroplaner och mångdimensionella kunskapssyn. Även i Skolverkets redovisning av nuvarande basfärdighetsuppdrag (Dnr 2000:3499) framgår att en förberedande problematisering är angelägen:

Basfärdighetsuppdraget kräver förberedelse och planering. Vad som menas med basfärdigheter är inte självklart och satsningen får inte leda till en trivialiserad syn, med risk för förenkling och mekanisering av undervisningen. (s.12)

Som tidigare uppmärksamats bör också innebörden av grundläggande matematikkunskaper relateras till det livslånga lärandet så som det definieras i Skolverkets rapport *Det livslånga och livsvida lärandet* och det finns väsentliga synergieffekter mellan en satsning på basfärdigheter i ungdomsskolan och möjligheten för vuxna att i praktiken förverkliga ett livslångt lärande.

Angelägna frågor för studier och utvecklingsarbeten

Uttrycket "kunskaper och färdigheter" har en lång historia i svensk skola och utbildning. I relation till detta är det av intresse att studera vad som ansetts vara "basfärdigheter" resp. "baskunskaper" i styrdokument, läromedel och klassrum i ett historiskt perspektiv. Av stort intresse är också att studera nuvarande styrdokument, läromedel och undervisning i samma perspektiv med inriktning mot framtiden. Hur vill vi att framtidens styrdokument, läromedel och undervisning ska se ut vad gäller basfärdigheter/baskunskaper? Vad säger aktuell ämnesdidaktisk forskning i denna fråga? Hur relateras begreppen till samhällets grundläggande normer och värden? Vad anser politiker och avnämare? Vad krävs i relation till idén om ett livslångt lärande? På vilket sätt bör de former av matematikkunskaper som utvecklas i icke-formella och informella lärmiljöer påverka innehållet i kursplaner i den formella lärmiljön?

Skolmatematikens syften

En satsning på det "basala" i skolmatematiken kan inte undgå frågan om ämnets och kursernas *syften och mål*. Det är inte ovanligt att just matematikämnet berättigar sig självt genom cirkulära resonemang: "matematikundervisningen på denna nivå går ut på att lära sig följande matematiska moment och områden...". Ämnets traditionella "självrätfärdighet" gör det svårt att kritiskt genomlysna kurser och undervisning och utskilja det som är basalt och nödvändigt från det som är mindre angeläget eller rent av överflödigt eller meningslöst. I den mån syftet för ämnet eller kursen är angivet är det oftast av så generell natur att det inte kan vara vägledande för en analys och värdering av specifika matematikområden. Trögheten i förändringsarbetet gör också att ett givet traditionsbundet kursinnehåll i efterhand mer eller mindre ansträngt kommer att "verklighetssminkas" istället för att själva kursinnehållet bestäms utifrån ämnets övergripande syften.

Syftesfrågan anknyter till problematiken kring *lusten att lära*, men också till *lusten att använda* matematik. Väl utvalda områden av matematikämnet där mål och syften är tydliggjorda stimulerar elevens lärande och inte minst elevens användande av matematik. Det är här av stor vikt att se till elevens *produktiva förhållningssätt*, innefattande att se matematiken som meningsfull, användbar och värdefull tillsammans med en stark tilltro till den egna förmågan att utöva matematik i den egna livsvärlden i stort och i kommande studier och yrkesliv. Det är här också av stor vikt att förutom frågor kring *varför* och vad dessutom besvara frågorna: *baskunskap för vem och hur då?*

Vilka "basala" syften uttrycks då i våra aktuella kursplaner i matematik? I styrdokument, läromedel och skrifter om skolan kan man urskilja ett antal mer eller mindre explicit formulerade motiv och mål och kanske också några dolda, avsedda eller icke avsedda. Här följer ett antal exempel:

- *Förebereelse för ett medborgarskap i en demokrati*: I ett demokratiskt samhälle har alla medborgare rättigheter men också skyldigheter, t ex att informera sig, att inte okritiskt ta till sig propaganda etc. För matematikens del betonas här ofta förmågan att kunna tyda diagram, förstå procenträkning och statistik och olika representationer som t.ex. grafer i ett koordinatsystem.

- *Förberedelse för vardagslivet:* I vardagslivet måste man kunna göra beräkningar till exempel vid inköp, bankrelationer, valutaväxling, deklaration men också kunna lägga golv, tapetsera, bygga uteplatser etc. På så sätt motiveras kunskaper i de fyra räknesätten, procenträkning, viss ekvationslösning och grundläggande geometri.
- *Förberedelse för det praktiska yrkeslivet:* Här motiveras matematiken utifrån yrkeslivets behov. En snickare, plåtslagare, bilmekaniker osv. antas behöva vissa basfärdigheter i matematik för att kunna utöva sitt yrke med framgång. På detta sätt motiveras delar av A-kursen på yrkesförberedande program.
- *Förberedelse för vidare studier i skolämnet matematik:* I ett skolämne som matematik finns en stark tilltro till *hierarkisk inläring*. Denna pedagogiska tradition befasts såväl i styrdokument och läromedel som i matematiklärares praktik. Basfärdigheter och baskunskap är i detta sammanhang den gedigna studiegrund som anses utgöra förutsättningen för högre studier i skolämnet. På detta sätt motiveras matematik i en aktuell kurs med att den förutsätts vara välbekant i nästa kurs, t.ex. förståelse av och förtrogenhet med algebraiska uttryck.
- *Förberedelse för studier i andra ämnen:* I detta fall uppfattas matematiken som en basal "verktyglåda" som behövs för studier i t.ex. fysik, kemi eller ekonomi. Detta ger en instrumentell syn på ämnet där färdighetsdelen, i meningen kompetent praktiskt handhavande, uppmärksammas särskilt. Förmågan att tolka modeller och att själv kunna modellera lyfts ibland också fram som speciella färdigheter.
- *Förberedelse för meningsfull delaktighet i det "matematiserade" samhället:* Vår civilisation blir allt mer och mer "matematiserad" i den meningen att matematiska modeller genomsyrar och omformar vår livsvärld, våra förhållningssätt och vårt sätt att kommunicera med varandra. Vad gäller denna typ av matematikkunskande är fokus förflyttat från kunskap *i* matematik till kunskap *om* matematik. I detta fall handlar det mer om en orienterande och övergripande kunskap om ämnets roll och funktion än om själva utövandet av ämnesinnehållet.
- *Förbereder en teoretisk grund för den vetenskapliga disciplinen:* I detta fall ser man inte i första hand till den pedagogiska grund som skolämnet antas förutsätta utan istället till den ämnes-teoretiska. Ett exempel på detta var "den nya matematiken" (med t.ex. mängdläran) som utgick från mängdlogiken som aritmetikens vetenskapliga fundament. Förhoppningen var också att denna ämnesteoretiska grund på ett mirakulöst sätt även skulle utgöra den pedagogiskt bästa grunden för skolämnet matematik.
- *Förbereder och utgör en del av ett bildningsprojekt:* Här är det "basala" kopplat till ett helhetstänkande vad gäller människans personlighetsdanande och bildning. Matematiken som mänsklig tankekonstruktion ställs i relation till människans övriga kulturyttringar historiskt och samhälleligt. Matematisk verksamhet lyfts också fram som ett egenvärde rikt på estetiska kvalitéer och upplevelser.

- *Förbereder och markerar en gräns för "normalitet"*: Det "basala" tänkandet, så som det t.ex. tar sig uttryck i uppnåendemål, kan också uppfattas som ett sätt att markera en nedre gräns för vad som ska anses vara "normalt". Om en elev inte når dit motiveras plötsligt ett batteri av extra åtgärder och/eller medicinska diagnoser, typ "dyskalkyli". I vissa fall kan det också leda till olika former av utestängande, t.ex. då en elev ej når upp till grundskolans mål i kärnämnet matematik och därför ej blir behörig till nationella gymnasieprogram. I kombination med andra motiv för basfärdigheter, t.ex. för medborgarskap och yrkesliv, ges också indirekt signaler till eleven om en avvikelse från "det normala". Att matematik är ett av skolans kärnämnen ger detta budskap till eleven dessutom en extra dimension.

Ovanstående olika syften, mål och motiv som kan relateras till "basfärdigheter" och "baskunskaper" återfinns direkt eller indirekt i våra styrdokument och i skoldebatten. Vissa av målen och motiven överlappar varandra medan andra lätt hamnar i konflikt eller är motsägande. Förrädiskt är också "hoppandet" mellan olika innebörder av termerna i debatten och i skolpraktiken. Så kan t.ex. vissa ungdomar få en undervisning som pedagogiskt syftar mot högre studier i skolämnet, medan andra ungdomar får undervisning som huvudsakligen syftar på medborgarskap, vardags- och yrkesliv, men i båda fallen med hänvisning till "basfärdigheter". Detta kan innebära en "inlåsning" av vissa elever så att de i praktiken utestängs från högre studier. På motsvarande sätt kan kanske vissa elever med inriktning mot högre studier utestängas från de mer medborgerliga aspekterna av ämneskunnandet. Det är t.ex. inte ovanligt att lärare i NV-klasser på olika sätt annonserar att statistikdelen i kursen är ointressant och oväsentlig.

Det räcker inte att konstatera att alla elever skall ha basfärdigheter och baskunskaper i matematik. Vad menar vi med dessa uttryck? Kommer elever i praktiken att få olika "basfärdigheter" som kanske innebär skolmässiga eller samhällseliga inlåsningar för vissa av dem i perspektivet ett livslångt lärande? Är det matematikinnehåll vi idag mer eller mindre vagt och implicit föreställer oss i samband med dessa termer verkligen relevant för framtidens skola?

Matematikkunskaper enligt läro- och kursplaner

Själva matematikkunnandet vad gäller basfärdigheter och baskunskaper har som nämnts av tradition identifierats med konsten att utöva de fyra räknesätten och de algoritmer och procedurer som hör till dessa. Manipulation av symboler och automatisering av beräkningar har setts som en viktig del av ett "basalt" kunnande. För senare stadier har ibland tillagts procedurer för ekvationslösning och grundläggande kunskap i algebraiska omvandlingar av uttryck.

I kontrast till detta synsätt betonas idag också förståelse av vissa grundläggande begrepp och förståelse av matematikens "stora idéer". Utan kunskap om dessa stora idéer kommer matematiken att förbli oanvändbar och obegriplig, även om eleven är nog så skicklig algoritmiskt. En annan liknande aspekt är att alla elever behöver få kunskap om vissa "tillväxtpunkter" som utgör pedagogiska fundament för vidare undervisning. Elever som inte har denna typ av kunskap förmår

inte växa i sitt kunnande och kommer att få stora svårigheter om de i framtiden skulle vilja återuppta ett studium i matematik.

Skolämnet matematik har de senaste decennierna genomgått stora förändringar, speciellt med avseende på vad matematiskt kunnande bör innebära. Idag betonas i läroplanerna, både i Sverige och internationellt, förmågan att argumentera och kommunicera skriftligt och muntligt, att ställa upp och lösa problem, att modellera, att kunna värdera lösningsprocesser och resultat, att kunna genomföra projekt enskilt och i grupp med mera. Även kunnande *om* matematik uppmärksammas, t ex kunskaper om matematikens roll i samhälle och vetenskap samt dess roll historiskt. Vidare betonas "numeracy", d.v.s. förmågan att personligen vara praktiskt "matematisk" i den egna livsvärlden både vad gäller beräkningar och mer kvalitativa omdömen.

En satsning på baskunskaper i matematik måste även ta ställning till frågan vad som *inte* är baskunskaper i matematikkurserna. Är det *inte* baskunskap att kunna kommunicera matematik muntligt och skriftligt? Är det *inte* baskunskap att kunna lösa matematiska problem? Är det *inte* baskunskap att kunna hantera en vardaglig situation genom att konstruera en matematisk modell?

En särskild problematik finns i kursplanernas utformning där "ribban" läggs av uppnåendemål, vilka har fått en mer traditionell karaktär, medan mål att sträva mot innehåller mer av de senaste decenniernas nytänkande vad gäller önskvärt kunnande. Det blir då lätt så att målen att sträva mot ses som "lyx" för duktigare elever, medan de svaga får ägna hela sin skoltid åt att försöka klara av just de traditionella mål av typ beräkningar och manipulativt handhavande av algoritmer, vilka explicit beskrivits som otillräckliga för framtidens skola och för det livslånga lärandet. Lika illa är att betygssättningen också för mer framgångsrika elever kan komma att relateras till de mer traditionella uppnåendemålen. Uppnåendemålen blir som nämnts tidigare också viktiga signaler från samhället vad gäller definition av "normalitet", och ett misslyckande kan skapa en livslång matematikångest och en allmänt negativ självbild vad gäller förmåga till framtida studier.

Vad vill vi att även våra svagaste elever ska ha med sig som basala färdigheter ut i livet? Är det förmågan att kunna lösa ekvationer med x i båda leden, eller är det förståelse för matematikens stora idéer? Eller är matematikens roll i samhället idag och i förfluten tid väsentligare? Eller är ett skickligt handhavande av miniräknare mest väsentligt? Eller är det allra viktigaste att de bibehåller en lust att lära, så att de kanske vill studera mer matematik någon gång i framtiden? Och vad menar vi med "lust": skall det vara roligt hela tiden eller är lusten snarast en följd då elever känner självförtroende och tillförsikt i sitt kunnande?

Vilken bild av matematikämnet vill vi ge i perspektivet det livslånga och livsvida lärandet? Är det så att många vuxnas matematikångest inte är orsakad av matematikämnet som sådant, utan av den traditionsbemängda *skolmatematiken*?

Matematikkunnande – kompetens och innehåll

Kunnande i skolmatematik har ofta beskrivits i termer av ”kunskaper och färdigheter”, där kunskap inneburit förståelse och memorering av begrepp och teorier och färdigheter inneburit träning och automatisering av beräkningar, algoritmer och formelhantering.

I aktuell matematikdidaktisk forskning framstår matematikkunnande som en mer mångfasetterad och mångdimensionell kompetens innefattande såväl minneskunskaper som olika förmågor att aktivt hantera, berika och utveckla dessa kunskaper, vilket också återspeglas i våra svenska kursplaner i matematik.

Som exempel kan tas NCTM:s *Principles and Standards* (2000) där matematikkunnandet för hela ungdomsskolan beskrivs i termer av fem *processer* och fem *innehållsområden*, vilka följer eleven hela skolgången. De fem processerna är problemlösningsförmåga, argumentationsförmåga, kommunikationsförmåga, förmåga att se samband samt representationsförmåga. Dessa processer är dubbelriktade, d.v.s. de används dels för att *få kunskap* (jmf ”kunskapande” i Skola för bildning) dels att *använda kunskap*. De fem innehållskategorierna är tal och operationer, algebra, geometri, mätning samt dataanalys och sannolikhet. Dessa är i sin tur indelade i sammanlagt sjutton underkategorier som går som ”stråk” genom undervisningen från förskola till tolfte årskursen.

Ett annat exempel är de åtta kompetenser som beskrivs som grundläggande för matematikkunnande (Niss och Højgaard Jensen, 2002) och som också uppmärksammas i PISA-projektets dokument. Niss hävdar att uppmärksammandet av dessa kompetenser är nödvändigt för att kunna beskriva vad det innebär att behärska matematikämnet. Det är också nödvändigt för att kunna beskriva skolämnets *progression* och nivåer i ämneskunnandet, samt för att kunna jämföra olika kurser och nivåer. Jämförelser som enbart inriktar sig på kursens innehåll eller pensum är alltför ytliga och missvisande. Niss betonar också att förutom de åtta kompetenserna som har med handhavande att göra finns också en kompetens som har med *omdömesförmåga* att göra. Denna förmåga grundas på kunskaper om matematikens användning inom andra verksamheter, kunskap om matematikens historia samt dess speciella karaktär som fackområde.

Kompetenserna kan användas *normativt* vid konstruktion av läroplaner, t.ex. vid målbeskrivning, men också *deskriptivt* för analys av faktiska situationer, t.ex. vilket kunnande elever har uppnått. Dessutom kan kompetenserna fungera som *metakognitivt* stöd då lärare och elever reflekterar över undervisnings- och lärandesituationer i klassrummet. Kompetensbegreppen kan då ge nya möjligheter att formulera idéer och analysera erfarenheter.

Ytterligare exempel på kompetenstänkande finns i *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Kilpatrick et al, 2001) där kunnandet beskrivs som *mathematical proficiency* uppdelat i fem kategorier. Med denna term undviker författarna den traditionella dikotomin kunskap–färdighet och de mer eller mindre implicita föreställningar som vidhänger dessa termer. På motsvarande sätt skulle man för svenska förhållande kunna tala om ”kunnande” istället för ”kunskaper och färdigheter”. Termen ”kunnande” associerar också till idén om en *övergripande* kompetens som

utvecklas hos individen och inte till en mer traditionell kunskapssyn där ”kunskaper” ses som en uppsättning färdiga kunskapsbitar, som överförs med hjälp av läroböcker och undervisning.

En annan aspekt av kompetensbegreppet är att det försöker fånga en personlig kvalitet eller ett sätt att vara. Förutom att man har kunskap och förmåga att använda denna finns också ett emancipatoriskt element: en förmåga att reflektera över och hantera nya situationer som förutsätter självförtroende och självständighet.

Att fokusera ett *baskunnande* innebär då både en identifikation av vissa delar av matematiken som ”basal” och en avgränsning gentemot andra områden som varande *mindre basala*. På längre sikt måste också övergripande mål som demokratisk kompetens, livslångt lärande och bildning komma att påverka utformning och innehåll av kursplanerna i matematik. Detta är en komplex uppgift som bör relateras dels till våra svenska läroplaner men också till aktuell forskning och läroplaner i ett internationellt perspektiv. De tolkningar som görs måste vara öppna och dynamiska, så att inte en långsiktig satsning motverkas av slutna och föråldrade definitioner och synsätt eller ett statiskt förhållningssätt till aktuella läroplaner och kursinnehåll. En läroplan och dess terminologi utvecklar fortlöpande sin mening med hjälp av de professionellas deliberativa samtal.

Baskunnande i matematik – några operationella inriktningar

Inledning

En satsning på att stärka elevers baskunnande i matematik bör inriktas på de önskvärda kompetenser som matematikutbildningen har som yttre och inre mål. Med yttre mål menas här de mål som relateras till miljöer i det livslånga och livsvida lärandet, d.v.s. studier, yrkesliv, samhällsliv och privatliv i övrigt. De inre målen är relaterade till ämnets natur och karaktär och anger riktpunkter för ökad förståelse, färdighet och fördjupning i ämnet. Dessa kompetenser lyfts huvudsakligen fram i kursplanernas mål att sträva mot och det är dessa mål som ska styra undervisningen och prägla allt arbete i skolan.

Mål att uppnå i kursplanerna är *inte* en utgångspunkt eller en inriktning för undervisning utan bör enbart ses som en miniminivå vad gäller *resultat*, se *Grundskola för bildning* (Skolverket, 1996). Det stora flertalet elever *kan och skall* nå åtskilligt längre, se *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik* (Skolverket, 1997). En liknande inriktning på mål att sträva mot kan man se i avsnittet *Bedömning i ämnet matematik* i grundskolans kursplan i matematik samt i PRIM-gruppens analyschema för bedömning.

Baskunnandet i matematik belyses i detta kapitel ur tre olika aspekter: som ett *livsprojekt*, som en *ämneskompetens* och som ett *ämnesinnehåll*. Dessa aspekter av kunnande går att återfinna i de svenska kursplanerna för grundskola och gymnasium och de får sin upptakt i förskolans läroplan. Aspekterna uppmärksammas och representeras här som *operationella inriktningar* lämpade för en mål- och syftebeskrivning i en baskunskapssatsning. Inriktningarna bör ses som olika samverkande sätt att identifiera och förhålla sig till en önskvärd gemensam kärna av väsentligt matematikkunnande.

De operationella inriktningarna är i sin tur preciserade i olika kategorier, vilka på motsvarande sätt bör uppfattas som olika samverkande delar av en större helhet.

Den centrala uppgiften är att utveckla *elevens*, och i vid mening *den lärandes*, baskunnande i matematik och här är givetvis *lärarens* baskunnande en kritisk faktor. All erfarenhet talar emellertid också för att övriga aktörer och intressenter bör ingå i ett större utvecklingsarbete. Sålunda bör föräldrar, skolläda-re och skolpolitiker informeras och engageras, liksom massmedia, näringsliv, fackföreningsrörelse, politiska partier och övriga relevanta intressegrupper.

En särskild roll spelar också *lärarutbildare* i matematik, vilka ofta hamnar vid sidan om kompetensutvecklingsprojekt, samt *forskare* med matematisk eller matematikdidaktisk inriktning, vilka bör engageras på olika nivåer.

De operationella inriktningarna skall ses som ett förslag, vilket fortlöpande bör kritiskt diskuteras, utvecklas, förfinas och konkretiseras.

Elevers baskunnande

Matematikkunnande som livsprojekt

Kunnandet belyses här som ett antal "färdigheter för livet" i förhållande till skolmatematikens syften för medborgarskap, för yrkesliv, för bildning och för högre studier. Färdigheterna relateras till de *lärmiljöer* som uppmärksammas i *Det livslånga och livsvida lärandet* (Skolverket, 1999) och *Memorandum om livslångt lärande* (EU-kommissionen, 2001) samt till *värdegrunden, det deliberativa samtalet* och begreppet *demokratisk kompetens*.

Demokratisk kompetens: För att individen ska kunna leva och verka i ett demokratiskt samhälle krävs goda kunskaper i matematik, dels för att kunna förstå och diskutera samhällsproblem i inom t.ex. ekonomi och politik, dels för att få en bild av det matematiserade samhället. En del av den demokratiska aspekten är att *alla* samhällsmedborgare har rätt att få lära väsentlig matematik, inte bara en utvald elit. Den demokratiska kompetensen uppstår dock inte av sig själv bara för att eleverna tillägnat sig vissa kunskaper och färdigheter. Om själva klassrumskulturen och arbetets organisation under lärandet är auktoritär och monologisk motverkas istället elevers demokratiska fostran.

Förmågan att kommunicera, att tro på och utveckla det förnuftiga samtalet, att själv ta ställning och att förstå andras skäl och argument är bärande demokratiska kompetenser som utvecklas då ett undersökande och argumenterande arbetssätt används i matematikundervisningen. Matematikundervisning behöver inte vara auktoritär utan kan ge många goda exempel på det förnuftiga samtalets kraft och möjligheter.

Elevers demokratiska fostran motverkas också om det inte finns forum för att diskutera och påverka valet av läromedel, arbetssätt och innehåll i matematikundervisningen och i vidare mening skolsituationen i stort.

Det livslånga och livsvida lärandet: Ett baskunnande i matematik måste relateras till elevers framtida *formella, icke-formella och informella lärmiljöer*. Vad gäller formella lärmiljöer så utgör

baskunnandet grunden för vidare studier inom det formella utbildningssystemet. Baskunnandet är då relaterat till vidare studier i matematik eller till områden med matematiska tillämpningar. Vad gäller icke-formella lärmiljöer så relateras baskunnande till kommande yrkesliv och vad gäller informella lärmiljöer relateras till individens övriga vardagsliv och personliga livsvärld.

Det är här inte oproblematiskt huruvida man bör ”yrkes- och vardagsanknyta” en given matematikkurs i det formella utbildningssystemet, eller införliva det faktiska matematikkunnande som redan finns (eller borde finnas) i dessa miljöer i de formella kursplanerna. Man måste här också ta ställning till i vilken grad ett baskunnande för vidare studier i matematik är innehållsligt förenligt med baskunnande för icke-formella och informella lärmiljöer. Ytterligare en problematik är här hur matematiklärande i icke-formella och informella miljöer ska kunna värderas och valideras relativt det formella utbildningssystemets krav.

Personlighetsdanande och bildning: Det moderna begreppet ”bildning” inringar den personlighetsdanande delen av lärandet och betonar individens självutveckling i meningen *vem man är*. Detta till skillnaden från ”utbildning” som mer fokuserar på kompetenser och färdigheter, *vad man kan*.

Ett tidigt försök att återuppliva bildningsbegreppet gjordes i *Skola för bildning* (1992:94), dock utan att få något större genomslag i skolvärlden. Idag finns indikationer på att bildningstanken åter lyfts fram kopplad till personlig intellektuell och etisk utveckling och ett aktivt medborgarskap. Dokument som uppmärksammar bildningstanken är t.ex. propositionen *Vuxnas lärande och utvecklingen av vuxenutbildningen* (2000/01:27), utredningen *Nya villkor för lärandet i den högre utbildningen* (SOU 2001:13) samt Högskoleverkets rapport *Core curriculum* (2001). Även EU-kommissionens *Memorandum om livslångt lärande* innehåller skrivningar som talar för att det formella utbildningssystemet, innefattande även universitet och högskolor, i högre grad än idag bör främja individens personliga utveckling i ett bildningsperspektiv.

Matematikkunnande har sin givna plats i ett sådant bildningsprojekt och den matematiska dimensionen av tillvaron kan då bli en integrerad, meningsfull och värderad del av den personliga världsbilden och det personliga förhållningssättet till livet. Att ägna sig åt matematiskt kunskapande har också hög grad av egenvärde vad gäller skönhetsupplevelser, upptäckarglädje och känsla av ”skärpning” av intellekt, kreativitet och intuition, och bidrar på så sätt till den allmänt personlighetsdanande dimensionen i all skapande och kunskapande verksamhet.

Matematikkunnande som ämneskompetens

Kunnandet kan också belysas som ett antal kompetenser som utvecklas från förskola till gymnasium. Dessa kompetenser representerar här olika aspekter av ämneskompetens och bildar dessutom en helhet av den typ som finns i t.ex. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (Kilpatrick et al, 2001) och i *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). I Sverige har försök till en liknande generell kompetensbeskrivning gjorts i rapporten *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket, 1999) under beteckningen *matematisk mognad*.

De följande aspekterna av en generell ämneskompetens är en preliminär syntes gjord bland annat med hjälp av ovanstående källor och i konsistens med våra nuvarande läroplaner. De olika aspekterna är sammanvävda och beror av varandra och de samspelar även med affektiva aspekter som t.ex. upptäckarglädje, lust och strävan, glädjen att behärska något samt estetiska upplevelser av matematikens skönhet och harmoni. Kompetenserna har en *dubbel innebörd*, dels som konsten att *använda* matematisk kunskap, dels som konsten att *utveckla* matematisk kunskap (jmf. begreppet ”kunskapa” i *Skola för bildning*).

Produktivt förhållningssätt: Att se matematik som meningsfull, användbar och värdefull, tillsammans med en stark tilltro till den egna förmågan att utöva matematik i vardagsliv, samhällsliv, kommande studier och yrkesliv. Denna kompetens utgör en självklar förutsättning för att ett matematikkunnande ska kunna vara ett livsprojekt.

Omdömesförmåga: Att kunna se matematikens roll, värde och egenvärde i ett historiskt, kulturellt och samhälleligt helhetsperspektiv samt att kunna se och bedöma matematikens användning inom andra verksamheter.

Begreppsförståelse: Att begripa innebörden av matematiska begrepp och operationer och kunna se hur dessa bildar sammanhängande nätverk.

Behärskande av procedurer: Att på ett flexibelt, precist och effektivt sätt tillämpa olika slags procedurer och algoritmer. Denna aspekt av kompetens är viktig inte minst i ett samspel med begreppslig förståelse och som en grund för problemlösning

Kommunikationsförmåga: Att i tal och skrift och på andra sätt kunna diskutera och argumentera kring frågeställningar i matematik.

Problemlösningförmåga: Att formulera, modellera, representera och lösa matematiska problem – såväl inommatematiska som från vardagsliv och tillämpningar i yrkesliv och andra ämnen.

Argumentationsförmåga: att tänka logiskt och reflektera, samt förklara, troliggöra och berättiga matematiska påståenden.

Hjälpmedelskompetens: att känna till och kunna använda miniräknare och andra hjälpmedel i vid mening där så är lämpligt samt känna till hjälpmedlens möjligheter och begränsningar.

Matematikkunnande som ämnesinnehåll

Kunnandet belyses här som en progression utifrån ett antal ”stråk” som genomsyrar ämnet från förskola till gymnasium. Dessa stråk representerar centrala idéer och områden med progression och samband mellan stråken av den typ som finns i t.ex. *Principles and Standards* (NCTM, 2000) Att presentera ämnesinnehållet på detta sätt har flera fördelar, en är att visa på skolmatematikens centrala idéer, en annan att visa på progression och sammanhang från förskola till gymnasium, vilket t.ex. kan minska friktionen vid övergång mellan olika stadier. Att utveckla matematisk kompetens kräver kunskap och färdighet vad gäller innehåll som metoder och teoribildning. Att få förståelse

och se sammanhang vad gäller de innehållsliga stråken kräver i sin tur kompetens. Kompetens och kunskapsinnehåll står därför i ständig växelverkan. Följande struktur av ”stråk” vilka är konsistenta med nuvarande kursplaner är en av många möjliga.

Tal och operationer: Att förstå innebörden av olika slags tal och olika sätt att representera tal, att förstå relationer mellan tal och talsystem, förstå innebörden av olika operationer med tal och hur dessa relateras till varandra, att kunna göra beräkningar flytande och göra rimlighet suppskattningar.

Geometri och visualisering: Att analysera karakteristika och egenskaper hos två- och tredimensionella former och utveckla matematiska argument gällande geometriska förhållanden, att specificera läge och beskriva rumsliga relationer med hjälp av koordinatsystem och andra representationssystem, att använda symmetri och mönster för analys av geometriska situationer, använda visualisering, rumsligt tänkande och geometriska modeller för att lösa problem.

Sambandsrepresentationer och symbolförtrogenhet: Att förstå mönster, relationer och funktioner, att representera och analysera matematiska situationer och strukturer med hjälp av algebraiska symboler, att använda och skapa generella matematiska modeller för att representera och förstå kvantitativa förhållanden, att kunna analysera förändring i olika sammanhang.

Mätning och enheter: Att förstå de mätbara egenskaperna hos objekt, att förstå enhetsbegreppet och samband mellan olika slags enheter och storheter, olika system för mätning och mätprocedurer, att tillämpa lämplig teknik, lämpliga verktyg och formler för att bestämma mått, att kunna resonera kring mätfel.

Statistik och sannolikhet: Att ha insikt om statistiska metoder att representera data, att kunna göra undersökningar och använda relevanta metoder, att kunna värdera statistiska undersökningar, metoder och resultat vad gäller användbarhet, att förstå och tillämpa grundläggande begrepp inom sannolikhetslära.

Lärare, lärarutbildare och övriga parter

Lärarna är givetvis nyckelpersoner i en satsning på matematiskt baskunnande. Lärarna får inte abdikera från sin roll som ledare och mentorer. En alltför passiv lärarroll cementerar elevers olikheter vad gäller kunskaper och förmåga, och de svagaste tenderar att bli ännu svagare medan de duktigare inte får de utmaningar de behöver. Den passiva lärarrollen leder också lätt till ett enskilt ”räknande” där en traditionell och föråldrad kunskapssyn tar överhanden. Ibland sker detta under benämningen ”individualiserad undervisning”, men är till sitt innehåll raka motsatsen eftersom alla elever är utelämnade åt samma lärobok och dessutom utan vägledning. En långsiktig satsning på att stärka elevers baskunnande i matematik kräver aktiva och kunniga lärare som behärskar såväl sitt ämne som effektiva metoder att undervisa i ämnet. Detta gäller i sin tur också *lärarutbildare*, vilka utbildar nästa generation av lärare och dessutom oftast är aktörer vid olika kompetensutvecklingsprojekt. Som tidigare nämnts är också läromedel, och därmed *läromedelsförfattare*,

traditionsbärare som behöver uppmärksammas i ett utvecklingsarbete. Även kategorin *forskare* i t.ex. matematikdidaktik och specialpedagogik kan innefattas som relevanta målgrupper. Följande aspekter på ett mångdimensionellt kunnande för lärare och lärarutbildare uppmärksammas här:

Djup kunskap om grundläggande matematik: läraren bör ha matematikkunskaper som överskrider önskvärt elevkunnande både vad gäller djup och bredd och som också är relevant i förhållande till skolmatematiken (Liping Ma, 1999).

Omfattande kunskap om didaktiskt effektiv matematik: kunskap om rika problem, lämpliga metaforer med mera. (Wittman, 2000) och (Yoshida, 1999).

Allmän pedagogisk och matematikdidaktisk kunskap

Kunskap om de lärande och deras speciella svårigheter och möjligheter

Kunskap om kursplanerna i matematik vad gäller innehåll, mål och syften och möjligheter till matematikanvändning i andra ämnen.

Kunskap om metoder för utvärdering, bedömning och betygssättning som en del av att främja lärande.

Kunskap om styrdokumentens innehåll, mål och långsiktiga syften och värderingar.

Kunskap om övrig skol- och lärandekontext och om aktuell debatt och utvecklingsarbete i skol- och ämnesfrågor.

Som tidigare uppmärksammas är det av avgörande betydelse att också lärarna själva uppfattar skolan som en lärmiljö där det är möjligt att föra deliberativa samtal med kollegor och skolledning. En auktoritär skolmiljö i stort med passiviserad och uppgiven personal smittar av sig på skolans klassrumsmiljöer och motverkar därmed elevernas demokratiska kompetens och försämrar klassrummet som lärmiljö. Detta är speciellt överhängande för ett ämne som matematik där undervisningen och dess planering redan av tradition har många auktoritära inslag.

All erfarenhet talar också för att *alla* aktörer som är relaterade till och påverkar skolan skall engageras i ett baskunnandeprojekt. En satsning på elevers baskunnande måste också innebära att skolledare, skolpolitiker och föräldrar utförligt informeras och engageras. Även massmedia, näringsliv och politiska partier måste informeras och engageras i utvecklingsarbetet. Mer om denna *systemiska ansats* finns att läsa i *Hög tid för matematik* (NCM 2001:01) och i *Hur kan lärare lära?* (Mouwitz, L., NCM 2001:02) samt i t.ex. *Before It's Too Late* (The John Glenn Commission, 2000).

Avslutning

De operationella inriktningarna innebär att skolämnet matematik uppmärksammas och belyses från tre positioner, som ett livsprojekt, som en ämneskompetens och som ett ämnesinnehåll. De anger också preliminära inriktningar för ett urval till och en modellering av en kärna av baskunnande.

En satsning på att förbättra elevers baskunnande i matematik är en satsning på ökad demokratisk kompetens och på ökade reella möjligheter för individen till ett livslångt lärande. En sådan satsning är inte enbart en angelägenhet för lärare och skolledare utan en angelägenhet för *hela samhällsgemenskapen*. Satsningen måste också vara långsiktig, välplanerad och fortlöpande; kortsiktiga ”lösningar” skapar långsiktiga problem.

Referenser

- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1994). "Begrundelseproblemet" i den elementära matematikundervisningen i Sverige. I G. Emanuelsson m fl (Red.). *Dokumentation av 8:e Matematikbiennalen*. Göteborg: Göteborgs universitet.
- EU-kommissionen. (2000). *Memorandum om livslångt lärande*. Bryssel.
- Högskoleverket. (1999). *Räcker kunskaperna i matematik?* Stockholm.
- Högskoleverket. (2001). *Core curriculum – en bildningsresa*. Rapport 2001: 20 R. Stockholm.
- Kilpatrick, J. et al. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC, USA: National Academy Press,.
- Ma, Liping. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Mahawa NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marklund, S. (1984). *Skolan förr och nu*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Mouwitz, L. (2001). *Hur kan lärare lära?*. NCM- rapport 2001:02. Göteborg: NCM.
- Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM. (2001). *Hög tid för matematik*. NCM-rapport 2001:01. Göteborg: NCM.
- Niss, M. (1981). Goals as a Reflection of the Needs of Society. In R. Morris (Ed.). *Studies in mathematics education, volume 2*. UNESCO.
- Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens Tæmahäfte nr 18–2002, København, Danmark.
- NCTM, USA *Principles and Standards for School Mathematics*. (2000).
- Prop. 2000/01:27. *Vuxnas lärande och utvecklingen av vuxenutbildningen*.
- Skolverket. (1996). *Grundskola för bildning*. Stockholm: Liber Distribution.
- Skolverket. (1997). *Kommentar till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik*. Stockholm: Liber Distribution.
- Skolverket. (2000a). *En fördjupad studie om värdegrunden*. Dnr 2000:1603. Stockholm.
- Skolverket. (2000b). *Deliberativa samtal som värdegrund – historiska perspektiv och aktuella förutsättningar* (Englund, T.). Stockholm.
- Skolverket. (2000c). *Med demokrati som uppdrag*. Stockholm.
- Skolverket. (2000d). *Det livslånga och livsvida lärandet*. Stockholm.
- Skolverket (2000e). *Uppdrag avseende stöd till utveckling av förskola, skola och vuxenutbildning*. Dnr 2000:3499. Stockholm.
- Skolverket. (2001). *Arbetsplan för expertgruppens riktade insatser*. Dnr 80-2001:2522. Stockholm
- SOU 1992:94. *Skola för bildning*.
- SOU 2001:13. *Nya villkor för lärandet i den högre utbildningen*.
- Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken. Ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.
- U.S. Department of Education (2000). *Before It's Too Late*. Washington DC: The National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21 st Century.
- Utbildningsdepartementet. (2000). *Värdegrundsboken – om samtal för demokrati i skolan* (Zackari, G. & Modigh, F.). Stockholm.
- Wittman, E. (2000). Developing Mathematics in a Systemic Process. *Abstracts of Plenary Lectures and Regular Lectures*, ICME 9, Tokyo/Makuhari, Japan.
- Yoshida, M. (1999). *Lesson study: A Case of Japanese Approach to Improving Instruction through School-based Teacher Development*. Chicago: University of Chicago, USA.

II. Synen på baskunskaper i ett tidsperspektiv

I många år har man betonat vikten av att alla elever skall ha baskunskaper i matematik. Här ges en kritisk granskning av vad som hänt inom det här området under de senaste 50 åren och varför vi fortfarande inte kan erbjuda en meningsfull undervisning åt alla elever. De som skriver kursplaner och sätter politiska mål verkar, enligt författaren, inte ta tillräckligt stor hänsyn till lärares och elevers reella behov av stöd. I artikeln tas även upp pedagogiska frågor som den olyckliga polariseringen av färdighetsträning och förståelse. I själva verket är de intimt sammanlänkade. Ett dilemma för dagens lärare är att skolans mål inte preciseras i våra senaste kursplaner. Det innebär att lärare aktivt och på egen hand måste söka efter kunskap i form av fortbildning, studiecirklar och litteraturstudier. För att detta ska fungera behövs starkt lokalt stöd och en långsiktig planering.

I U2000/3873/S gav utbildningsdepartementet i uppdrag till Skolverket bl.a. att

Skolverket skall under åren 2001 och 2002 genomföra en särskild satsning på basfärdigheter, d.v.s. att läsa skriva och räkna. Särskild uppmärksamhet skall ges grundskolans tidiga år.

På detta svarar Skolverket (Dnr 2000:3499) bl.a.:

Två år måste ses som en kort tidsrymd för en nationell skolförbättringssatsning. Basfärdighetsuppdraget kräver förberedelse och planering. Vad som menas med basfärdigheter är inte självklart och satsningen får inte leda till en trivialiserad syn, med risk för förenkling och mekanisering av undervisningen.[...] Basfärdighetssatsningen riskerar annars att bli en i raden av brandkärsuttryckningar som inte leder till några varaktiga resultat. (s 12).

För färdighetssatsningen i matematik bör den kompetens och de resurser som Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) i Göteborg representerar tas tillvara. (s 14)

För att förstå Skolverkets svar och varför vi på nytt anser oss ha problem med baskunskaper i matematik är det viktigt att känna till vissa delar av grundskolans historia. För den lärare som inte känner sina rötter, i det här fallet hur skolan har förändrats under de senaste 50 åren, är det svårt att förstå och leva upp till kraven i dagens läroplaner. En stor del av vår kunskap grundar sig nämligen på tidigare generationers erfarenheter. I boken *Lärare av i morgon* skriver Carlgen och Marton (2000) så här:

Färdigheter och kunskaper, utgörande ett slags kollektivt intellekt som nedärvs från generation till generation genom inläring, har utgjort mänsklighetens i särklass främsta, och till en början enda, vapen i kampen för överlevnad. (s 12)

Vad de skriver gäller i lika hög grad för färdigheter i att undervisa, d.v.s. lärarens ”kollektiva intellekt”. För läraren är det givetvis, precis som för andra yrkesutövare, viktigt att ha en kontinui-

tet och finna trygghet i sin arbetssituation. Det verkar emellertid som om de ständiga kasten mellan olika pedagogiska idéer (ofta framställda som sanningar eller universalmediciner) och de stora svängningarna när det gäller synen på kunskap och inläring i olika kursplaner, har lett till diskontinuiteter i lärarkårens "kollektiva intellekt". Många lärare verkar därför sakna såväl klara mål som funktionella metoder för sin verksamhet. Detta kan vara en viktig orsak till de problem lärare och elever upplever i dagens skola. I rapporten *Utan fullständiga betyg* (Skolverket 2001) ger man ett exempel på detta när man lyfter fram

att varje lärare kommunicerar olika förväntningar och att eleverna själva får knäcka koden till de prestationer och kunskaper som premieras vid resultatbedömning och betygssättning. (s 35)

För att förstå varför baskunskaper i matematik, trots alla satsningar genom åren, inte fått den roll i skolans undervisning som läroplanen ger dem, så tror jag att man måste ha deltagit i, eller arbetat nära, vissa utredningar och grupper. Man bör helst också ha arbetat aktivt med baskunskaper i matematik både som forskare och lärare. När vi diskuterade den här artikeln var vi överens om att jag skulle skriva den ur dessa perspektiv, alltså så som jag upplevt olika skeenden och uppfattat olika beslut som direkt eller indirekt berör baskunskaper i matematik. Jag kommer därvid att ta lärarens och lärarutbildarens perspektiv. Det betyder att jag ibland tillåter mig att visa viss upprördhet över direktiv som getts eller beslut som fattats över huvudet på lärarna, speciellt om detta lett till att nödvändiga baskunskaper inte erbjudits de elever som är i stort behov av dem, för en draglig överlevnad i ett alltmer komplicerat samhälle.

Övergången från folkskola/realskola till grundskola

Själv började jag min skolgång med att gå fyra år i folkskolan, innan jag fortsatte min utbildning i en femårig realskola. Skolan var då auktoritär och katederundervisning var den dominerande undervisningsformen. Någon egentlig individualisering förekom inte i folkskolan mer än att vissa av oss fick gå hem lite tidigare eller fick sitta och rita och måla medan andra räknade. För elever som hade problem med matematik var det inte lätt. För dem fanns det inga extra resurser att tillgå och de omfattande hemläxor vi ofta fick måste ha varit en plåga såväl för de lågpresterande eleverna som för deras familjer. Skolans lösning på de här problemen bestod i att de som inte nådde målen under ett skolår fick gå om det skolåret. Det här innebar att man, ur lärarens synvinkel, kunde hantera den tidens lågprestationsproblem på ett enkelt sätt genom att överlåta elevernas problem på en annan lärare. På så sätt behövde man inte bekymra sig om hur man undervisar lågpresterande elever. Efter grundskolans genomförande var den här lösningen inte längre möjlig och man införde istället specialundervisning. Denna växte så kraftigt att man i början av 1970-talet fick sätta ett tak på 30 procent av undervisningsvolymen. Den nya lösningen innebar i själva verket att en lärare som inte klarade av att undervisa lågpresterande elever fortfarande kunde överlåta problemen till en annan lärare, t.ex. till en speciallärare. Denna möjlighet att "köpa" sig fri från metodiska problem har idag minskat kraftigt som en följd av ekonomiska nedskärningar.

Det är intressant att jämföra Dahllöfs (1971) styrgruppsmodell med vad som låg i folkskollärarens "kollektiva intellekt". Dahllöfs modell beskriver hur läraren vid klassundervisning i sammanhållen klass planerar undervisningen för de elever som kunskapsmässigt ligger på 10–25 percentilen från "botten" räknat, det som Dahllöf kallar styrgruppen. Vad modellen leder till är å ena sidan att de flesta elever i klassen drabbas av en "lågavkastande överinläring" vilket innebär att de fortsätter att öva på saker de redan kan. De hindras därmed från att gå vidare och fördjupa eller förmera sitt kunnande. I *Lusten att lära* (Skolverket, 2003) har man observerat konsekvenserna av detta fenomen även i dagens skola:

Hos en del elever i år 5 kan man dock märka att inställningen till just matematik har börjat bli mer problematisk. Dessa elever betraktar matematik som det tråkigaste ämnet och bland de mest negativa hör elever som har *lätt för matematik*. (s.13) (Min kursivering.)

Men modellen leder å andra sidan till att planering och undervisning kommer att ske över huvudet på 10 procent av eleverna. Modellen beskriver också att styrgruppen kommer att ligga på betydligt högre percentiler i positivt selekterade klasser, såsom i realskolan. Detta leder till en ännu större utslagning av de lågpresterande eleverna i sådana klasser i relation till referensgruppen. För realskolans del blev följden av detta att ca hälften av de elever som tog realexamen, under vissa perioder, hade gått om minst ett skolor. Det var också många av realskolans elever som för att klara sina studier fick läsa extra för privatlärare under terminstid eller under somrarna. Realskolan var verkligen inte anpassad till arbetarklassens barn. Det var den här typen av skola man ville förändra när man tillsatte 1946 års skolkommision. Kommissionens syn på den gamla skolan sammanfattades så här i (SOU 1948:27):

Då skolan hade att fostra blivande ämbetsmän, kom man så småningom att lägga allt större vikt vid bestämda kunskapskrav, vid enhetliga kursplaner, vid kunskapskontroll genom examina och vid likformighet ifråga om metoder och prov. I och med att skolans frihet på detta sätt begränsades, försvärades experiment med nya undervisningsmetoder och nya organisationsformer. Traditionalism kom att känneteckna hela skolväsendet. (s 2)

Som ett övergripande mål för en ny skola skrev man vidare:

Skolans främsta uppgift blir att fostra demokratiska människor [...]. Den enskilde elevens individualitet och personliga förutsättningar bör i skolan inte endast uppmärksammas och respekteras utan vara själva utgångspunkten för uppläggnen av fostran och undervisning. (s 3)

Vad kommissionen speciellt vände sig mot var den auktoritära grundsynen i skolan. Tyvärr gjorde man samtidigt det logiska misstaget att blanda samman politik och pedagogik, genom att koppla samman auktoritetstro med klassundervisning/katederundervisning. Man blandade i själva verket samman begreppen auktoritet och auktoritär. Kommissionen skriver således om katederundervisning:

Om denna metod används i måttlig omfattning och i sådana fall, där den motiveras av lärostoffets natur, har den en uppgift att fylla. Hittills har den emellertid varit tämligen allena rådande i svenska skolor, och det är på den punkten en radikal ändring är önskvärd.[...] Metoden är ägnad att framkalla osjälvständighet,

auktoritetstro, passivitet, i värsta fall leda vid skola och arbete över huvud. Den ger föga möjlighet till initiativ från lärjungens sida, och den har föga utrymme för samarbete mellan eleverna. Den befordrar inte lusten till fortsatt studiearbete på egen hand. Till sin inre syftning är metoden auktoritär. (s 5)

Den målning av skolans undervisning i svart och vitt, som redovisas i det här citatet, blir till en följetong genom reformarbetet och fram till våra dagar. Under de senaste 40 åren har svenska lärare gång på gång fått veta att det mesta av vad de dittills gjort har varit fel. Givetvis har många av de nya pedagogiska idéer som dykt upp under dessa år bidragit till att på olika sätt öka lärarkårens kunskaper om skola och utbildning. Problemet är emellertid, att idéerna samtidigt bidragit till att bryta ned lärarkårens självkänsla och yrkeskunnande. Detta beror inte på att de pedagogiska idéerna varit dåliga i sig utan på att de politiker, lärarfortbildare och lärarutbildare som framfört idéerna ofta varit så besjälade av det nya att de mer eller mindre öppet fördömt äldre, funktionella idéer. På så sätt har förändringsarbetet snarare blivit ett hinder mot, än ett incitament för, en avsedd förändring. Det gäller att se till att den här typen av misstag inte upprepas vid en kommande satsning på baskunskaper. En satsning på baskunskaper måste bygga på beprövad erfarenhet och vara långsiktigt hållbar, inte vara beroende av pedagogiska dagsländer. Jag återkommer till detta problem senare i artikeln.

Läroplan 94

När man drygt 50 år efter skolkommissionens betänkande reflekterar över vad som så småningom blev följden av skolkommissionens arbete så kan man konstatera att den nuvarande läroplanen, *Lpo 94*, (Utbildningsdepartementet, 1998) verkligen följer upp dess arbete och påbjuder att alla elever, oberoende av samhällsklass och studiebegåvning, skall få en individuellt anpassad undervisning i en demokratisk skola. Under rubriken "Skolans uppdrag" i läroplanen läser man:

Skolan har i uppdrag att överföra grundläggande värden och främja elevernas lärande för att därigenom förbereda dem för att leva och verka i samhället. Skolan skall förmedla de mer beständiga kunskaper som utgör den gemensamma referensram alla i samhället behöver. Eleverna skall kunna orientera sig i en komplex verklighet, med ett stort informationsflöde och en snabb förändringstakt. (s 7)

Under rubriken "En likvärdig utbildning" läser man vidare:

Undervisningen skall anpassas till varje elevs förutsättningar och behov. Den skall med utgångspunkt i elevernas bakgrund, tidigare erfarenheter, språk och kunskaper främja elevernas fortsatta lärande och kunskapsutveckling. (s 6)

Den här typen av mål har genomsyrat läroplanerna sedan 1962. Jag tror också att de flesta lärare finner dem viktiga och relevanta. Liksom i 1980 års läroplan, *Lgr 80*, (Skolöverstyrelsen, 1980) har man i *Lpo 94* dessutom strävat efter att ge mål för de grundläggande kunskaper som alla elever behöver. I *Lgr 80* kallas detta för "nödvändiga kunskaper", i *Lpo 94* kallas det för "uppnåendemål". Om detta skriver man i *Lpo 94*:

Mål att uppnå uttrycker vad eleverna minst skall ha uppnått när de lämnar skolan. Det är skolans och skolhuvudmannens ansvar att eleverna ges möjligheter att uppnå dessa mål. (s 10)

Så här långt skulle utan tvekan ledamöterna i skolkommissionen varit mycket nöjda med den utveckling de initierat. Om de däremot tagit del av skolans resultat efter 40 års utveckling av grundskolan så skulle de säkert undrat hur något sådant kan vara möjligt i en modern och demokratisk skola. Av *Betyg och utbildningsresultat* från år 2000 (Skolverket 2001) framgår bl.a.:

- att 20% av de elever som lämnade grundskolan saknade betyg i något ämne och att 10% av eleverna saknade behörighet till gymnasieskolan (s 15).
- att 6,8% av eleverna inte hade nått målen i matematik i skolår 9 (s 18) och att samtidigt 16% av dem inte hade nått målen på det nationella ämnesprovet (s 17).
- att 6,7% av eleverna på gymnasieskolan fick betyget IG på A-kursen i matematik. Samtidigt kan man konstatera att mer än 20% av de elever som följde programmen: Barn och fritid, Bygg, Fordon, Industri och Livsmedel, fick IG på A-kursen i matematik (s 32).

Dessa data visar att alltför många elever saknar baskunskaper i matematik, vilket inte rimmar särskilt väl med det ansvar man gett skolan och skolans huvudmän. Det finns därför all anledning att närmare analysera orsakerna till detta fenomen. För att göra det måste vi återigen gå ett femtiotal år tillbaka i tiden.

Tillbaka till skolreformen

Av den litteratur som beskriver arbetet inför den stora skolreformen framgår att det var en hård debatt som pågick in i det sista. Debatten gällde inte minst om, och i så fall när, en differentiering skulle ske. Resultaten av den debatten skulle ju i hög grad påverka hur individualiseringen av undervisningen kunde utformas. "Realskolefalan" ville ha en differentiering, åtminstone på högstadiet, vilket skulle gynna de högre presterande eleverna, medan "folkskolefalan" ville ha en mer demokratisk skola, helt utan differentiering. (Se t.ex. Marklund, 1980.) Lösningen på krisen kom när resultaten från den s.k. Stockholmsundersökningen (Svensson, 1962) blev kända. I undersökningen redovisas en jämförelse av studieresultaten mellan å ena sidan folkskola och realskola och å andra sidan försöksverksamheten med nioårig enhetsskola. Resultaten tolkades som ett vetenskapligt stöd för fördelarna med sammanhållna klasser. Några år senare granskades de här data närmare av Dahllöf (1967) som vid sin omräkning av resultaten även tog hänsyn till vissa ramfaktorer som Svensson inte tagit i beaktande. Han kom då fram till helt andra resultat. Denna skillnad i tolkningen av Svenssons data är, enligt min uppfattning, av avgörande betydelse för hur grundskolan senare utvecklades. Jag låter här Dahllöf (1967) själv beskriva vad det handlade om:

De sammanhang i vilka stockholmsundersökningen uttryckligen åberopas eller uppenbarligen åsyftas tyder dock på att den, trots att den inte förelåg i definitivt skick förrän i samband med riksdagsbehandlingen, redan på grund av preliminära rapporter väckt uppmärksamhet och utövat ett både direkt och indirekt inflytande. I samband med differentieringsfrågan framhåller således skolberedningen följande:

De skäl som i första hand brukar åberopas för det linjedelade högstadiet är hänsynen till en i jämförelse med nuläget bibehållen eller helst höjd kunskapsnivå hos eleverna, främst då de mest begåvade eleverna. Man menar att endast om lärarna kan få undervisa i klasser som sammansatts med hänsyn till elevernas förmåga att följa undervisningen kan denna bli meningsfull.

Här vill beredningen dock erinra om att den av forskningssekreterare Nils-Erik Svensson företagna undersökningen om prestationsutveckling i olika differentieringsmiljöer ... tyder på att en homogenisering av klasserna för de ur skolans synpunkt svagaste eleverna medför för dem ogynnsamma konsekvenser ifråga om kunskapsinhämtandet samtidigt som homogeniseringen inte har några påtagliga positiva effekter för de bästa eleverna. (SOU 1961:30 s 287). (s 65)

I och med denna tolkning i SOU 1961:30 var en grundskola med sammanhållna klasser i hamn. Vetenskapen hade visat att en differentiering i själva verket inverkar negativt på elevernas studieframgång, ett överraskande resultat som gav eko långt utanför Sveriges gränser. Skolberedningens majoritet var uppenbarligen övertygad om de fördelar med sammanhållna klasser som stockholmsundersökningen ansågs visa på. I en debatt i riksdagens andra kammare använde t.ex. Stellan Arvidsson (skolberedningens sekreterare) dessa argument mot dem som förordade en differentiering efter sjunde skolåret:

Men framför allt är själva huvudtesen i argumenteringen felaktig. Samtliga vetenskapliga undersökningar som skolberedningen har haft tillgång till talar för den uppfattningen att studieresultaten när det gäller begåvade elever blir lika goda, om dessa studieinriktade elever sitter i blandade klasser tillsammans med kamrater, som har sämre förutsättningar för teoretiska studier, som om de sitter i särskilda urvalsklasser. Undersökningarna ger också vid handen att studieresultaten i de blandade klasserna blir bättre för de svaga eleverna (AK 1962: 22 s 75 f)

Jag kan livligt tänka mig hur konfunderade många lärare måste ha blivit av detta resultat som under ett stort antal år kom att dominera synen på individualisering i grundskolan. Under min egen lärarutbildning var även jag mycket skeptisk till de här resultaten, men fick reda på att så här var det. Detta var bevisat av vetenskapen och därmed en pedagogisk sanning. Ännu mer förbryllad blev jag när jag några år senare själv började arbeta med olika individualiseringsmodeller på högstadiet. En god teori borde ju vara omsättbar i praktiken, men den här teorin fick jag inte att stämma. Inte förrän jag år 1969 kom i kontakt med Dahllöfs forskning fick jag själv en tillfredsställande lösning på problemet.

Nåväl, i riksdagen var argumentet tydligen avgörande. Man fattade beslut om införande av en sammanhållen nioårig grundskola. Man gjorde dock av pedagogiska skäl två undantag mot regeln genom en alternativkursuppdelning i ämnena matematik och engelska fr.o.m. skolår 7. Men hur förhöll det sig då i själva verket med stockholmsundersökningen? Jag låter Dahllöf (1967) berätta vidare:

Så långt som vi hittills fört analysen syns den i varje fall visa, att stockholmsundersökningen blivit föremål för alltför generaliserade tolkningar såväl av författaren själv som i synnerhet av andrahandsframställningar. På en avgörande punkt i sin argumentering i differentieringsfrågan har t ex 1957 års skolberedning dragit en slutsats, som kan uppfattas och också har tolkats så, att en homogenisering genom organisatorisk differentiering missgynnar de sämsta eleverna utan att för den skull ge några positiva effekter för de bästa. Den resultatbild som kan utläsas av stockholmsundersökningen ger snarare stöd för den motsatta tolkningen. (s 128)

Idag lär de flesta forskare vara överens om att Dahllöfs omräkning av data från stockholmsundersökningen ger den korrekta tolkningen. Problemet var bara att grundskolan på den tiden var en alltför skör skapelse. Det man minst av allt önskade var en ny debatt om dess grundvalar. Man föredrog därför de politiskt gångbara argumenten. Detta kom, vilket är en av poängerna med den här artikeln, att leda till en rad olyckliga konsekvenser för svensk skola.

Det fenomen vi just iakttagit är inte unikt. Liksom det finns seriösa och mindre seriösa lärare så finns det också seriösa och mindre seriösa forskare. Man bör därför vara försiktig när man tolkar forskningsresultat. Speciellt olyckligt blir detta när politiker eller tjänstemän, som inte är insatta i forskningsfältet, enbart letar upp och refererar sådan forskning som stöder deras egna åsikter, samtidigt som man underlåter att ge en allsidig bild av forskningsläget.

Skolreformen och individualiseringen

För att undvika onödiga missförstånd vill jag inleda det här avsnitten med att deklarera min positiva syn på grundskolan som idé. Jag ställer också helt upp på såväl de grundläggande idéer, som på de grundläggande mål och syften, som uttrycks i Lpo 94. Vad jag däremot beklagar är att politiker och byråkrater har så svårt att erkänna ett misstag. Jag kan förstå att det kändes tungt att ta del av Dahllöfs omräkning av stockholmsundersökningen, men ett erkännande av dess riktighet tror jag skulle betytt oerhört mycket för svensk skola, inte minst för att garantera svenska elever baskunskaper i matematik. Låt mig förklara!

Efter grundskolans införande blev situationen för de flesta lärare, i klassrummet, en helt annan än tidigare. Såväl den f d folkskolläraren som den f d realskolläraren fick arbeta med helt andra elever och med andra arbetsuppgifter än vad de utbildats för och haft erfarenheter av. Gamla beprövade undervisningsmetoder som de tidigare använt hade dömts ut eller fungerade inte längre och man fick samtidigt ägna full uppmärksamhet åt alla elever i klassen. Det gick inte längre att negligera och sätta kvar de elever som inte hängde med. Vad hade man då för pedagogiska idéer och beprövade metoder att falla tillbaka på inför de här nya arbetsuppgifterna? Ett intressant svar på den frågan får man om man läser Stellan Arvidssons definitioner av individualisering vilka publicerades i *Nämnamn* nr 2 1981/82:

Klassundervisningen: Läraren vänder sig i sin undervisning till alla elever i klassen på en gång. Undervisningen sker i princip från katedern (*katederundervisning*), och lektionen utformar sig ofta så att läraren frågar och eleverna svarar (*frågor och svar-metoden*). Hemuppgiften har karaktär av för alla elever i klassen gemensamma läxor med i princip samma krav på inlärn timer för dem alla (*läxlärningsmetoden*).

Klassundervisningen har av samtliga stora skolutredningar – från 1940 års skolutredning till SIA – utdömts såsom föråldrad. Läroplanen avvisar den i princip. Den bidrar till passivitet och osjälvständighet hos eleverna; den är till sitt väsen auktoritär. Den tar inte hänsyn till att elevernas förutsättningar för skolarbete varierar, den håller därför de duktigaste eleverna tillbaka och bortser från studiesvårigheter. Den förhindrar samarbete mellan eleverna. (§ 10)

Det var den här typen av politiska slogans och obekräftade påståenden jag fick ta del av under min lärarutbildning i början av 1960-talet. En viktig fråga är nu hur detta uppfattades av alla de lärare som under en stor del av sitt liv arbetat seriöst med just klassundervisning och sannolikt enligt sin egen uppfattning lyckats med detta. Varför skulle t.ex. klassundervisning i sig leda till att lärare inte diagnostiserar vad eleverna kan och tar hänsyn till detta eller att de inte ger differentierade hemuppgifter osv.? Hade det inte varit bättre att låta alla dessa lärare få veta att de flesta av dem faktiskt gjort ett bra jobb dithittills, enligt tidigare premisser, men att den nya skolformen kräver vissa modifieringar av skolans arbetssätt, såsom en mer individualiserad undervisning? Av det skälet bör de ibland använda andra arbetssätt och arbetsformer än tidigare. Man borde också ha framhållit att kraven på den nya skolan medför att andelen klassundervisning successivt borde minska för att på sikt möjliggöra mer individualiserande arbetssätt. Men att på det här sättet inkompetensförklara en hel lärarkår är enligt min uppfattning oförlåtligt. Arvidsson skriver vidare:

Självverksamhet: Eleverna arbetar på egen hand under lärarens överinseende och ledning. Läraren presenterar arbetsmaterial, ger instruktioner och anvisningar, vid behov hjälp; han kontrollerar arbetsresultaten och stimulerar eleverna till framsteg. Huvudvikten ligger på elevernas eget arbete, individuellt eller i grupp.

Självverksamheten motsvarar läroplanens undervisningsprincip aktivitet. All undervisning skall ha karaktären av självverksamhet: eleverna skall arbeta på egen hand. Den fostrar till självständighet och ger obegränsat utrymme för samarbete. Endast elevernas självverksamhet möjliggör individualisering. (s 10)

Detta är en attityd som man fortfarande möter i skolan. Självverksamhet och aktivitet har här getts ett egenvärde och läraren har reducerats till en assistent åt eleverna. Återigen undrar man hur den tidens lärare uppfattade detta. De hade alla en lång utbildning bakom sig som gick ut på att de först genom egna studier skulle bygga upp, och därefter till eleverna förmedla, de kunskaper de fått i arv av tidigare generationer. Av Arvidsson får de nu reda på att dessa kunskaper är av mindre värde och att eleverna uppenbarligen förväntas konstruera dessa kunskaper själva, individuellt eller i grupp. Poängen borde väl istället varit den att läraren utgående från sina kunskaper och erfarenheter skulle hjälpa eleverna att återupptäcka den matematik (och den naturvetenskap m.m.) som det tagit mänskligheten hundratals år att bygga upp. Detta kan ske på olika sätt och under utnyttjande av olika, och med tanke på omständigheterna, varierande arbetsformer. Men nivågruppering får det inte vara, enligt Arvidsson:

Nivågruppering: Klassen uppdelas under elevernas självständiga arbete i grupper på olika skicklighets- och framstegsnivåer. Nivågrupperingen, som anses underlätta för läraren att ge eleverna utförligare instruktioner har mycket gemensamt med klassundervisningen; den tar inte hänsyn till de individuella olikheterna inom gruppen och binder på så sätt de enskilda eleverna vid en gemensam framstegstakt. Klassen sönderfaller i delar utan inbördes förbindelser och med utpräglad rangordning sinsemellan. Nivågruppering avisas intensivt av SIA och varnas för i läroplanen. (s 11)

Varför på detta sätt smula sönder ett av de få instrument som lärarna nu hade kvar att ta till? Tvärt emot vad som framhålls i det här citatet så används ju nivågruppering, vad jag kan förstå, av lärarna, just för att **ta hänsyn** till individuella olikheter. Detta inte bara **anses** underlätta, utan

underlättar i allra högsta grad, möjligheterna att nå eleverna på deras individuella nivå. (Vad som är politiskt opportunt är en helt annan sak.) Man borde istället ha framhållit att man måste se upp med en del problem som kan uppstå i samband med nivågruppering, t.ex. att en permanent nivågruppering kan leda till vissa långsiktiga problem och t.o.m. utslagning av vissa elevgrupper. Jag förstår inte heller anspelningen på SIA-utredningen. Det var i själva verket den, som genom förslaget om en friare resursanvändning, möjliggjorde alla de försök med nivågruppering som snart inleddes i landet. Många av de innovationer som dök upp under SIA:s försöksverksamhet byggde i själva verket just på nivågruppering av undervisningen vilket framgår av den utvärdering som gjordes av SIA-försöken med friare resursanvändning (Kilborn och Lundgren, 1974).

Min poäng med att lyfta fram de här citaten är att de är så typiska för den politisk/pedagogiska debatten. Allt blir till svart eller vitt. Just detta med skolans arbetsformer, liksom åldersblandning och undervisning utan läromedel, lyfts än i dag fram på ett sådant sätt att man lätt glömmer bort att detta bara är organisatoriska ramar kring något betydligt viktigare, nämligen att eleverna skall konstruera kunskaper av olika slag. Som en motpol till Arvidssons syn på självverksamhet vill jag därför citera rapporten *Utan fullständiga betyg* (Skolverket, 2001):

Resultatet av studien visar att elevaktiva arbetssätt med starka inslag av enskilt arbete ibland inte passar elever som av olika skäl har svårigheter att få fullständiga betyg. (s 32)

Man menar t.o.m. att en överdriven satsning på förändrade arbetsformer kan dra uppmärksamheten från elevernas lärande till formerna kring lärandet. Man tvingar alltså in lärandet i en på förhand vald arbetsform istället för att välja lämplig arbetsform utgående från syftet med och målet för lärandet:

Det kan emellertid även vara så att förändringar av arbetsformer förs in i en organisation där synen på kunskap och lärande är oförändrad i förhållande till de nya styrdokument, vilket gör att t.ex. lärarens roll som omdömesgill vägledare för elevernas lärande blir problematisk alternativt helt uteblir. (s 32)

Till detta kan läggas att ju mer diffusa styrdokument eller de lokala arbetsplanerna är, desto större torde risken bli att arbetsformen blir överordnad lärandet. (Observera att jag i lärandet även inbegriper lärandet att samarbeta och att söka kunskap.)

Det är intressant att jämföra Arvidssons kategoriska beskrivningar med vad som skrivs i rapporten *Lusten att lära* (Skolverket, 2003).

Utifrån de erfarenheter som granskningen har givit, går det emellertid inte att enkelt ange vilka specifika lärmiljöer som skapar lust eller olust, och kategoriskt säga att t.ex. det som i dagligt tal kallas "individualisering" är "bra" eller "mindre bra" eller katederundervisning automatiskt är "dåligt". (s. 10)

Tiden mellan Lgr 62 och Lgr 69

Det är klart att en så här genomgripande skolreform inte kunde genomföras helt friktionsfritt. Man kan emellertid konstatera att grundskolan med tanke på omständigheterna fungerade relativt väl, åtminstone organisatoriskt sett. Samtidigt minns jag mycket väl många f d realskollärares förtvivlan.

Det var inte den här skolan de var utbildade för och det var inte de här eleverna man hade tänkt sig att undervisa. Det var inte längre möjligt att ställa samma krav och att lära eleverna samma matematik som förr. Glädjen bland dem blev därför stor när vi i Sverige tog del av vad som hände kring den "Nya matematiken" i USA.

För att koppla detta till baskunskapsfrågan, så var bakgrunden den att man under det andra världskriget utsatte amerikanska rekryter för intelligenstest för att kunna ge dem en lämplig placering inom försvaret. Man upptäckte då att förvånansvärt många amerikanska ungdomar saknade funktionella läs-, skriv- och räknefärdigheter. Det gjordes därför en stor satsning på baskunskaper, bl.a. i matematik. Detta tog givetvis resurser från andra verksamheter t.ex. från undervisningen av de mer begåvade eleverna. 1957 kom det så en vändning i och med att Sovjetunionen, genom uppskjutandet av sin Sputnik 1, visade, att de var väl så långt framme som USA i sin rymdsatsning. I ett chockat USA kallade man samman experter som fick till uppgift att utarbeta en plan för hur USA på sikt skulle ta över ledningen. Den amerikanske pedagogen och psykologen Bruner (1970) skriver så här om det som skulle bli utgångspunkten för den "Nya matematiken".

Vad primärskolebarn bör få lära sig om Amerikas historia eller vad undervisningen i räkning bör omfatta kan bäst avgöras av den som äger stor överblick och sakkunskap inom vart och ett av dessa områden. För att kunna fastställa att de första grunderna inom algebran vilar på de grundprinciper som finns formulerade i den kommutativa, den distributiva och den associativa räknelagen måste man vara matematiker och i stånd att uppfatta och förstå matematikens grundprinciper. (s 34)

Vad den Nya matematiken ledde till var kursplaner i matematik som byggdes upp på ett logiskt elegant sätt med utnyttjande av s.k. mängdlära. Avsikten var att genom effektivare utbildning komma ikapp Sovjet. Plötsligt blåste det alltså helt nya pedagogiska vindar och den amerikanska satsningen på baskunskaper var nu ett minne blott! Man känner igen mönstret. När det uppstår en ny politisk/pedagogisk trend så flyttar man snabbt resurser till det nya området oberoende av om man löst det tidigare så viktiga problemet eller ej.

I Norden hakade vi snabbt på de här idéerna och det bildades en grupp för harmonisering av den nordiska matematikundervisningen. Man skrev och utprövade nya undervisningsmaterial, men texterna fungerade tyvärr endast bland de verkliga entusiasterna. Samtidigt med detta hade man emellertid startat ett projekt med individualiserad matematikundervisning i Braås (Öreberg, 1964). Genom att koppla de här idéerna till varandra blev det en vändning. Försöken i Braås kopplades nu ihop, inte bara med den nya matematiken utan också med den s.k. undervisningsteknologin. Detta ledde i sin tur till det s.k. IMU-projektet, ett matematikprojekt inriktat mot högstadiet. (Se t.ex. Larsson, 1972 och 1973)

IMU-materialet som utarbetades i samarbete med Hermods var för sin tid mycket avancerat.

- Det byggde på målanalyser, grundade på en modern studieplan.
- Det var uppbyggt efter undervisningsteknologiska principer och tillrättalagt för en individualisering på flera färdighetsnivåer.

- Elevernas väg genom materialet gick via diagnostiska prov.
- En stor flexibilitet vad gällde organisation var möjlig. Lärarna arbetade ofta i lärarlag och med såväl storklasser som mindre grupper. Lärarnas rutinuppgifter övertogs ofta av en lärarassistent.

Stora förhoppningar ställdes på det här projektet. Man hoppades utan tvekan att ”den nya matematiken” i kombination med undervisningsteknologin skulle leda till en lösning av grundskolans verkligt stora problem, individualiseringsfrågan. När man väl utvärderat projektet stod det emellertid klart att förväntningarna inte infriats. Man gjorde då vad som är så typiskt inom svensk pedagogik, man ”spolade” hela idén. Detta var ett mycket stort misstag. Jag arbetade själv i tre år med IMU-materialet och skrev kritiska artiklar om projektet (t.ex. Kilborn, 1974), men jag ångrar att jag inte skrev nya artiklar, när jag insåg hur en mängd värdefulla kunskaper och erfarenheter plötsligt kastades bort. Nu var det dialogpedagogiken som gällde. Återigen kunde man konstatera att den politisk/pedagogiska debatten bara kan ha två nyanser, svart eller vitt!

Vad har nu detta med baskunskaper i matematik att göra? Svaret är: Väldigt mycket. Satsningen på Nordiska kommitténs harmoniseringsarbete som främst gällde de duktigare elevernas matematik, lyfte helt uppmärksamheten från de problem man hade med lågpresterande elever. När sedan IMU kom, med förhoppningar om att lösa individualiseringsproblematiken, blev det tekniska och administrativa arbetet alltför omfattande. Därför blev det liksom ingen kraft över för att uppmärksamma baskunskapsproblemet.

Vari bestod då problemen med IMU? För att förstå det måste vi gå tillbaka till skolberedningen och dess syn på undervisning. Eleverna skulle hållas samman i heterogena klasser, men det skulle inte förekomma klassundervisning. ”All undervisning skall ha karaktären av självverksamhet [---]. Endast elevernas självverksamhet möjliggör individualisering.” Nu hade man alltså utarbetat ett programmerat material där eleverna kunde arbeta på egen hand och i egen takt på tre olika djupnivåer (senare fyra nivåer) och där läraren kunde fungera som handledare. Man glömde emellertid bort flera viktiga förutsättningar för att det här skulle fungera. För det första blev problemen stora för de elever som hade problem med att läsa texterna. Och att läsa matematiska texter är problematiskt på grund av det speciella språk och de speciella beteckningar som används. För det andra uteblev ofta de matematiska samtal som är så viktiga för att eleverna skall kunna utveckla ett språk för matematikinläring och med vars hjälp de kan exponera olika tankeformer, få nya idéer och bygga upp nya begrepp. Vad gäller de lägre presterande eleverna, de som så väl behövde baskunskaper i matematik, innebar IMU snarast en katastrof. (Se t.ex. Larsson, 1972 och Kilborn, 1974)

IMU-projektet är intressant även ur en annan synvinkel. Än en gång drog man på centralt håll förhastade slutsatser om resultatet. Långt innan projektet var utvärderat kunde man således läsa om dess förtjänster i Lgr 69 (Skolöverstyrelsen, 1969 a):

Vid andra former av färdighetsövning kan det vara lämpligare att eleverna arbetar helt i egen takt med individuella uppgifter enligt individuella instruktioner [...]. En sådan s.k. hastighetsindividualisering tillämpas t.ex. i matematik med hjälp av ett självinstruerande programmerat material. I arbetsmaterialet ingår diagnostiska prov, som ger eleven och handledaren möjlighet att kontrollera uppnådda resultat. (s 63)

Hade man väntat in Larssons (1972) utvärdering av projektet skulle man nog inte uttryckt sig så här utan snarare varnat för riskerna med användandet av sådana programmerade undervisningsmaterial.

Av det som just beskrivits borde vi ha lärt något för framtiden, nämligen de stora problemen med att låta elever arbeta helt i sin egen takt, styrda av ett läromedel. Speciellt stora blir problemen om läromedlet ifråga inte ens är anpassat till en individualisering. Problemen med IMU var att såväl den didaktiska variationen som språkanvändningen uteblev, två faktorer som är viktiga vid begreppsbildning. Eftersom dessutom kontakten med en lärare förkom ytterst sällan missade eleverna oftast den konkretisering och de förklarande metaforer som gör matematiken levande och förståelig. Speciellt utsatta var som vanligt de lägre presterande eleverna. Tyvärr verkar inte alla lärare ha lärt sig läxan. I *Lusten att lära* (Skolverket, 2003) konstaterar man för skolår 7–9.

Arbetet handlar i hög grad om att "räkna så många tal som möjligt", ofta på egen hand med lärobokens diagnosmaterial/facit som hjälp. (s. 13)

Det tycks även vara så att många elever alltför tidigt måste arbeta med matematik utan hjälp av andra representationsformer än text och talat språk, trots att de har behov av en mer konkret undervisning. (s. 14)

Läraren hinner tala i genomsnitt högst två minuter med varje elev per lektion och eleverna kan vara utelämnade till att 95 procent av tiden själva lära matematik genom att arbeta med bokens uppgifter. (s. 14, 15)

En tolkning av de resultat som lyfts fram i *Lusten att lära* är att många pedagoger och didaktiker under de senaste 20 åren varit så upptagna av "learning", och i att bota elever i hur enskilda elever tänker, att de helt glömt bort begreppet "teaching" alltså hur man kan planera, organisera och optimera inläringen **för en grupp elever** samtidigt. Men även lärarutbildaren och den enskilde läraren bör ta åt sig en del av skulden. Många av dem har uppenbarligen varit så fixerade vid pedagogiska nyheter att de inte reflekterat över alla de viktiga erfarenheter som gjorts under 40 års undervisning i en grundskolemiljö. Varför skall man ändra allting. Mycket av det som sker i skolan fungerar faktiskt och behöver inte brytas ned. Att ge lärarkåren trygghet i vad de gör kan vara minst lika viktigt som att ständigt förändra.

Lgr 69 och den nya matematiken

I samband med att Lgr 69 (Skolöverstyrelsen, 1969 a) kom ut, påbörjades den största svenska satsningen hittills på fortbildning i matematik. Man var vid den tidpunkten fortfarande säker på att den nya matematiken hade blivit en succé i USA och nu skulle alla svenska lärare fortbildas i samma anda. Man slog verkligen på stort. Radio och TV utnyttjades i fortbildningen och lärarna skickade in svar på lösa uppgifter till Hermods för rättning (Skolöverstyrelsen, 1969 c, d). Delta-

projektet, som det kallades, satsade verkligen på ny matematik. Materialet byggde på mängdlära och matematisk stringens. Det dög inte längre att konkretisera 3 gånger 2 med att fråga efter priset på 3 äpplen à 2 kr styck, det skulle vara 3-mängder av logiska block ordnade i 2 rader eller 3 piprensare korsade med 2 piprensare. Jag deltog själv vid en utprovning av materialet 1967 och erkänner att jag imponerades av dess matematiska elegans. Men jag minns också hur äldre, kloka metodiklärare möttes med ett överlägset förakt, när de ifrågasatte idéernas användbarhet på låg- och mellanstadiet (t.ex. Lindström, 1968). Man kunde således iaktta hur en liten grupp matematikentusiaster helt hade tagit över svensk matematikundervisning. I samma anda skrevs också kursplanen i matematik till Lgr 69. Vad man uppenbarligen ännu inte kände till var att den nya matematiken redan hunnit bli en stor "flop" i USA.

Varför blev det då så fel i USA? Det viktigaste skälet var, enligt min uppfattning, att premisserna var felaktiga. Bruners (1970): "... vad undervisningen i räkning bör omfatta kan bäst avgöras av den som äger stor överblick och sakkunskap inom vart och ett av dessa områden", håller inte. Vad skulle det vara som gör en forskare i akademikerns matematik eller fysik till expert på hur man undervisar barn under de första skolåren? Dessa forskare representerar ju fel vetenskap. Det är också vanskligt att – såsom vi gjorde i Sverige – försöka "hjärntvätta" en hel yrkesgrupp på det sätt som gjordes. Lärares yrkesskicklighet sitter djupare än så. Det finns anledning att på nytt erinra om det "kollektiva intellekt som nedärvs från generation till generation" (Carlgren & Marton, 2000).

Resultatet av de processtudier av matematikundervisning som jag själv ledde under 1970-talet, visar klart det vanskliga med att beröva lärarkåren tryggheten av tidigare generationers beprövade kunskaper och istället försöka bygga upp deras matematikkunskaper helt från början. I en artikel *Är läromedlen den verkliga läroplanen* (Kilborn 1982) har jag följt den nya matematikens idéer från läroplanen ned till elevnivå. Resultatet är inte uppmuntrande. Vi kunde vid våra lektionsstudier iaktta lärarnas ständiga konflikter mellan å ena sidan den terminologi och de idéer som fortbildning och kursplanen företrädde och å andra sidan de idéer och den terminologi som läraren genom utbildning och beprövade erfarenheter tidigare byggt upp och införlivat i sitt yrkeskunnande. Studierna visade också hur allvarliga dessa konflikter kunde bli för undervisningen och för elevernas förståelse. (Se även Kilborn 1979)

Hur kom då Lgr 69 att se ut? Vi kan först konstatera att man, trots att man ännu trodde att IMU-projektet fungerade väl, ännu inte ansåg sig vara mogen att slopa alternativkurserna. Det fanns alltså i Lgr 69 fortfarande en s.k. "allmän kurs" för de lägre presterande eleverna. Man kan också konstatera att den matematik som introducerades i Lgr 69 inte hade mycket att göra med den matematik som beskrivs i Lgr 62. Följande citat från läroplanens (Lgr 69) supplement för matematik (Skolöverstyrelsen 1969 b) får belysa detta:

1:11 Multiplikation. Kommutativa och distributiva lagarna (Årskurserna 2–4)

Vid introduktion av multiplikation bör eleverna ha tillgång till laborativt material. Man kan därefter arbeta med nät, som figuren visar.

• • • •
 • • • •
 • • • •

Produkten av 3 och 4 är då antalet element i ett nät med tre rader med fyra element i varje eller fyra rader med tre element i varje. Genom att utnyttja näten kan eleverna på ett naturligt sätt få erfarenhet av kommutativiteten, i det här fallet $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Detta rationaliserar inläringen. (s 10)

Ett annat exempel är förslaget till subtraktionsalgoritm:

Exempel: $24-11$ respektive $35-17$ kan ställas upp på följande sätt.

$$\begin{array}{r} 20 + 4 \\ - 10 - 1 \\ \hline 10 + 3 = 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 + 15 \\ - 10 - 7 \\ \hline 10 + 8 = 18 \end{array} \quad (\text{s } 10)$$

Som tidigare nämnts har jag vid processanalyser av matematikundervisningen följt upp vad den här typen av råd ledde till när det gäller läromedel och undervisning. Som exempel visade det sig att det här förslaget till subtraktionsalgoritm, i kombination med en halvprogrammerad lärobokstext, ledde till systematiska fel för ett stort antal elever. (Se Kilborn, Johansson & Lundin 1977) Jag försökte också utreda orsakerna till att det blev så här, i en annan forskningsrapport. Här visade det sig att läroplangruppens relativa okunnighet om yngre elevers inläring, i kombination med att låg- och mellanstadielärare inte förstod den nya matematiken, ledde till allvarliga konsekvenser för undervisningen på lägre stadier. (Kilborn, Lundberg, Selander och Öhlund 1977).

Vad gäller citaten ovan kan man börja med att konstatera att det, enligt det första citatet ovan, i årskurserna 2 – 4 uppenbarligen var viktigare att känna till den kommutativa lagen än att veta att $3 \cdot 4 = 12$. Vad som snarare borde ha lyfts fram är att de flesta barn naturligt uppfattar operationen $3 \cdot 4$ som den upprepade additionen $4 + 4 + 4$. Man skriver vidare att eleverna vid introduktionen bör ha tillgång till laborativt material, men den verkliga poängen, vad detta material skall användas till, nämligen att ge språkligt stöd vid uppbyggandet av utvecklingsbara tankeformer, nämns inte. Vad gäller subtraktionsalgoritmen, så är den förklaring som ges möjligen intressant för den som redan kan subtrahera. Problemet är emellertid hur eleverna skall genomskåda när man skall skriva om talet 35 som $20 + 15$ och när man skall skriva det som $30 + 5$. Inte rimmar det här särskilt väl med matematikundervisningens övergripande mål i Lgr 69:

Undervisningen skall utgå från elevernas erfarenheter och föreställningar och grundas på förståelse. (s 137)

Man hade också helt glömt bort vad som står under rubriken "Undervisning" i samma läroplan:

Inom de gränser och med de förutsättningar, som läroplanen anger, bör valet av lärostoff och verksamhet i undervisningen ske med hänsyn till elevens utvecklingsnivå och erfarenhetsbakgrund. Stoffet bör väljas så, att elevens behov, intressen och problem kommer att utgöra en grundval för inläringen. (s 4)

Det här skedet i svensk skolutveckling är lärorikt. Uppenbarligen lät man en grupp personer, som sannolikt var duktiga i matematikämnets teori, men mindre kunniga om hur yngre barn lär, ta ett alltför stort ansvar för svensk matematikundervisning. Man glömde bort den viktiga regeln om att inte lägga alla äggen i samma korg. Samtidigt kan man fråga vem som tog det viktiga, övergripande ansvaret, nämligen att se till att kursplanen i matematik överensstämde med läroplanens övergripande mål? Vad man i själva verket helt glömde bort var grundläggande premisser för att inläring skall äga rum: Vad är egentligen poängen med undervisningen och vad är det som är viktigt? Samtidigt tog man vissa saker för givna, t.ex. att den från USA importerade nya matematiken fungerade och även skulle fungera i svensk grundskola. Låt mig avsluta det här avsnittet med ett tankvärt citat från Carlgren & Marton (2000).

Vanliga frågor är: Hur skall jag utveckla barnens förmåga att läsa, skriva, använda de fyra räknesätten? ... Metoder i all ära. Förvisso behövs de, men om jag förstår vad det innebär att kunna läsa, skriva, addera, multiplicera etc., ... då vet jag också varför jag föredrar ett sätt att försöka lära barnen det, framför ett annat, samt att jag på egen hand själv kan frambringa jämförelsevis välgrundade idéer om vad jag skulle kunna hitta på att göra.

Så i stället för att i första hand fråga, Hur skall jag lära ut division? Hur skall jag få mina elever att förstå fotosyntes? Hur skall jag bära mig åt för att höja deras historiska medvetenhet?, bör vi börja med att ställa frågor av typen: Vad innebär det att behärska division, att förstå fotosyntes, att vara historiskt medveten? Vad är det som är viktigast? Vad är det som tas för givet? (s 27)

Det finns all anledning att fundera över vad som hände under de här åren. För det första satsade man allt på ett kort - på den nya matematiken i kombination med undervisningsteknologin. All kritik sopades under mattan. Den fortbildning som skedde var i och för sig väl organiserad, men de idéer som bjöds ut harmonierade dåligt med såväl lärares "nedärvda intellekt" som med de flesta elevers förmåga att tänka och konkretisera viktiga begrepp. Man kan sammanfattningsvis konstatera att 1962 års kursplan byggdes upp kring nya arbetsformer och arbetssätt, vilka var politiskt dikterade men pedagogiskt dåligt förankrade och att 1969 års kursplan byggde på ett ämnesinnehåll dikterat av ämnesteoretiker som saknade pedagogisk förankring.

Mot den här bakgrunden kan man passa på att ställa en mer aktuell fråga, nämligen hur de lärare som är verksamma i dagens skola, utgående från sina erfarenheter och sitt nedärvda intellekt, uppfattar delar av Lpo 94 (Skolverket, 2000), t.ex.:

Matematiken är en viktig del av vår kultur och utbildningen skall ge eleverna insikt i ämnets historiska utveckling, betydelse och roll i vårt samhälle. (s 26)

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleven

- inser att matematiken har spelat och spelar en viktig roll i olika kulturer och verksamheter och får kännedom om historiska sammanhang där viktiga begrepp och metoder inom matematiken utvecklats och använts, ...
- utvecklar sin förmåga att förstå, föra och använda logiska resonemang. (s 26)

Tolka mig nu rätt. Jag ifrågasätter inte de här målen i sig. Vad jag undrar över är däremot vilka möjligheter dagens lärare har att, utgående från sin utbildning, undervisa om de här målen. Det är också en fråga om prioritering. Hur skall de här målen uppfattas i relation till det faktum att en allt större elevgrupp saknar baskunskaper i matematik? Följdfrågan blir givetvis hur man kan konkretisera de aktuella målen för svenska lärare och på vilken nivå och i vems regi detta skall ske. Man skall samtidigt hålla i minnet att den fortbildningsorganisation som tidigare fanns, lades ned under 1970-talet. Dessförinnan analyserade en fortbildningsavdelning tillsammans med länens fortbildningskonsulenter det nationella behovet av fortbildning och planerade därefter det stöd skolans personal kunde behöva för att tolka och genomföra nyheter i våra kursplaner. När en stor del av ansvaret för fortbildningen lades över på universitet och högskolor, tappade man den viktiga kontakt med skolor och lärare som fortbildningskonsulenterna byggt upp. Samtidigt försvann den kontinuerliga diskussion och debatt om fortbildningsfrågor som fördes på fortbildningsavdelningen och bland fortbildningskonsulenterna. Decentralisering må vara ett av politiska skäl angeläget mål, men ännu viktigare är frågan om och hur denna decentralisering skall kunna genomföras utan att undervisningen blir lidande. Det är inte alldeles enkelt för lärare, som varit vana vid centralstyrning, att på egen hand skola om sig och verka enligt en decentraliserad grundsyn. Desto viktigare blir det för lärare, skolledare och lokala skolpolitiker att veta var de kan finna adekvat hjälp med att tolka och konkretisera den här typen av mål.

SIA-utredningen och handledningen Basfärdigheter i matematik

Att förändra och demokratisera ett skolsystem är inte lätt. Även om mycket fungerade väl i den nya grundskolan, så var ännu på 1970-talet en rad viktiga problem olösta. Ett av dessa problem var den ständigt återkommande frågan om individualisering. År 1971 hände så två saker som borde ha kunnat innebära en lösning. Dels tillsattes SIA-utredningen, dels bildades en grupp som skulle arbeta med basfärdigheter i matematik.

Vad gäller SIA-utredningen så var direktiven alldeles utmärkta och väl formulerade. Så här ser några av direktiven ut:

- Den grundläggande uppgiften för de sakkunniga bör vara att pröva i vad mån nuvarande åtgärder till stöd för av olika skäl underpresterande elever hjälper dem få behållning av sin skolgång.
- De sakkunnigas arbete bör leda fram till ett programförslag med avseende på de pedagogiska förändringar och kompensatoriska åtgärder, som är nödvändiga för att de elever, som idag inte finner tillräcklig stimulans i skolarbetet skall uppleva undervisningen meningsfull.

- En bärande princip är att en organisatorisk differentiering av elever så långt möjligt skall undvikas
- De sakkunniga bör pröva hur en individuell differentiering skall kunna genomföras för grupper av underpresterande elever.

Det är uppenbart att man på utbildningsdepartementet var medveten om var de verkliga problemen låg. Nu skulle man utreda vad som gått snett och åtgärda detta. När utredningen var klar (SOU 1974:53) visade det sig emellertid att man inte hade någon lösning på någon av de ovan nämnda punkterna. Vad utredningen istället ledde till var en friare resursanvändning och en samlad skoldag, alltså förslag till en organisatorisk reform. De viktiga frågorna om vad man skulle göra för att hjälpa **underpresterande elever** och vilka **pedagogiska förändringar** som behövs för att göra **undervisningen meningsfull** "glömdes" helt bort. Varför det? Var det lättare att förändra ramarna än innehållet eller var det andra vindar som börjat blåsa?

Om situationen för de lägre presterande elever var allvarlig under grundskolans första år, så blev den än värre som en följd av den nya matematiken. Många var de lärare som uttryckte sin oro:

Man möter ofta frågor av det här slaget: Varför ändrades matematikkursen? Vilken praktisk nytta har man av mängdlära? Har vi tid att leka med laborativa material på matematiklektionerna? Är inte "den nya matematiken" mest lämpad för blivande matematiker? Behövs inte multiplikationstabellen längre? (Skolöverstyrelsen, 1973 s 4)

För att söka en lösning på dessa frågor tillsatte Skolöverstyrelsen en grupp med Olof Magne som ordförande och den var efter två år färdig med en handledning kallad *Basfärdigheter i matematik* (Skolöverstyrelsen, 1973). Handledningen består av två delar. En del där man brutit ned målen i Lgr 69 på ett sådant sätt att de blivit anpassade till vad de 15 procent lägst presterande eleverna förmodades klara av. En annan del med metodiska råd och anvisningar om hur undervisningen skulle kunna bedrivas. Vi som arbetade i gruppen var inte alltid helt eniga. Min främsta invändning var att de grundläggande premisserna var felaktiga. Det borde inte handla om att transponera kursplanens innehåll till de lägre presterande eleverna. Istället borde vi ha analyserat **vilka** vardags- och samhällskunskaper man **faktiskt behöver**. Därefter borde vi ha utarbetat och utprövat sådana matematiska modeller som befunnits rimliga och möjliga att använda för lägre presterande elever. Den grundläggande idén var ju trots allt att hjälpa den här elevgruppen att tolka och bearbeta den typen av informationer och situationer som vanligen förekommer i vardagslivet.

Den första delen av handledningen innehåller som redan nämnts mål, skrivna i undervisningsteknologisk anda. Den kan ses som ett förslag till vad man senare skulle kalla "lokal arbetsplan". Målen preciserades för skolår 3, 6 och 9, vilket innebär att det inte enbart fanns mål för skolår 9 utan även delmål (etappmål) för de två lägre stadierna. Ett exempel på en sådan målbeskrivning är:

	Moment	Huvudsakligt syfte	Exempel
Skolår 3	Tidmätning	Avläsa klockslag på en kvart när	
Skolår 6		Avläsa klockan	Avläsa timmar och mi-nuter
Skolår 9		Avläsa klockan	Eleven avläser klockan Ex. Eleven mäter tidsåtgången i samband med t.ex. skolresor, lekar, arbetsmoment
		Kunna olika sätt att beteckna klockslag	Klockan är 2 på eftermiddagen. Klockan är 14.
		Skriva och avläsa datum och årtal	26.9.1971 71 09 26

I dag är det säkert många som rynkar på näsan åt de här målbeskrivningarna och visst skulle man idag, 30 år senare, kunna skriva målen betydligt bättre. Det här sättet att skriva nationella mål på, strider idag mot de grundläggande decentraliseringsidéerna i nuvarande läroplan. I kursplanerna beskrivs målen numera enbart på en övergripande nivå. Preciseringsen skall därefter ske på lokal nivå. Dilemmat är bara, att det är just på den punkten problemet ligger. Det är inte så lätt att skriva lokala mål och resultatet blir inte alltid det bästa. För att återgå till *Basfärdigheter i matematik* så var det inte meningen att dessa mål skulle vara centralt styrande de heller. De skulle enbart ge lärare exempel på hur man kan skriva lokala mål. Så här står det i handledningen:

De innehållsanalyser av baskurser för lågpresterande elever, som presenteras ... får inte uppfattas som en beskrivning av kursinnehållet utan som ett förslag till mål för undervisningen av dessa elever. (s 5)

Jag vill i det här sammanhanget referera till DsU 1986:5, *Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet*. För att ta reda på lärarnas uppfattning om skälet till de dåliga resultat svenska 13-åringar uppvisade vid en internationell jämförelse intervjuades ett antal lärare:

Sammanfattningsvis kan konstateras att praktiskt taget samtliga tillfrågade lärare är överens om att kunskaper och färdigheter som alla elever skall besitta efter avslutad allmän respektive särskild kurs behöver preciseras bättre och att vissa moment väsentliga för fortsatta studier behöver prioriteras i grundskolan, ... (s 15)

Det här är vad lärarna ansåg (utgående från 1980-talets mer preciserade mål). Men så skall vi ju inte ha det i dagens decentraliserade skola. Där förväntas lärarna själva prioritera och precisera sina mål. Det finns emellertid all anledning att analysera detta närmare. För att eleverna skall finna en struktur och få en kontinuitet i sitt lärande så måste den grupp lärare som undervisar dessa elever från skolår F- till 12 vara överens om och kunna precisera innehåll, metoder och arbetssätt. Om inte blir ju undervisningen en ren "happening". De intervjuer vi i flera år gjort av lärare i och omkring Göteborg visar att det inte är så lätt för det enskilda lärarlaget att tolka målen i kursplanen. Den viktiga frågan är därför var någonstans på vägen från kursplanegrupp till enskild lärare en

precisering skall ske. Vem tar med andra ord ansvar för att lärare klarar av att tolka och följa målen på ett avsett sätt?

Vad hände då med baskunskapssatsningen? Under ett par år anordnades sommarkurser om baskunskaper i matematik. Ett par förlag försökte också producera läromedel utgående från målanalyserna. Tyvärr hände återigen det som så ofta händer i svensk skola. Någon annan pedagogisk idé dyker upp och så är den gamla satsningen över, oavsett om det finns behov av fortsatt satsning eller ej. I det här fallet var det främst SIA-skolan och en friare resursanvändning som tog över all uppmärksamhet. Det var i vanlig ordning enklare att förändra undervisningens ramar än dess innehåll.

Satsningen på baskunskaper är bara en i en lång rad av satsningar som kom av sig. Det är många som beklagat detta. En av dem är dåvarande generaldirektören för Skolöverstyrelsen Lennart Orehag (1982), som i ett temanummer av tidskriften *Nämnaven* (nr 2 1982/83) skriver:

Jag förmodar att alla känner till den starka betoning av *grundläggande färdigheter* som finns i Lgr 80. Knappt någon kan väl heller ha undgått att lägga märke till, att det är en uppgift för ALLA lärare att låta eleverna träna de grundläggande färdigheterna. (s 14)

Orehag tar sedan upp den lokala arbetsplanen:

Den kanske allra viktigaste delen av en *lokal arbetsplan* är därför den som redovisar, hur man ämnar arbeta för att få kontinuitet i den grundläggande färdighetsträningen. Så här står det i Lgr 80 om just detta:

'I arbetsplanen bör formuleras konkreta etappmål och anges en arbetsfördelning mellan olika lärare för att träna de grundläggande färdigheter, som är gemensamma för flera ämnen och som exempelvis innebär:

att behärska viss studieteknik
att kunna tala, läsa, skriva och räkna
... Lgr 80, s 59 '

Här vidgas begreppet grundläggande färdigheter något, men man lägger märke till att det som tas upp är *färdigheter som behövs för att inhämta mera kunskaper och färdigheter*. (s 14)

Orehag nämner därefter hur utvecklingen ofta går i vågor och hur den s.k. nya matematiken kom som en reaktion på en alltför ensidig satsning på basfärdigheter i USA. Han menar att den svenska basfärdighetsdebatten varit betydligt mer nyanserad. Om handledningen *Basfärdigheter i matematik* som kom ut 1973 skriver han:

Den innehåller mycket som fortfarande är både aktuellt och värdefullt. ... Tyvärr blev den här handledningen aldrig riktigt känd ute på skolorna I varje fall slog idéerna mycket dåligt igenom i undervisningen. (s 15)

Under rubriken "Hur går vi vidare?" menar Orehag att

... det är främst på det lokala planet som insatserna bör göras. Jag tänker då främst på att man får fram lokala arbetsplaner, som ger stadga åt den grundläggande färdighetsträningen från åk 1 till åk 9. Det är egentligen förvånande att en samordning av detta slag inte förekommit tidigare mer än i undantagsfall, trots att alla har så mycket att vinna på stadieövergripande samarbete. (s 15)

Jag undrar hur många som idag är medvetna om all den hjälp man kan få från handledningen *Basfärdigheter i matematik*. Här har man i själva verket en stomme till en lokal arbetsplan. Vad som

krävs är att den anpassas dels till nu gällande läroplan och kursplan, dels till skolans övergripande mål och dagens elever. Enligt min uppfattning kan handledningen användas som fortbildningsmaterial till hur man kan skriva en lokal arbetsplan om baskunskaper i matematik.

En viktig fråga med tanke på den nya baskunskapsatsningen är vem som bär ansvar för vad. Vilket ansvar åligger lokala skolpolitiker och vilket ansvar åligger skollädares för att säkra elevers baskunskaper i matematik? Vad Oreha g menade 1982 var att basfärdighetshandledningen inte ens blev känd ute på skolorna. Man bör givetvis utreda frågan varför? Var fastnade informationen? Oreha g efterlyste också en samordning inom skola och kommun. I viken utsträckning skedde (och sker) en adekvat utvärdering av elevernas baskunskaper i matematik och hur många skolor och kommuner var det som verkligen satsade (och satsar) på att bygga upp relevanta åtgärdsprogram? Om man sedan inte klarar av det uppdraget vem har då ansvar för att klargöra detta för ansvarig myndighet?

Lgr 80

I och med nästa läroplan, Lgr 80 (Skolöverstyrelsen, 1980), försvann alternativkurserna i matematik från kursplanen men de fanns kvar i timplanen. Den friare resursanvändning som blev en följd av SIA-utredningen ledde nu till att de resurser som gavs till en alternativkursuppdelning under några år framöver, kunde användas till att individualisera matematikundervisningen utgående från lokala behov. Det här ledde till en ganska omfattande försöksverksamhet med nivågruppering ute i landet. Jag återkommer till den senare.

Lgr 80 innebar fyra viktiga nyheter bortsett från den friare resursanvändningen:

- Kursplanen i matematik delades upp i nödvändiga och önskvärda kunskaper

Det som är nödvändigt på lågstadiet och alla bör lära sig.	Lågstadiet	Nödvändiga kunskaper
Det som är önskvärt på lågstadiet och nödvändigt för alla på mellanstadiet	Lågstadiet Mellanstadiet	Önskvärda kunskaper Nödvändiga kunskaper
Det som är önskvärt på mellanstadiet och nödvändigt för alla på högstadiet	Mellanstadiet Högstadiet	Önskvärda kunskaper Nödvändiga kunskaper
Det som är önskvärt på högstadiet är nödvändigt för framgångsrika studier på matematikintensiva gymnasielinjer	Högstadiet	Önskvärda kunskaper

(Skolöverstyrelsen, 1982 s.7)

- Man krävde att det på det lokala planet skulle utarbetas lokala arbetsplaner. Här skulle man (se citaten från Oreha g ovan) bl.a. kunna presentera en plan för hur man tänkte meddela alla elever grundläggande kunskaper i matematik.

- Problemlösning blev det första och viktigaste huvudmomentet.
- Kraven på de färdigheter som krävdes av eleverna sänktes betydligt jämfört med tidigare kursplaner.

Den sistnämnda punkten är intressant. De resultat som svenska 13-åringar uppvisade vid de internationella IEA-undersökningarna i matematik 1964 och 1980 var inte speciellt uppmuntrade för svenskt vidkommande. Det tillsattes av det skälet en s.k. "haverikommission" som skulle utreda orsakerna till detta och komma med förslag till åtgärder (DsU 1986:5). Resultatet blev att det förutom en extra studiedag i matematik för alla skolans lärare skulle satsas 12 miljoner kr per år på extra kompetensutveckling i ämnet. Som framgår av NCM:s rapport (2001:1) avbröts den här satsningen långt innan den nått alla de lärare den var avsedd för. Tog man inte de här varningssignalerna på allvar eller var de 12 miljonerna bara ett spel för galleriet?

Trots att den här satsningen avbröts (NCM 2001:1), blev resultaten på den internationella TIMMS-undersökningen (Skolverket, 1996) betydligt bättre än tidigare för våra 13-åringar. En förklaring till detta är att man bl.a. genom PUMP-projektets räknefärdighetsundersökning (Se t.ex. Kilborn, 1979) blev klar över att svenska skolelevs räknefärdigheter kvalitativt sett var betydligt sämre än man tidigare räknat med. Den främsta orsakerna till detta var att alltför många elever saknade nödvändiga förkunskaper. Jämfört med tidigare läroplaner gjordes därför i Lgr 80 en radikal förskjutning av målen i avsikt att ge lärare och elever mer tid att behandla de fyra räknesätten. Här följer en jämförelse mellan läroplanerna:

Lgr 62

Mål för årskurs 3

Skriftlig räkning: addition utan och med minnessiffra samt med högst femsiffriga termer; subtraktion, även med lån, med i allmänhet högst tresiffriga termer; multiplikation med den ena faktorn ensiffrig och den andra i allmänhet högst tresiffrig; division utan rest av högst tresiffriga tal med ensiffrig divisor, i regel ej högre än 5.

Mål för årskurs 5

Skriftlig räkning med hela tal: addition med högst åtta termer; subtraktion; multiplikation med minsta faktorn högst tvåsiffrig; division med högst tvåsiffrig divisor.

Skriftlig räkning med decimaltal: addition med högst åtta termer; subtraktion; multiplikation och division med högst tvåsiffriga heltal.

Lgr 69

Mål för lågstadiet

Algoritmer för addition, subtraktion och multiplikation.

Mål för mellanstadiet

Addition, subtraktion, multiplikation och division med icke-negativa decimaltal med tillhörande algoritmer.

Lgr 80

Lågstadiet nödvändiga kunskaper

De naturliga talen upp till 1000 behandlas i anslutning till vardagsproblem som leder till addition och subtraktion. Begreppen multiplikation och division tas upp, men behandling av algoritmerna bör anstå tills eleverna nått säkerhet i additions och subtraktionsalgoritmerna.

Lågstadiet önskvärda kunskaper = Mellanstadiet nödvändiga kunskaper

De naturliga talen utvidgas till 10 000 tal och i decimalform med i första hand två decimaler ... Repetition av tidigare inlärd algoritm och inläring av multiplikation med ena faktorn ensiffrig.

Mellanstadiet önskvärda kunskaper = Högstadiet nödvändiga kunskaper

Tidigare inlärd algoritm repeteras och multiplikationsalgoritmen utvidgas till att omfatta två flersiffriga faktorer. Säkerhet i att dividera med åtminstone ensiffrig nämnare eftersträvas.

Som framgår av de här jämförelserna så fick lärare och elever i och med Lgr 80 betydligt mera tid på sig för att bygga upp förkunskaper till, och för att arbeta med, olika moment i matematikkursen. Till detta kommer att *Skolöverstyrelsens diagnostiska uppgifter* i matematik (Skolöverstyrelsen, 1983) tillsammans med ett uppföljningsmaterial (Johnsson, Löwing och Runesson, 1985) gav lärarna möjligheter att dels diagnostisera, dels åtgärda en hel del problem på en baskunskapsnivå. Det är detta som enligt min uppfattning är den viktigaste orsaken till svenska elevers relativa framsteg vid internationella jämförelser.

I och med Lgr 80 togs ett första steg mot att decentralisera viktiga beslut inom skolan. Kursplanerna var också mindre föreskrivande än tidigare. Samtidigt insåg man att lärare kunde ha problem med att tolka kursplanerna och av det skälet skrevs ett förtydligande och exemplifierande kommentarmaterial i matematik (Skolöverstyrelsen, 1982). Det framgår klart av detta kommentarmaterial att det bara är förslag till lösningar som ges. Några speciella resurser för att underlätta genomförandet av Lgr 80 gavs däremot inte.

GEM-projektets försöksverksamhet med olika elevgrupperingar

I samband med propositionen om en ny läroplan för grundskolan (Utbildningsdepartementet, 1979) gavs ett uppdrag till Skolöverstyrelsen att genom försöksverksamhet

studera vilka elevgrupperingar som uppkommer om alternativkurserna slopas samt att så snart som möjligt utvärdera denna verksamhet och senast 1 juli 1987 inkomma med de förslag som verksamheten ger anledning till.

Projektet kom att kopplas till ett motsvarande projekt för ämnet engelska och fick namnet GEM-projektet. Uppdraget löd enligt Hellström (1987):

1. Undersöka vilka grupperingar som uppkommer om alternativkurssystemet slopas,
2. utvärdera försöksverksamheten, d.v.s. undersöka vilken typ av gruppering som ger eleverna den bästa färdighetsträningen och är positiv även ur andra synpunkter samt
3. inkomma med de förslag som försöksverksamheten ger anledning till. (s 39)

Bland landets ca 1000 högstadieskolor var 40 stycken intresserade av att delta. Detta antal reducerades efter hand till 14 försöksskolor som använde olika former av grupperingar och 6 jämförelseskolor som arbetade "som vanligt" med allmän och särskild kurs.

GEM-projektet var välkommet. Skulle man nu äntligen få slut på allt tyckande och all mytbildning kring individualisering och arbetsformer? När Marklund (1981) såg tillbaka på grundskoledebatten så skrev han så här:

Helt klart var differentieringsfrågan inte bara en pedagogisk fråga utan också en politisk fråga och en värderingsfråga. Och bakom denna låg då som nu olika människo- och samhällsuppfattningar. Där låg inte bara kunskande och vetande om individ och samhälle utan även tro och övertygelse i dessa frågor, vilka i sin tur kunde var mera emotionella och intentionella än intellektuella och rationella. Differentieringsfrågan var därmed primärt en maktfråga men sekundärt också en trosfråga eller viljefråga. Endast i tredje hand var det en fråga om vetande. Därmed hamnade även försöksverksamhetens förment objektiva och allsidiga resultatutfall i skuggan av makt-, tros- och viljefrågorna. (s 382)

Med tanke på alla de problem grundskolans matematiklärare haft med lågpresterande elever allt sedan grundskolan tillkomst och med tanke på all mytbildning kring individualiseringsfrågan, så var förväntan onekligen stor på GEM-projektets slutrapport (Hellström, 1987). Skulle man äntligen ha hittat några rimliga och utprovade modeller för att individualisera svensk matematikundervisning? Rapporten blev emellertid en stor besvikelse. Till att börja med är litteraturgenomgången i rapporten något ensidig och tillsammans med vissa inledande formuleringar får man faktiskt intrycket att projektledaren från början bestämt sig för vilket resultat som önskades. När det gäller de två första punkterna i uppdraget ges det heller inte några svar av värde. Mina kommentarer kring dessa två punkter ser ut så här:

- Det räcker inte (enligt min uppfattning) att tala om att grupperna är gula och gröna och att man på en skola kunde välja mellan teori och nyttoräkning. Det intressanta är väl lärarnas motiveringar till att välja en viss gruppering, hur de utnyttjat grupperingen för att optimera elevernas inläring samt, inte minst, vilka typer av problem de velat lösa med hjälp av grupperingen ifråga. Ännu viktigare är frågan huruvida den undervisning som bedrivs i de olika grupperna verkligen är anpassad till elevernas olika förutsättningar. Det är ju inte **var** man sitter eller **med vilka** man arbetar som är det primärt intressanta, utan om dessa ramar optimerar möjligheterna att konstruera ny kunskap. Hur löste man t.ex. lågprestationsproblem i de olika försöksskolorna och hur tog man hand om de duktigaste eleverna? Något sådant får man inte reda på.
- Inte heller får man svaret på frågan vilken typ av gruppering som ger eleverna den bästa färdighetsträningen. Det man gör är att jämföra resultaten på en provräkning med 10 uppgifter som ges först i årskurs 7 och senare i årkurs 9. Samtliga 10 uppgifter är s.k. benämnda uppgifter och kräver snarare en god läsförståelse än **färdigheter** i matematik. Det man konstaterar, efter bl.a. regressionsanalys av dessa data, är att det i **medeltal** inte föreligger några statistiskt säkerställda skillnader mellan olika grupperingar. Mer intressant hade väl varit att ta reda på huruvida man undervisat på olika sätt i olika grupper och om detta möjligen kan ha lett till att

t.ex. de 15 procent lägst eller högst presterande eleverna lyckats bättre i någon gruppering. Det var ju faktiskt några klasser som lyckades bättre än de övriga. Varför gjorde de det? Vad skiljer dessa klasser och dessa lärare från övriga klasser och lärare? Något sådant borde man väl efter tre års forskning och utvärdering ha kunna uttala sig om?

De rekommendationer man ger i GEM-rapporten vilar i mycket liten utsträckning på projektets resultat. Hur har man t.ex. kommit fram till att ”de dubbla betygen spelat ut sin roll”, ”att högsta antal elever per undervisningsgrupp för skolor som väljer att arbeta i heterogena grupper skall vara 20” eller att ”en omfattande satsning på lärarfortbildning snarast bör komma igång”. Vilken innehåll den föreslagna fortbildningen skall ha nämns för övrigt heller inte.

Man konstaterar i rapporten att lärarna var nöjda med att arbeta med sina olika typer av grupperingar. Detta är kanske inte så konstigt med tanke på att de själva valt den grupperingen. Lärarna ansåg också att både de högpresterande som de lågpresterande eleverna vinner på att arbeta i olika grupperingar. Detta gällde såväl kunskapsinhämtning som trivsel. (Jfr AK 1962:22!) Enligt min uppfattning är detta ett gott skäl för att gruppera eleverna. Att en lärare tror på och trivs med vad han/hon gör är onekligen ett nödvändigt, om än inte tillräckligt, villkor för att även eleverna skall lyckas och trivas.

Det faktum att några lärare (eller snarare deras elever) lyckades betydligt bättre än andra är ett intressant faktum som man inom GEM-projektet borde ha ägnat större uppmärksamhet åt. Varför gjorde man inte det? Ett antal år senare presenterades en sådan studie i rapporten *Rum för lärande – en studie av skickliga lärares arbete* (Skolverket, 1994). I rapporten beskrivs vad som var utmärkande för de lärare vars elever lyckas bättre än andra i ämnet svenska. Hur kunde man missa den poängen inom GEM-projektet?

Med tanke på de klena resultat man fick av GEM-projektet så kan man fråga sig varför jag över huvud taget tar upp det. Svaret är enkelt. Man har alltsedan grundskolans tillkomst lagt miljontals kronor på att stimulera olika försök kring matematikundervisning. De flesta av dessa försök har blivit dagsländor, eftersom projekten inte getts professionellt stöd och att resultaten varken efterfrågats eller följts upp. Nog borde ansvariga myndigheter och bidragsgivare ägna större uppmärksamhet åt vad det egentligen blir för resultat av alla projekt och initiativ inom skolans område.

Som en avslutning på det här avsnittet vill jag ta upp en annan fråga som förbryllat mig. Varför är man så ofta intresserad av frågor som ”vilka grupperingar som uppkommer om alternativkurssystemet slopas”? Vore det inte bättre att fråga ”**vilka möjligheter** olika grupperingar under olika villkor kan ge”? Jag menar att den här typen av passiva frågeställningar bara fördröjer en utveckling. Istället borde man väl konstruktivt undersöka möjligheterna att påskynda och stimulera en utveckling.

Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet (DsU 1986:5)

Åren 1964 och 1980 gjordes internationella undersökningar om elevers kunskaper i matematik. Medan svenska gymnasieelever på N- och T-linjerna klarade sig relativt bra vid denna jämförelse, var resultatet desto mer nedslående för elever i grundskolans årskurs 7. Regeringen satte därför till en arbetsgrupp, den s.k. "haverikommissionen" vars uppgift var att utreda orsakerna till detta.

Gruppen valde att koncentrera sig på följande områden:

- Jämförelser mellan resultat från 1964 och 1980.
- Kursplaneanalyser.
- Klasstorlek, tid för matematik i skolan och hemma, lärares undervisningstid och arbete under lektioner samt användning av miniräknare.
- Elevers attityder till matematik.
- Differentierande respektive sammanhållna undervisningssystem.
- Basfärdighetsbegreppet. (s 10)

Resultaten beskrivs kortfattat i ett antal punkter varav jag citerar de som är av störst intresse för den här artikeln:

- De svenska årkurs-7-elevernans resultat var redan 1964 internationellt sett svaga och de svenska gymnasieelevernans resultat var redan 1964 bra. Således fungerar undervisningen fortfarande väl för duktiga elever och fortfarande inte väl för elever som har sämre förmåga.
- Vad gäller algebra menar arbetsgruppen att den huvudsakliga anledningen till den stora skillnaden i resultat mellan Sverige och övriga länder står att finna kursplanens uppbyggnad. De dokumenterade bristerna i aritmetik tycks inte huvudsakligen bestå i bristande insikter i algoritmräkning utan brister i bl.a. taluppfattning, rimlighetsuppfattning, läsförståelse och begreppsbildning...
- I skolan används huvuddelen av tiden till enskild tyst räkning eller till att lyssna på läraren. Kort tid blir över till att "prata" matematik.
- Bristar som finns i svensk matematikundervisning gäller i första hand brister som drabbar de svagare eleverna. De svårigheter de har i matematik är inte i första hand ett resultat av undervisningen i årskurs 7 utan uppstår tidigare i deras skolgång.
- Ett fåtal länder har utvecklat ett fullt utbyggt basfärdighetsprogram. I de länder där man inte har ett sådant finns dock en rörelse bort från den abstrakta matematiken mot en basfärdighetsbestämning. Man har strävat efter att finna en matematikkurs vars innehåll är påtagligt användbar och meningsfull för alla. (s 11, 12)

Man kan konstatera att även den här arbetsgruppen visar på att det är de lågpresterande eleverna som utgör det stora problemet i svensk skola. Det allvarliga är att dessa elever saknar grundläggande kunskaper. De dokumenterade bristerna i aritmetik tycks enligt gruppen bero på "brister i bl.a. taluppfattning, rimlighetsuppfattning, läsförståelse och begreppsbildning". Man påpekar också att svårigheterna uppstått under tidigare skolår.

Arbetsgruppen passar också på att avfärda vissa myter, t.ex. att det inte är så noga med att kunna utföra exakta beräkningar utan att det räcker med att behärska överslagsräkning.

Av dem som ivrigast betonar matematikens roll som användbart hjälpmedel hävdas det ofta, att den mer teoretiska matematiken är onödig jämfört med tillämpningarna och att exakta beräkningar lämpligen kan ersättas med överslagsräkningar. All erfarenhet visar att givande tillämpningar endast kan göras, om man har en god kunskap i den grundläggande matematiken. På liknande sätt visar sig överslagsräkningar vara mycket svårare att lära ut än exakta räkneprocedurer. Den bästa grunden för den typ av icke exakta uppskattningar, som kallas överslagsberäkningar, tycks vara en god kunskap i exakt beräkning. (s 34)

När det gäller baskunskaper i matematik, vilket ju ändå lyftes fram som ett allvarligt problem, ger gruppen förvånansvärt lite användbar information. Frågan är ju under utredning! Jag återkommer till detta. Man påpekar däremot att basfärdighetsfrågan har påverkat kursplanarbetet i alla länder.

I första hand gäller detta följande:

- Den har skapat större medvetenhet hos lärare om behovet av repetition och träning av basfärdigheter.
- Den har skapat en tendens hos lärare att reducera kursinnehållet för de lågpresterande eleverna (jfr allmän kurs i Sverige).
- Det finns en ökande medvetenhet hos samhälle och lärare om det stora gapet mellan förväntningar och verklighet (jfr diskrepansen mellan kursplan och faktisk undervisning i årskurs 7 i Sverige).
- Basfärdighetsbegreppet har vidgats. Man talar inte bara om det icke-nödvändiga som ingår i undervisningen utan också om det nödvändiga som inte ingår i undervisningen. (s 76)

Jag har tidigare, i förbigående, nämnt den lärarenkät som genomfördes av arbetsgruppen och som visade att svenska lärare anser att de behöver få klarare besked om vad man skall undervisa om. Längre fram i rapporten kommenterar man detta så här:

I och för sig skulle det kunna vara bra med ytterligare preciseringar i läroplanen av begreppet nödvändiga kunskaper, men skäl finns att avvakta resultatet av skolöverstyrelsens arbete med baskunskaper och basfärdigheter innan förslag i denna riktning framläggs. Sådana preciseringar får inte resultera i en minikompetens som sänker det kvantitativa kursomfånget för alla elever. Vad som avses är att alla elever skall få kunskaper för att möta samhällets krav och de krav som ställs för inläring av ämnet självt och andra skolämnen till vilka matematik kan vara ett stöd. Dessutom har olika individer olika krav på matematikämnet för att kunna utvecklas efter sin förmåga. (s 269)

Den första meningen i citatet förklarar varför man inte fördjupade sig i den kanske viktigaste frågan, den om baskunskaper. Det uppdrag man åsyftar i citatet, och som man ville invänta resultatet av var:

Regeringen uppdrar åt skolöverstyrelsen att mot bakgrund av vad som anförts i 1985 års budgetproposition (prop 1984:85:100 bil 10) om nödvändigheten av att varje skola, lärare och arbetsenhet närmare preciserar de grundläggande basfärdigheter och de baskunskaper i de centrala ämnena i grundskolans läroplan som varje elev måste ha tillägnat sig på respektive stadium utarbeta underlag för sådana preciseringar. I uppdraget skall också ingå att utarbeta modeller för hur en utvärdering skall göras. Uppdraget skall redovisas senast den 1 oktober 1987.

En precisering av baskunskapsfrågan i matematik 1987 skulle kunnat betyda mycket för stressade lärare och de tiotusentals elever som under det senaste årtiondet haft problem med skolans matematikundervisning. De resultat arbetsgruppen ville vänta på kom emellertid inte 1987. Trots att även "haverikommissionen" lyfte fram det stora problemet med svenska elevers baskunskaper, dröjde det ända till 1990 innan kommentarmaterialet *Om grundläggande kunskaper och färdigheter* (Skolöverstyrelsen, 1990) kom. Kanske uppfattade Skolöverstyrelsen inte det här uppdraget som speciellt viktigt, eftersom man i elfte timman lät det bli en enmansutredning? När allt kom till kritan så innehöll inte handledningen så mycket av värde, åtminstone inte vad gäller baskunskaper i matematik. Istället för att precisera de kunskaper och färdigheter varje elev måste ha tillägnat sig på respektive stadium, ger rapporten enbart en sammanfattning av vad som redan står i Lgr 80 med kommentarmaterial, samt några citat från ett par böcker. Någon precisering av vad baskunskaper är eller några råd till de lärare som har problem med att undervisa om baskunskaper ges inte. Året därpå var Skolöverstyrelsen nedlagd.

Som en följd av en kris inom svensk matematikundervisning tillsattes alltså en grupp som redovisade sina resultat 1986. Gruppen gav en rad intressanta förslag till hur matematikundervisningen borde förändras. Märklig nog ser man få spår av dessa förslag i Lpo 94. Ett av de viktigaste problemen, det som gäller lågpresterande elever, fördjupade man sig inte i över huvud taget eftersom det fanns ett speciellt uppdrag att utreda detta. Detta senare uppdrag utmynnade (liksom GEM-projektet) i ett enda "jaså". Efter att ha konstaterat detta vill jag jämföra "haverikommissionens" resultat med motsvarande förslag i *Lusten att lära*. (Skolverket, 2003). Man finner då att alla de problem gruppen lyfte fram kvarstår. Återigen finns det anledning att ställa frågorna "Varför?" och "Tog ansvariga myndigheter inte haverikommissionens rapport på allvar?".

Det nya uppdraget

Jag har nu ägnat stort utrymme åt att beskriva varför vi i Sverige, trots den höga prioritet frågan alltid getts i våra läroplaner, ännu inte har kommit tillrätta med det viktiga baskunskapsproblemet. Trots att behovet av en lösning är och hela tiden har varit stort och trots att det vid upprepade tillfällen funnits ambitioner att lösa problemet, så är problemet idag lika stort och olöst som tidigare. Nu har vi i och med regeringsbeslutet U200/3873/S fått en ny chans att komma tillrätta med baskunskapsproblemet. Uppdraget till Statens skolverk är:

Skolverket skall under åren 2001 och 2002 genomföra en särskild satsning på basfärdigheter, d.v.s. att läsa, skriva och räkna. Särskild uppmärksamhet skall ges grundskolans tidiga år.

Det här betyder att svensk skola har fått en ny chans att åstadkomma reell skoldemokrati, d.v.s. en rimlig och meningsfull undervisning även åt de elever som av olika skäl har problem med att tillgodogöra sig undervisningen i matematik. Detta var som tidigare nämnts ett av skolkommissionens viktigaste mål. Nu är det dags att ta lärdom av alla tidigare misstag och se till

att det skapas praktiskt tillämpbara och långsiktigt hållbara lösningar på baskunskapsproblemet. Det får inte än en gång bli så att baskunskapsfrågan prioriteras bort eller hamnar i bakvattnet till någon ny politisk/pedagogisk innovation.

Om jag, utgående från mina erfarenheter, får ge några råd inför en ny baskunskapssatsning så blir det:

- De som skriver kursplaner och sätter politiska mål lyssnar på lärarna och försöker förstå deras arbetssituation. Det är ju faktiskt lärarna som skall genomföra undervisningen av baskunskaper. Om lärarna anser att de behöver mer preciserade mål och metodiska exempel, för att kunna genomföra undervisningen så bör man väl lyssna på det? Varför utgå från att de kommer att missbruka detta och slaviskt följa exemplen. Det är ju att underkänna en helyrkesgrupps kompetens och förmåga till självständigt tänkande. Och om en hel yrkeskår verkligen vore så inkompetent, så är det väl inte målen och exemplen det är fel på. Då måste det bero på att fundamentala misstag görs i skolornas planering eller vid utbildning och fortbildning av lärare och då är det väl det man måste ta tag i?
- Till pedagoger, lärarutbildare och läromedelsförfattare vill jag ge rådet att undvika polariseringar såsom att färdighetsträning är något förlegat, nu skall det satsas på begrepp och förståelse. Jag menar att förståelse och färdighet är intimt sammankopplade. Förståelse utan färdighet är lika oanvändbar som färdighet utan förståelse. Det är väl t.o.m. så att en väl planerad färdighetsträning ger en fördjupad förståelse. Genom att se kunskapen som en syntes av *kompetens och färdighet* (se t.ex. Kilborn, 1983, Löwing och Kilborn, 2002 och Löwing 2002) kan man i själva verket finna enkla modeller för en individualisering på baskunskapsnivå.
- Baskunskaper i matematik handlar till viss del om den matematik man behöver som samhällsmedborgare och under sin vardag och fritid. En stor del av dessa kunskaper är emellertid unika för varje lands kultur. Det går därför inte att (som man t.ex. gjorde med den nya matematiken eller divisionsalgoritmen) direkt överföra idéer från andra länder, t.ex. från USA. Böcker som Stigler & Hiebert (1999) och Ma (1999) visar på ett tydligt sätt hur stora skillnaderna kan vara mellan undervisningskulturerna i olika länder. Det gäller därför att anpassa mål, metoder och tillhörande fortbildning till den egna lärarkårens nedärvda intellekt.
- Mål, metoder och fortbildning måste vara så väl utprovade att de är trovärdiga och fungerar. Dessutom måste det pedagogiska språk som används och de idéer som presenteras vara av ett sådant slag att det kan uppfattas av vanliga lärare. När James Hiebert var i Sverige och berättade om Stigler & Hiebert (1999), betonade han vikten av att uppmärksamma skillnaden mellan de utvecklingsarbeten som sker inom forskarvärlden och vad av detta som kommer skolorna tillgodo. Han nämnde vilken chock det blev när han och hans kolleger förstod hur lite av de senaste decenniernas skolforskning som gett någon observerbar effekt på skolans undervisning.

- Det är inte alltid så lyckat att låta alla blommor blomma. I skolan, liksom i naturen, är det inte alltid de värdefulla blommorna som överlever. Självklart är det viktigt med en mångsidig och öppen pedagogisk debatt, men lika självklart leder en alltför vildvuxen blandning av teorier enbart till teorilöshet. Om man såsom vid "den särskilda satsningen" eller vid "kompletteringsfortbildningen" skall låta alla uttrycka sin åsikter, så bör man därför se till att ordna de pedagogiska blomstren i rabatter på ett sådant sätt att lärarna ser övergripande poänger och inte bara väljer ut idéer som är kul för stunden. Det måste ur elevernas synvinkel ges en kontinuitet i inlärnigen från förskoleklassen till sista året i gymnasieskolan.
- Det är inte någon speciell grupp av lärare som ensam bär skulden till dagens problem. Jag vänder mig alltså emot uttalanden såsom "haverikommissionens" att "De svårigheter de har i matematik är inte i första hand ett resultat av undervisningen i årskurs 7 utan uppstår tidigare i deras skolgång". Man får av detta intrycket att lärare i de lägre årskurserna skulle göra ett sämre arbete än lärare på högre årskurser. Vad det snarare handlar om är att de olika lärargrupperna ofta är omedvetna om varandras kompetens och arbetssätt. Detta blir ännu mer accentuerat genom de olika lärarkulturer som blev en följd av tidigare lärarutbildningstraditioner. Det blir därför viktigt att i den nya baskunskapsatsningen verka för att en bättre samverkan mellan olika lärargrupper kommer till stånd. Detta görs bl.a. via en lokal arbetsplan.
- De som arbetar med lärarutbildning och lärarfortbildning har, liksom alla läromedelsförfattare, ett stort ansvar för att en baskunskapsatsning leder till en förändring på elevnivå. En viktig uppgift blir därför att analysera, tolka, debattera och exemplifiera nya direktiv och idéer på sådant sätt att de blir till effektiva verktyg i händerna på landets lärare. Inom lärarutbildningen, speciellt inom speciallärarutbildningen, bör det finnas obligatoriska kurser på minst 10 poäng ägnade åt baskunskapsproblemen. Detta gäller inte minst för utbildningen till gymnasie-lärare.
- Redan av Lpo 94 framgår det att den enskilde läraren har ett ansvar för att alla elever skall tillägna sig baskunskaper (grundläggande kunskaper) i matematik. Samtidigt måste man vara medveten om dagens politiska spelregler. Man kan inte förvänta sig att Skolverket eller någon annan myndighet kommer att föreskriva vad som skall göras. Alla lärare måste därför aktivt och på egen hand söka efter kunskaper inom området, t.ex. i form av fortbildning, studiecirkel och litteratur. Det är rektors ansvar att se till att detta sker. Samtidigt är det mycket som krävs för att undervisningen om baskunskaper skall fungera. Det måste finnas adekvata diagnoser, en långsiktigt hållbar arbetsplan, kunskaper om hur man kan strukturera och konkretisera ämnesinnehållet samt hur man utvärderar och kvalitetssäkrar undervisningen om baskunskaper. (Se t.ex. Löwing & Kilborn, 2001). Eftersom detta kräver stor kunskap kanske man inte kan lösa problemet på egen hand i arbetslaget. Det krävs sannolikt att flera skolor eller kommuner samverkar.

- Till sist. Se nu till att den här satsningen inte avbryts efter något år. Detta gäller i lika hög grad för den enskilde läraren som för Skolverket. Se istället till att det startas en kontinuerlig försöksverksamhet och en metodutveckling kring baskunskaper i matematik. Det vore tråkigt om ett arbete som görs på 2000-talet skulle leda till en fastlåsnings av undervisningen i ytterligare 10–20 år eller att man efter denna tid måste börja om från början igen – såsom vi nu fått göra i 40 år. Se också till att satsningen inte bara ger akademiska poäng för lärarens kompetensutveckling utan att budskapet också når eleverna. Här har NCM och lärarutbildningarna en viktig funktion att fylla.

Referenser

- AK 1962:22. *Andra kammarens protokoll* Stockholm: Riksdagens protokoll.
- Bruner, Jerome S. (1970). *Undervisningsprocessen*. Lund: Gleerups.
- Carlgren, Ingrid & Marton, Ference. (2000). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundets förlag.
- Dahllöf, Urban (1971). *Ability grouping, content validity and curriculum process analysis*. New York: Teachers College press.
- Dahllöf, Urban (1967). *Skoldifferentiering och undervisningsförlopp*. Stockholm: Almqvist & Wiksell/Gebbers förlag AB.
- DsU 1986:5. *Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Hellström, Leif (1987). *Olika lika. Försök att hantera differentieringens problem i matematikundervisningen på högskolan. Slutrapport från GEM-projektet*. Pedagogisk-psykologiska problem nr 477. Malmö: Institutionen för pedagogik.
- Johnsson, Karin, Löwing Madeleine & Runesson, Ulla (1985). *För din räkning*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Kilborn, Wiggo (1974). Individualiserad matematikundervisning. *Forskning om utbildning nr 3 1974*. Stockholm: Liber.
- Kilborn, Wiggo (1979). *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter*. (FoU-rapport 37). Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Kilborn, Wiggo (1982). Är läromedlen den verkliga läroplanen? I U.P. Lundgren, G Svingby & E. Wallin (Red.), *Läroplaner och läromedel. En konferensrapport*. Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.
- Kilborn, Wiggo (1983). *Vad vet fröken om baskunskaper?* Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilborn, Wiggo, Johansson, Bengt & Lundin, Olle (1977) *Läromedlens uppbyggnad*. PUMP-projektet nr 14. Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Kilborn, Wiggo, Lundberg, Svante, Selander, Staffan & Öhlund, Ulf (1977) *Hej läroplan! Hur man bestämmer vad våra barn skall lära sig i matematik*. PUMP-projektet nr 15. Göteborg: Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Kilborn, Wiggo & Lundgren Ulf P. (1974). *Försök med friare resursanvändning*. Göteborg: Göteborgs universitet. Pedagogiska institutionen.
- Larsson, Inger (Red.) (1972). *Individualiserad matematikundervisning*. En bok om IMU-projektet. Pedagogisk orientering och debatt nr 43. Malmö: Hermods.
- Larsson, Inger (1973). *Individualized Mathematics Teaching*. Akademisk avhandling. Lund: CWK Gleerup.
- Lindström, Sven (1968). *Överteoretisering av den elementära matematikundervisningen*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Löwing, Madeline & Kilborn Wiggo (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.
- Löwing, Madeleine (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning*. Göteborg: Göteborgs universitet. Institutionen för pedagogik och didaktik.
- Ma, Liping (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahawa NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marklund, Sixten (1980). *Från reform till reform. Skolsverige 1950–1975*. Del 1. Stockholm: Liber UtbildningsFörlaget.
- Marklund, Sixten (1981). *Från reform till reform. Skolsverige 1950–1975*. Del 2. Stockholm: Liber UtbildningsFörlaget.
- Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM (2001). *Hög tid för matematik*. Göteborg: NCM.
- Nämndaren nr 2 1981/82 s 10-11. *Vad är individualisering?*
- Orehag, Lennart (1982). Skolans exklusiva ansvar. *Nämndaren* nr. 2 1982/83 s 14–16.

- Skolverket (1994). *Rum för lärande – en studie av skickliga lärares arbete*. Rapport nr. 71. Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (1996). *TIMMS. Svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport nr. 114.) Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (2000). *Grundskolan. Kursplaner och betygskriterier 2000*. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2001). *Barnomsorg och skola i siffror. del 1. Betyg och utbildningsresultat*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2001). *Utan fullständiga betyg*. Rapport nr. 202. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolöverstyrelsen (1962). *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Kungl. Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen (1969 a). *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen (1969 b). *Läroplan för grundskolan II. Supplement Matematik*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Skolöverstyrelsen (1969 c). *Matematik NU för lärare på låg och mellanstadiet. Δ-projektet*. Malmö: Hermods.
- Skolöverstyrelsen (1969 d). *Matematik NU för lärare på högstadiet. Δ-projektet*. Malmö: Hermods.
- Skolöverstyrelsen (1980). *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Skolöverstyrelsen (1982). *Att räkna. Kommentarmaterial till Lgr 80*. Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Skolöverstyrelsens diagnostisk uppgifter i matematik. (1983). Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
- Skolöverstyrelsens handledningar (1973). *Basfärdigheter i matematik*. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- SOU 1948:27. *Förslag till riktlinjer för det svenska skolväsendets utveckling*. 1946 års skolkommision. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- SOU 1960:30. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- SOU 1974:53. *Skolans arbetsmiljö*. Betänkande avgivet av Utredningen om skolans inre arbete – SIA. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- SOU 1977:108. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Stigler, James W., & Hiebert, James (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.
- Svensson, Nils-Erik (1962). *Ability grouping and scholastic achievement. Report on a five-year follow-up study in Stockholm*. Akad. avh. Stockholm Studies in Educational Psychology 5. Uppsala: Almqvist & Wiksell.
- U2000/3873/S. Uppdrag till Statens skolverk avseende stöd till utveckling av förskola, skola och vuxenutbildning m. m. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Utbildningsdepartementet. (1979). *Regeringsbeslut angående uppdrag till SÖ med anledning av prop 1978/97:181 om läroplan för grundskolan m.m.* Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Utbildningsdepartementet. (1998). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet*. Lpo 94. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Öreberg, Curt (1964) *Individualiserad matematikundervisning. Rapport från ett pågående försök*. Pedagogisk-psykologiska problem nr 8. Malmö: Pedagogisk-psykologiska institutionen.

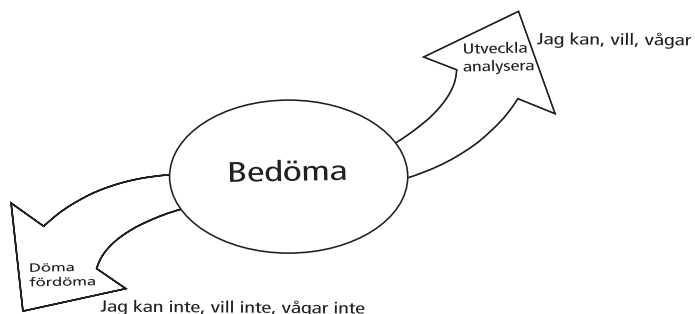
III. Bedömning och betygssättning

En betydelsefull faktor för matematiklärande är återkoppling och bedömning, det gäller både produkt- och processaspekter. De stora förändringarna i läroplaner och kursplaner sedan 1994 har lett till behov av mer komplicerade instrument för betygssättning och bedömning på nationell nivå, diagnostiska materiel, ämnesprov, kursprov och analysinstrument för olika åldrar. Arbetet med lokal, nationell och internationell utvärdering exemplifieras i detta kapitel. Likheter och skillnader diskuteras och baskunnande behandlas i ett bedömningsperspektiv.

Bedömning i lärandets tjänst

Människor lär sig på många olika sätt. En effektiv lärandemiljö utmärks av att det är god balans mellan olika arbetssätt, mellan elevens eget utforskande och kunskapssökande och en god och systematisk undervisning och handledning. Att eleven arbetar med uppgifter som är så autentiska som möjligt och att det de lär sig känns meningsfullt för dem är viktigt (de Corte, 2000). Isolerade kunskapsfragment glöms snabbt, medan kunskaper satta i ett sammanhang är mer beständiga. Snabb feedback är speciellt viktig när eleven arbetar med begreppsbyggnad, där risken för missuppfattningar kan vara stor. Att utforska sammanhang och lösa tankemässiga konflikter, involverar eleven i olika reflekterande aktiviteter, som stärker lärandet (Brekke & Gjone, 2001).

Lärandet är alltså beroende av olika faktorer men också på hur och på vad man blir bedömd. Men vi vet bl.a. från vår egen erfarenhet att det inte var all undervisning och bedömning som stimulerade och var stödjande för vårt lärande. Bedömning är en ständig följeslagare till undervisning. De flesta elevers vardag är fylld med att ständigt bli bedömda. Bedömning är inte bara ett "kvitto" utan den påverkar också den enskildes lärande, tilltro till sig själv och sina kunskaper. Bedömning, relevant tillämpad, kan ha en hög lärandepotential. Men vad innebär bedömning för den enskilde? Konsekvenserna av bedömning kan illustreras med följande figur:



En bedömning som stödjer och stimulerar lärandet innebär att elevens kunskande analyseras och värderas så att eleven utvecklas i sitt lärande och känner tilltro till sin egen förmåga (jag kan, vill, vågar). I stället för en bedömning som leder till en dom och kanske till ett fördömande (jag kan inte, vill inte, vågar inte).

En effektiv lärandemiljö utmärks alltså av stor flexibilitet både vad gäller undervisning och bedömning. En konsekvens av detta är att även bedömningsinstrumenten måste utmärkas av stor flexibilitet. Det är då viktigt att eleverna ställs i olika situationer så att de får visa sin kompetens på olika sätt. Bedömningen måste vara såväl kvantitativ som kvalitativ.

Bedömning av elevers kunskaper i matematik har ofta varit kvantitativ. Antingen har en lösning varit rätt eller fel och resultatet har tidigare bara räknats i antal rätt. Sambandet ”ju fler rätt desto duktigare i matematik” har varit rådande. Denna praxis har fått olyckliga konsekvenser. Marklund (1975) beskriver det så här:

Det torde inte råda något tvivel om att matematik idag är ett av de starkast differentierande ämnena i skolan. Det är därmed också sannolikt ett av de ämnen som bidrar till den sociala skiktningen i dagens samhälle. Den enskilde elevens upplevelse av framgång och misslyckande i skolan, av personligt egenvärde och personlig tillfredsställelse avgörs icke i ringa grad av vad som händer i ämnet matematik. I få ämnen och i få prestationssammanhang ses rangordningen av individer och uppdelningen av resultat i bättre och sämre, högre och lägre, som mer självklara än i matematik. Den enskilde individen påverkas starkt av hans eller hennes upplevelser av matematikundervisningen och matematikstudier i dagens skola (s 54).

Den nuvarande bedömningen vid bl.a. nationellt utarbetade prov är influerad av förarbetet till läroplanen från 1994, Lpo 94. I ”*Skola för bildning*” framställs skillnaden mellan kunskapsförmedling och kunskapande på följande sätt:

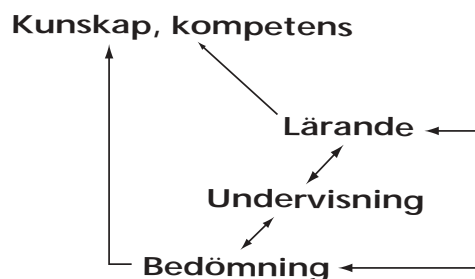
All kunskapsförmedling oavsett om det gäller fakta, färdighet, förståelse eller förtrogenhet har någon form av facit att jämföra sig med. När det gäller kunskapandet däremot är det arbetet som är målet, förmågan att formulera och utveckla problem och komma till slutsatser. Den omfattar såväl färdigheter – att formulera sig, att använda kunskapskällor, att sammanställa, att göra beräkningar etc. – som förtrogenhet, vilken kommer till uttryck t ex genom förmåga till riktiga bedömningar i kunskapandets olika skeenden (SOU 1992:94, s 67).

Både läroplanen för grundskolan och den gymnasiala utbildningen betonar vikten av att allsidigt utvärdera elevernas kunskaper och kunskapsutveckling.

Gipps (1994, 2001) har beskrivit utvecklingen från produktbedömning till processbedömning. Gipps använder pedagogisk bedömning brett. Den innefattar en bred uppsättning metoder för att pröva, mäta och värdera elevers prestationer. Den innefattar också elevernas bedömning av sig själva, av sina kamrater och av undervisningssituationen. Hon menar att denna förändring av bedömningens praxis speglar en förändrad kunskapssyn. Kunskapen konstrueras aktivt av den lärande, den mottas inte passivt. De individuella konstruktionerna sker i social interaktion med andra. Genom kommunikation med andra kommer individen att modifiera sina tolkningar och denna interaktion ses som en katalysator för självständig kunskapsutveckling. Gipps argumenterar för att de studerande är aktiva i bedömningsprocessen. Utgångspunkten är att se den studerande som ansvarig för sitt eget lärande och därmed som en deltagare i bedömningen. Det är viktigt att

utveckla en bedömning som fokuserar dels kvalitativa beskrivningar av den lärandes lärprocess (processbedömning), dels kvantitativ information (produktbedömning). Processbedömningen används för att främja individens konstruktion av kunskap och produktbedömning används för att tillfredsställa samhällets krav på information. Gipps (2001) visar att bedömning spelat och spelar en nyckelroll i ett samhälles kulturella reproduktion och sociala stratifiering. Den första mer officiella bedömningen utvecklades i Kina mellan 206 f.Kr. och 220 e.Kr. för att användas som urval till anställningar av byråkrater. Jesuiterna införde examination i sina skolor på 1600-talet och det var först på 1700- och 1800-talen som examination användes i Nordeuropa.

Bedömning kan alltså ses i huvudsak ur två perspektiv. Ett är produktperspektivet, att avgöra vilka kunskaper och vilken nivå kunskaperna ligger på hos en enskild individ eller grupp av individer vid ett visst tillfälle, nivå antingen i förhållande till uppsatta mål/kriterier eller till andra elever. Ett annat är processperspektivet, att betrakta bedömning som en del i en enskild individs lärande (Erickson & Börjesson, 2001). Processperspektivet är formativt till skillnad från produktperspektivet som är summativt. Det har visat sig att den formativa bedömningen kan ha stora effekter på en persons lärande (Black, 2001).



Figuren försöker illustrera dessa två perspektiv. Den vänstra, med pilen direkt från bedömning till kunskap och kompetens, illustrerar produktbedömning. Exempel på produktbedömning är högskoleprovet och körkortsprovet. Den högra delen av figuren, med en pil som går från bedömning via undervisning och lärande till kunskap och kompetens, illustrerar processbedömning, där hänsyn tas till bedömning av den lärandes lärprocess. Exempel på en sådan bedömning är lärarnas kontinuerliga iakttagelser och dokumentation av elevers kunskapsutveckling. Som hjälp för detta finns exempelvis diagnostiska uppgifter och analyschema (Skolverket, 2000, 2003).

Det är viktigt att se bedömning ur dessa två perspektiv och bedömningens betydelse för en individs lärande. Regeringen skriver i sin utvecklingsplan (1996/97:112, sid 106):

Den kunskapssyn som läroplanerna anger och som uttrycks på olika sätt i kursplanerna och betygskriterierna ger helt nya förutsättningar för utvärdering av kunskaper. Provuppgifterna kan inte längre vara "enkla" mått av traditionellt slag. De måste också analysera vad de som fått en viss utbildning kan göra snarare än att redovisa minneskunskaper. De bör ha en inriktning mot problemlösning, tillämpningar och kombinationer av olika kunskapsområden. Inlärningsresultat visar sig mer som övergripande kompetenser och attityder än som faktaredovisningar. Det gäller i högsta grad läroplanernas mål och värdegrund men också ämnesmålen i kursplanerna. Detta kräver nya sätt att ta fram underlag och analysera inlärningsresultat.

Det gäller alltså att sträva mot **att göra det väsentliga bedömbart och inte det enkelt mätbara till det väsentligaste.**

Det är viktigt att eleverna får visa sitt kunnande på så många olika sätt som möjligt. Alla dessa sätt kan inte rymmas i vare sig nationella prov eller kommunala utvärderingar. I samband med de nationella proven betonas åter och åter igen att det inte finns något som kan ersätta den professionella lärarens iakttagelser och erfarenheter vid bedömning av enskilda elevers kunnande. I det nuvarande bedömningssystemet måste läraren på ett helt annat sätt än tidigare kunna bedöma kvaliteter i elevernas kunnande och att verbalisera sin bedömning. Detta arbete måste göras omsorgsfullt och kräver både kompetens och mycket tid.

Olika instrument för bedömning och betygssättning på nationell nivå

På nationell nivå finns diagnostiska material och ämnesprov för grundskolan och kursprov för den gymnasiala utbildningen. Dessa material ska genomsyras av läroplanens kunskapssyn och kursplanens ämnessyn och finns i ett mål- och kunskapsrelaterat bedömningssystem. Tidigare fanns standardprov för grundskolan och centrala prov för gymnasieskolan som var utarbetade i ett relativt betygssystem. Detta kapitel kommer att lägga tonvikt vid standardprovet och ämnesprovet för skolår 9 för att det är de två prov som tydligast visar skillnaden mellan det gamla och det nya bedömningssystemen. Därefter beskrivs mer översiktligt de diagnostiska materialen och ämnesprovet för skolår 5. Standardprovet var mer en produktbedömning än vad ämnesprovet är. De diagnostiska materialens funktion är processbedömning genom att de mer kan vara ett hjälpmedel för att följa och främja den enskilde elevens lärande.

För att få en bild av elevers kunskaper på nationell nivå har nationella utvärderingar genomförts i matematik vid tre tillfällen 1989 (årskurs 2 och 5), 1992 (årskurs 5 och 9), 1995 (årskurs 5 och 9). Våren 2003 genomförs den fjärde nationella utvärderingen i matematik och då i skolår 5 och 9 och är i huvudsak en repetition av 1992 års utvärdering. De nationella utvärderingarna visar på en svag försämring i elevernas prestationer, såväl för elvaåringarna mellan 1992 och 1995, som för femtonåringarna mellan 1992 och 1995. (Ek, Murray & Pettersson, 1999).

Standardprovet för årskurs 9

Före nuvarande läroplan (Lpo 94) användes standardprov i åk 9 i matematik. Avsikten med standardprovet var att åstadkomma största möjliga likformighet i betygssättningen i hela landet. Genom provet fick läraren information om undervisningsgruppens genomsnittliga nivå och spridning i förhållande till hela riket. Den information om gruppen som standardprovet gav skulle sedan jämföras med lärarens bedömning av elevernas prestationer. Proven var under perioden 1989–1997 obligatoriska. Provet skulle alltså hjälpa läraren att bestämma nivån och spridningen för den enskilda klassen i förhållande till övriga klasser i landet. Standardprovet gav information om undervisningsgruppens standard, d.v.s. ungefär hur många elever i klassen som borde ha betyget

tre och hur många elever som borde ha ett högre respektive lägre betyg än 3. Däremot upplyste standardprovsresultaten inte om vilka elever som skulle ha det ena eller andra betyget. Detta avgjordes av läraren på grundval av elevernas samtliga prestationer i ämnet. När den enskilde elevens betyg skulle bestämmas skulle elevens resultat på standardprovet tillmätas samma vikt som varje annat obligatoriskt prov som eleven genomfört.

Standardprovet användes i det relativa betygssystemet. Ett relativt betygssystem innebär att kunskaper hos samtliga elever som tillhör en viss årskull och läser samma kurs jämförs med varandra. Standardprovet konstruerades efter noggranna analyser av läroplan och kursplaner. Det var framförallt tre krav som var viktiga att upprätthålla (Ljung, 1962). Ett av dessa var att proven skulle vara objektiva i den meningen att lärare skulle rätta elevernas lösningar på exakt samma sätt. Ett annat viktigt krav var att uppgifterna skulle vara utprovade och analyserade, så att provet fungerade enligt sitt syfte. För att standardprovet skulle vara till hjälp för läraren vid betygssättningen av en klass, måste provuppgifterna bland annat analyseras ifråga om olika kvaliteter. Det var framförallt två egenskaper hos uppgifterna som man i detta sammanhang tog hänsyn till, dels uppgifternas svårighetsgrad, dels uppgifternas särskiljande förmåga (diskriminationsförmåga). Svårighetsgraden uttrycks genom den andel elever som löst uppgiften korrekt. Uppgiftens särskiljande förmåga kan uttryckas på olika sätt. Ett sätt är att jämföra hur elever med olika betyg har löst uppgiften. En god särskiljande förmåga innebär i detta sammanhang, att en större andel elever med högre betyg ska ha löst uppgiften rätt jämfört med elever med lägre betyg. Ett annat sätt att uttrycka en uppgifts särskiljande förmåga är att jämföra medelvärdet på provet totalt för dem som svarat rätt på uppgiften med medelvärdet totalt för dem som svarat fel. Uppgiften har särskiljande förmåga om elever som svarat rätt på uppgiften har ett högre medelvärde på provet än de som svarat fel på uppgiften. Ju större medelvärdesdifferens, desto bättre särskiljande förmåga. Ett tredje krav var att standardprovet skulle vara normerat, d.v.s. ett representativt urval av elevers resultat överfördes till normtabeller som gav resultatfördelningar som överensstämde med en normalfördelning. Elevernas lösningar bedömdes med hjälp av poäng. En negativ poängsättning tillämpades, d.v.s. eleverna fick poängavdrag för fel och brister i sina lösningar.

Ämnesprovet för skolår 9

Vi har nu, i och med den nuvarande läroplanen (Lpo 94), ett mål- och kunskapsrelaterat betygssystem, där normalfördelning vare sig är utgångspunkten eller tillämplig. Elevernas kunskaper ska inte jämföras med varandra utan de ska jämföras med mål och kriterier. Undervisningen ska planeras utifrån målen att sträva mot och alla elever ska ha nått målen att uppnå för skolår 5 respektive 9. För skolår 9 ska målen att uppnå vara utgångspunkt för betyget Godkänd. För betyget Väl Godkänd har alltid funnits nationellt utarbetade kriterier. För betyget Mycket Väl Godkänd fanns tidigare endast lokalt utarbetade kriterier, men numera finns nationellt utarbetade kriterier också för detta betyg.

Som ett stöd för läraren vid betygssättningen i grundskolan ställs fr.o.m. 1998 ämnesprov till förfogande. Ämnesproven ska hjälpa läraren att bedöma om/hur väl enskilda elever nått målen för respektive ämne. Ett annat syfte är att ämnesproven ska bidra till en likvärdig bedömning över landet och ge stöd för betygssättningen. Ämnesprovets roll vid bedömning och betygssättning av en elev ska ses mot bakgrund av vad som står i läroplanens mål och riktlinjer. I kapitel 2.7 Bedömning och betyg i Lpo 94 står bland annat att läraren ska

- utifrån kursplanernas krav allsidigt utvärdera varje elevs kunskapsutveckling...
- vid betygssättningen utnyttja all tillgänglig information om elevens kunskaper i förhållande till kraven i kursplanen och göra en allsidig bedömning av dessa kunskaper.

Ett nationellt ämnesprov är en del i lärarens totala bedömning av elevernas kunskaper. Nationella prov ger provbetyg – läraren sätter sedan slutbetyg i ämnet baserat på elevens samlade prestationer. Med ämnesprovet kan läraren inte bestämma någon nivå för sin klass i jämförelse med andra klasser i landet.

Utgångspunkten för provkonstruktionen är läroplanens kunskapssyn och kursplanens ämnessyn. I läroplanen liksom i skollag och i betänkandet som låg till grund för läroplanen (SOU 1992: 94) betonas en samlad syn på elevers kunskapsutveckling. Följande framhålls som väsentligt för eleverna att kunna: Kunskaper som är beständiga över tiden; Att kunna orientera sig i en komplex verklighet med ett mycket stort informationsflöde; Förmåga att själva hantera informations- och kunskapskällor; Att kritiskt kunna granska fakta och förhållanden och inse konsekvenserna av olika handlingar och beslut; Att reflektera över problem – och efterhand utveckla ett alltmer vetenskapligt förhållningssätt. Betänkandet och läroplanen betonar den kunskapande processen: En konsekvens av formuleringarna i läroplanen är att eleverna ska få möjlighet att visa sina kunskaper på olika sätt. En viktig bas vid utarbetandet av de nationella proven är naturligtvis den utveckling som skett och för närvarande sker inom matematikundervisningen liksom den internationella och nationella forskningen inom området. Länder som Australien och Nederländerna har i sina prov mer gått in för större produktiva uppgifter, s.k. autentiska uppgifter. Det finns olika skäl till detta (Wiliam, 1994). De autentiska uppgifterna representerar bättre än andra typer av uppgifter den matematiska kompetensen. Man anser att man bättre kan förutsäga framgång i högre studier med de autentiska uppgifterna. Ett undersökande arbetssätt utgör en viktig del av matematikämnet och autentiska uppgifter i prov uppmuntrar lärarna att arbeta på motsvarande sätt (de Lange, 1992). Mot bakgrund av läroplan, kursplan, nationell och internationell forskning utarbetas ett provmaterial där eleverna får möjlighet att visa sin förmåga att systematisera, att skapa matematiska modeller, att formulera och pröva antaganden, att föra matematiska resonemang samt att dra slutsatser.

Proven ska konstrueras utifrån tolkningar av kunskapssyn, ämnessyn och kriterier samt utifrån saklogiska resonemang. Därför ingår som en viktig del i provkonstruktionen att ha uppgifter som svarar mot olika innehåll i matematikämnet. Ett krav på uppgiftsmaterialet är att det ska ge möjlighet för eleverna att visa olika kvaliteter i sitt kunnande. Vid bedömningen av elevernas

lösningar används både aspektbedömning och positiv poängsättning. Med positiv poängsättning menas att eleven får poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för deras brister.

För att tydliggöra de kvalitativa nivåer som finns uttryckta i betygskriterierna används fr.o.m. 2001 vid bedömningen g-poäng och/eller vg-poäng. g-poäng kan kopplas till målen att uppnå för skolår 9 och vg-poäng kan kopplas till VG- och/eller MVG-kriterier. Provet innehåller även uppgifter som är av mer undersökande, omfattande och öppen karaktär och som ger utrymme för olika angreppssätt. Dessa uppgifter är utformade så att alla ska kunna lösa delar av uppgiften, men det finns också möjlighet att visa MVG-kvalitet i lösningen, som exempelvis att använda generella strategier vid planeringen och genomförandet av en lösning, att analysera resultatet, att utveckla problemställningar, att visa säkerhet i sina beräkningar och sitt problemlösningsarbete, att redovisa strukturerat med korrekt matematiskt språk.

Bedömningen av de mer omfattande uppgifterna görs ur tre aspekter, nämligen förståelse och metod, genomförande och analys, samt redovisning och matematiskt språk. Aspekter och beskrivningar är hämtade från kursplan och betygskriterier. Som hjälp vid bedömningen finns bedömningsmatriser, dels en generell dels en uppgiftsspecifik. Den generella bedömningsmatrisen som finns i bilaga 1 är hämtad från PRIM-gruppens hemsida [www.lhs.se/prim/], navigeringsknapp "Till proven".

I det sammanhang som ämnesprovet utarbetas, i ett mål- och kunskapsrelaterat betygssystem, har vi utarbetat ett uppgiftsmaterial med både större bredd och djup jämfört med standardprovet, som utarbetades i ett relativt betygssystem.

Uppgifter kan besvaras på olika sätt: korta svar, svar med ett alternativ av flera, svar med kort redovisning, svar med utredning osv. Uppgifter kan vara mer eller mindre öppna. En uppgift kan ha ett rätt svar och kan lösas rätt i stort sett endast med en metod. En annan uppgift kan också ha endast ett rätt svar men kan lösas med olika metoder/strategier. Ytterligare en uppgift kan ha flera rätta svar och flera godtagbara Lösningsstrategier. Uppgifter kan pröva olika matematiska kunskaper, exempelvis faktakunskaper, räknefärdigheter, standardprocedurer, begreppsförståelse, generalisering och matematiskt tänkande. Så gott som alla uppgifter ska redovisas skriftligt, men det förekommer också uppgifter som endast ska redovisas muntligt. Det muntliga delprovet genomförs i grupper om 3–4 elever och ska vara ett samtal mellan elever, inte ett förhör av läraren. De aspekter som ska bedömas är förståelse, språk och delaktighet (bilaga 2).

I bilaga 3 visas ett exempel på en uppgift som bedömts med bedömningsmatris. Där finns också olika elevarbeten presenterade.

De diagnostiska materialen och ämnesprovet för skolår 5

Till våren 1996 förelåg tre material i det nya provsystemet, diagnostiskt material för skolår 2 respektive 7 och ämnesprov för skolår 5. Materialen ska vara ett stöd för lärarens bedömning av enskilda elevers kunskaper. Samtliga material har ett diagnostiskt syfte vilket bl.a. innebär att enskilda elevers starka och svaga sidor ska kunna belysas. Resultaten kan utgöra en del av underlaget

för utvecklingssamtal mellan lärare, elev och förälder. Resultaten kan också ses som ett stöd i att planera den fortsatta verksamheten för klassen och för den enskilda eleven. Ämnesprovet för skolår 5 har dessutom syftet att vara ett stöd för läraren när det gäller att bedöma om eleven nått de mål som ska uppnås enligt kursplanen.

Läroplanen liksom kursplanen i matematik betonar den kommunikativa aspekten. Eleverna får därför i de diagnostiska materialen och i ämnesproven möjlighet att kommunicera matematik både skriftligt och muntligt. I materialen för de olika skolåren har vi strävat efter att ha med uppgifter som kan spegla en progression i elevers kunskande.

De diagnostiska materialen är en uppgiftsbank och läraren avgör vilka uppgifter som de olika eleverna bör arbeta med. Uppgifterna är av varierande omfattning och många uppgifter är så kallade "kritiska" vilket innebär att missuppfattningar i elevers lösningar ska kunna avslöjas. Vid bedömningen av elevernas arbeten ska läraren ta hänsyn både till hur eleven arbetat och vilket resultat eleven kommit fram till. Det som är viktigt är att analysera hur eleven har löst uppgiften och vilka kvaliteter de olika lösningarna har. Eftersom materialen ska användas som en del av undervisningen, ska eleven ha möjlighet att komplettera de lösningar som är oklara eller ofullständiga antingen skriftligt eller muntligt.

De diagnostiska materialen var ursprungligen avsedda för skolår 2 respektive 7 (Skolverket, 1996). Hösten 2000 förelåg ett utökat och förändrat material för skolår 2 och det sträcker sig numera från förskoleklass t.o.m. skolår 5 (Skolverket, 2000). Materialet består numera av två delar, analyschema och diagnostiska uppgifter. Analyschemat ska hjälpa läraren att i den dagliga verksamheten kartlägga elevernas kunskande. De diagnostiska uppgifterna är en reviderad och kompletterad version av det diagnostiska materialet för skolår 2. Ett motsvarande material för skolåren från och med 6 till 9 kom ut under våren 2003.

Ämnesprovet för skolår 5 har mycket gemensamt med de diagnostiska materialen, men det är inte lika omfattande. Både i de diagnostiska materialen och i ämnesprovet finns möjlighet för eleven att själv bedöma sina kunskaper genom att besvara en enkät. För båda materialen finns också en kunskapsprofil som läraren kan fylla i. Kunskapsprofilen visar elevens starka och svaga sidor i matematik. I bilaga 4 presenteras 2003 års kunskapsprofil för skolår 5. I bilaga 5 finns den enkät som eleverna använde 2003 när de bedömde sina kunskaper i matematik.

Bedömning på internationell nivå – exemplet PISA

OECD:s program för internationell elevutvärdering (PISA) är en regelbunden utvärdering av 15-åringars förmåga att vara förberedda för vuxenlivet. Den första undersökningsomgången skedde år 2000 i 32 länder i samarbete med ländernas regeringar och OECD (Skolverket, 2001). Då utvärderades läsförmåga, matematiskt och naturvetenskapligt kunskande. Läsförmågan var huvudämnet och det matematiska och naturvetenskapliga kunskandet utvärderades i liten utsträckning. År 2003 var matematiken huvudämne och tre år senare kommer naturvetenskapen att vara det. År 2003 infördes också ett nytt ämne i utvärderingen, nämligen problemlösning.

Matematiskt kunnande definieras i PISA som förmågan att identifiera, förstå samt engagera sig i matematik och kunna göra välgrundade bedömningar av vilken roll matematiken spelar för en individs nutida och framtida privatliv, arbetsliv, sociala liv med släkt och vänner, samt ett liv som en konstruktiv, ansvarsfull och reflekterande medborgare. Målet med PISA är att se elevens kapacitet att integrera och tillämpa matematiska kunskaper och färdigheter i en mängd olika realistiska situationer. Ja, att kunna matematisera, d.v.s. översätta ett problem till matematikens värld och därefter kunna strukturera och formulera problemet för att kunna lösa det. Detta innebär en förskjutning i synen på matematik vid internationella undersökningar, från att se matematik som en samling begrepp och färdigheter att bemästra till att förstå matematik som en meningsfull problemlösande aktivitet.

Man har försökt att dela in det matematiska kunnandet i olika nivåer. I matematiken beskrivs tre olika nivåer.

Elever som når den högsta nivån kan beskrivas som att de tar en aktiv och kreativ roll när de hanterar matematiska problem. De gör en matematisk tolkning, tolkar mer komplex information och hanterar ett antal olika steg. De använder relevanta verktyg och kunskaper, demonstrerar insikt i att identifiera lämpliga Lösningstrategier och kan generalisera, resonera och argumentera för att förklara och kommunicera sina resultat.

Elever som når nivån närmast under kan tolka, sammankoppla och integrera olika framställningar av ett problem eller olika slags information. De kan använda en given modell som kan inkludera algebra eller annan symbolisk representation. Eleverna arbetar med givna modeller och strategier och de väljer ut och tillämpar relevant matematisk kunskap för att lösa en problemsituation som kan involvera ett smärre antal steg.

På den lägsta nivån är eleverna endast kapabla att utföra ett steg, som innehåller grundläggande matematiska fakta eller processer eller att tillämpa enkla räknefärdigheter. De kan endast hantera diagram och texter som är familjära eller där matematiken är uppenbar. De kan lösa och tillämpa rutinprocedurer i ett steg.

För att komma till konkreta uppgifter har PISA arbetat med tre dimensioner av matematiskt kunnande. Dessa är process, innehåll och kontext. Fokus ligger på processen, d.v.s. hur eleverna kan analysera, resonera och kommunicera sina tankar när de formulerar och löser matematiska problem. Beträffande innehållet, så definieras det primärt som breda matematiska begrepp med underliggande matematiskt tänkande. Projektet arbetar därför med övergripande matematiska teman som bl.a. "tillväxt och förändring", "rum och form". Med PISAs breda angreppssätt utvärderas matematiskt kunnande med "autentiska" uppgifter som baseras på situationer, ibland fiktiva, men som representerar olika problem som man kan möta i livet. Situationerna varierar med avståndet från individen; privatliv, skolliv, arbetsliv och fritid, lokalsamhället och samhället i stort och det vetenskapliga samhället.

För att kunna beskriva elevernas kompetens har uppgifterna delats in i olika kompetensklasser, beroende av vilket slags matematiskt kunnande som behövs för att lösa uppgifterna.

Uppgifter som hamnar i den lägsta klassen, klass 1, utmärks av att de endast kräver lösningar som innebär att reproducera fakta, lösa rutinproblem och att kunna tillämpa standardalgoritmer. Nästa klass, klass 2, utmärks av att kunna se och använda samband mellan olika områden inom matematiken och att kunna integrera information för att lösa enklare problem. Denna kompetensklass återspeglar också elevernas förmåga att välja och utveckla strategier och att använda flera metoder och att tillämpa olika steg i den matematiska processen.

Den högsta klassen, klass 3, gäller "matematikens och den matematiska förmågens hjärta". Här måste eleverna kunna matematisera situationer, och kunna upptäcka och extrahera den matematik som finns i situationen. Förutom att kunna lösa uppgiften måste eleverna kunna analysera, tolka och utveckla mer originella modeller och strategier. De måste kunna använda matematisk argumentation som också kan inkludera bevis och generaliseringar. Denna kompetensklass inrymmer kritiskt tänkande, analys och reflektion. Eleverna ska kunna kommunicera sina matematiska tankar och idéer och även förstå andras matematiska kommunikation.

PISA utvärderar ungdomars matematiska kunnande genom olika typer av uppgifter allt från multiple-choice till mer öppna.

Bedömningsanvisningarna var liksom för de två andra ämnena mycket noga utformade och bedömningarnas reliabilitet (tillförlitlighet) kontrollerades på olika sätt både nationellt och internationellt. Det var mycket viktigt att elevlösningarna bedömdes på exakt samma sätt.

PISAs ramverk och de nationella styrdokument (läroplaner och kursplaner) för den svenska skolan har olika syften, uppbyggnad och omfattning. Det dokument på nationell nivå som endast har med ämnet att göra är kursplanen men den finns i ett sammanhang med läroplan och skollag som överordnade dokument. I läroplanen för grundskolan skall varje elev efter avslutad grundskola "kunna behärska grundläggande matematiskt tänkande och kunna tillämpa det i vardagslivet". PISA-projektets ramverk har stora likheter i innehåll och anda med de sammantagna svenska dokumenten.

Den ambition som ramverket för matematiken i PISA ger uttryck för har dock inte fullt ut slagit igenom i uppgiftsmaterialet. Uppgifterna är av mer traditionell typ och mer begränsade än vad ramverket ger uttryck för.

Skillnaderna mellan matematiken i PISA och matematiken i Sverige visar sig mer i det konkreta uppgiftsmaterialet och i hur utvärderingen genomfördes samt i hur elevlösningar bedömdes. Uppgiftstyperna skiljer sig en hel del. De nuvarande ämnesproven har i mycket liten utsträckning multiple-choice uppgifter, vilka är mer frekventa i PISA. De öppna uppgifterna som används i PISA har mer gemensamt med de gamla standardprovsuppgifterna än med uppgifterna i de nationella

ämnesproven. Ämnesproven använder sig av uppgifter som är betydligt mer öppna än vad PISA gör. Olika typerna i uppgiftstyperna slår också igenom i bedömningarna. Vid ämnesproven används mer helhetsbedömning än PISA. Men ämnesproven och PISA har olika syften. Ämnesprovets syfte är att stödja läraren i sin bedömning och betygssättning, att bidra till en likvärdig betygssättning i landet och att konkretisera den svenska läroplanens och kursplanens kunskapssyn respektive ämnessyn. PISAs syfte är att undersöka i vilken utsträckning femtonåringar är förberedda för vuxenlivet och rustade att möta framtidens behov, d.v.s. vilken handlingsberedskap som ungdomarna har.

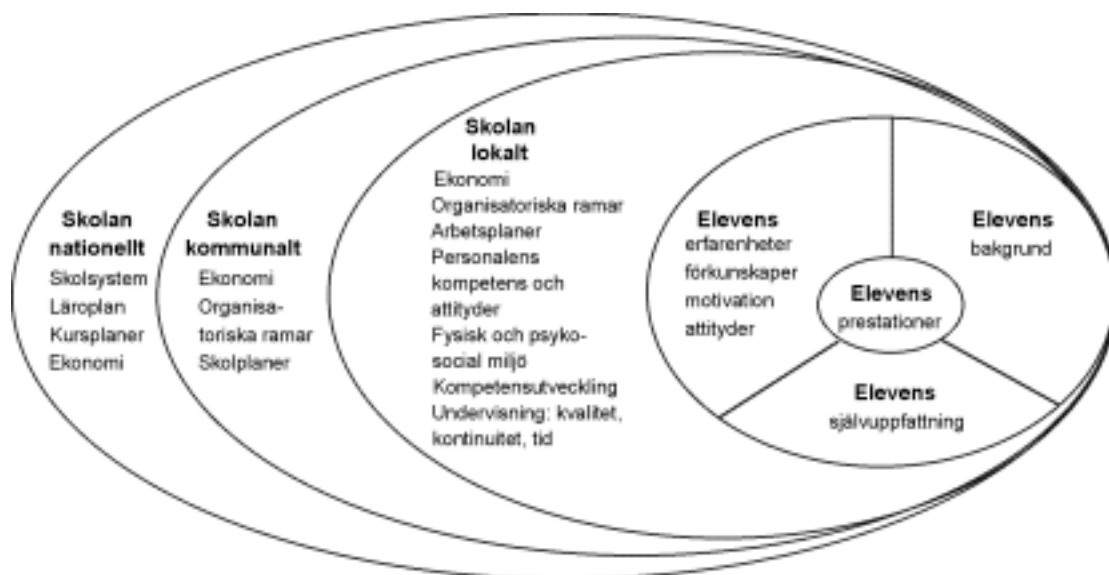
I PISA får eleverna besvara frågor om sitt intresse för matematik och sin självuppfattning. PISA-utvärderingen är en produktbedömning som sker vid ett tillfälle. Eleverna får ingen feedback på det de presterat när de arbetat med materialet.

Internationella undersökningar i matematik har förekommit sedan 1960-talet. I den första 1964 var de svenska elevernas genomsnittresultaten bland de lägsta (Murray & Liljefors, 1983). Undersökningen 1980 visade på samma resultat. Den tredje matematikundersökningen för 13-åringar, som ägde rum i mitten av 1990-talet visade på bättre resultat. Sverige var då ett genomsnittsland (Skolverket, 1996). I PISA ligger de svenska elevernas kunskapsresultat signifikant över OECD-genomsnittet. Däremot har de svenska eleverna ett lägre intresse och självuppfattning i matematik än elever i många andra länder. I dessa avseenden ligger Sverige signifikant lägre än OECD-genomsnittet (Skolverket, 2001).

Bedömning av elevers kunskaper på kommunal nivå

Kommuner genomför olika utvärderingar av elevernas kunskaper (se exempelvis Jernståhl-Nordlund, 2001). För eleven är det mer undantag än regel att deras kunskaper bedöms på kommunal, nationell eller internationell nivå. Det förekommer bara några gånger under deras skoltid. Dessa mer sällsynta utvärderingar och prov är temperaturtagningar på vad en grupp elever presterar vid ett visst tillfälle. Temperaturtagningar är nog så viktiga för att få reda på de huvudsakliga bristerna och förtjänsterna i en elevgrupps kunskande. De är också viktiga i diskussioner om måluppfyllelse därför att de ger en bild av en elevgrupps kunskapsnivå vid ett visst tillfälle.

Den information som ges från olika källor om elevers kunskande, genom utvärderingar och nationella prov, genom lärarnas kontinuerliga bedömning bör samordnas och diskuteras. I Jernståhl-Nordlund, 2001, ges några förslag till diskussionsfrågor (Varför har klassen / skolan / kommunen fått det resultat den fått?, Vad är viktigast att kunna i matematik?, Vad bör förändras, vad bör inte förändras?, I vilken utsträckning tar eleven ansvar för sin egen inläring?). Där presenteras också en modell som kan vara till hjälp för att förklara resultaten.



Baskunnande ur ett bedömningsperspektiv

Utvärderingar och prov som getts på nationell och kommunal nivå genom åren ger rika tillfällen att studera hur elever löser uppgifter i matematik (Pettersson, 1990, 1993, 1994, 1997; Westin, 1997, 1999).

De elever som under hela sin skoltid presterat svaga resultat har i olika studier jämförts med de elever som förbättrat sina resultat under skoltiden alternativt presterat goda resultat under skoltiden. Förklaringar till elevers olika prestationer kan härledas både till faktorer i nationen, kommunen och skolan och till elevfaktorer, som elevers bakgrund, självuppfattning och elevers erfarenheter, förkunskaper, motivation och attityder. I denna artikel är utgångspunkten hur elever med olika prestationer löser uppgifter i matematik. Vilket kunnande har de elever som är framgångsrika i matematik och vari består bristerna hos dem som presterar svaga resultat under sin skoltid? Vilket baskunnande saknar de?

Vid analys av elevlösningar är det viktigt att bedöma på vilket sätt

- eleven förstår problemet och har en lösningsmetod
- eleven klarar de numeriska beräkningarna som krävs
- eleven analyserar, värderar och drar slutsatser av resultatet.

Preciserat i frågor betyder det

1. Har eleven försökt förstå uppgiften?
2. På vilket sätt har eleven förstått uppgiften?
3. Har eleven försökt lösa uppgiften?
4. På vilket sätt har eleven löst uppgiften?
5. Har eleven klarat av de numeriska beräkningarna?
6. Har eleven analyserat, värderat och dragit slutsatser av resultatet?
7. Vilket svar ger eleven på uppgiften?

Ofta använder man i analysarbetet olika scheman (Chick m fl, 1988; Biggs & Collins, 1982) som beskriver de olika lösningsstegen, då lösningen ger rätt resultat.

Elever kan arbeta med uppgifter på olika sätt. De som kommit fram till korrekta resultat kan ha använt olika strategier, exempelvis sådana som är beroende av sitt sammanhang eller mer generella. Ett exempel, som är mycket beroende av sitt sammanhang och inte alls generellt, var det knep som eleverna i en klass hade när de skulle minnas 7×8 . De tänkte på numret på den buss som åkte förbi skolan, som var 56. En annan lokal strategi för denna multiplikation är att eleverna får skriva upp talen 1–9 och se efter vad som står före talen 7 och 8, och det är ju 5 6. Förutom att elever med svaga resultat använder mer "lokala" lösningsstrategier än elever med goda resultat, så använder elever med svaga resultat också mer invecklade lösningsstrategier. De hoppar också i större utsträckning över uppgifter än vad övriga elever gör.

De elever som kommit fram till felaktiga resultat kan ha gjort fel som är mer tillfälliga, d.v.s. de förekommer inte systematiskt i elevernas lösningar utan är av mer slumpmässig karaktär. Det finns dock fel som är systematiska, d.v.s. de uppträder praktiskt taget konsekvent. Dessa fel bygger ofta på missuppfattningar, som grundar sig på ett irrelevant tänkande som eleven använder konsekvent. Utvärderingar och forskning har visat att de svaga elevernas lösningsmönster i allmänhet ser ut på ett annat sätt än övriga elevers. De svaga eleverna har betydligt fler missuppfattningar. De har också i större utsträckning brister i begreppsförståelse, felaktiga lösningsstrategier, brister i taluppfattning och svårigheter att hantera ovidkommande information.

Som exempel på missuppfattningar som elever kan ha är att de använder "regler och metoder" mekaniskt. Det betyder att "regeln att stryka nollor vid division" får följden att $130,3/10$ beräknas felaktigt till 13,3, "regeln störst först vid subtraktion" får följden att $103-9$ beräknas felaktigt till 106. "Regeln att vid multiplikation blir svaret större och vid division blir svaret mindre" medför att eleverna inte kan beräkna $546 \times 0,3$ och $315/0,3$ korrekt. Problemet är att få rätt storleksordning på resultatet. Eleverna har också svårigheter med att bestämma vilket räknesätt som ska användas när de löser benämnda uppgifter.

I en undersökning på nationell nivå (Pettersson, 1993) visade det sig att en större andel elever med goda resultat:

- tycker att matematik är ett roligt ämne.
- har gjort sitt allra bästa för att lära sig matematik på högstadiet.
- är nöjda med det som de presterat i matematik i skolan.

Undersökningen visade också att en större andel elever med svaga resultat:

- anser att de fått arbeta med för många svåra uppgifter i matematik på högstadiet.
- känner sig osäkra eller mycket osäkra när de ställs inför situationer då de ska använda sina matematikkunskaper.

Sett ur perspektivet kunskapsutveckling över tid så skulle undervisning och handledning i baskunnande koncentreras på begreppsförståelse, lösningsstrategier och taluppfattning. Att stimulera elevernas intresse för matematik och tilliten till sin egen förmåga skulle också vara av stor betydelse för elevers kunskapsutveckling. Variation i bedömning och utvärdering är då en av förutsättningarna. I Skolverkets nationella kvalitetsgranskning 2001–2002, Lusten att lära – med fokus på matematik, poängteras bl.a. i förslagen till åtgärder för att utbildningens kvalitet ska förbättras:

Allsidig utvärdering som lyfter fram olika kvaliteter i lärandet, vilket bland annat innebär fler utvärderingsformer än skriftligt poängsatta prov. (sid 40).

Referenser

- Biggs, JB & Collins, KF. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy*. New York. Academic Press.
- Black, P. (2001). Formative Assessment and Curriculum Consequences. I D. Scott (Ed). *Curriculum and Assessment. International Perspectives on Curriculum Studies, Volume 1*. London: Ablex Publishing
- Chick, HL., Watson, JM & Collins, F (1988). Using the SOLO Taxonomy for Error Analysis in Mathematics. I *Research in Mathematics in Australia*, pp 34-46.
- de Corte, E. (2000). Marrying theory building and the improvement of school practice: a permanent challenge for instructional psychology. I *Learning and Instruction*, 10, 249-266.
- Brekke, G & Gjone, G. (2001). Matematikk. I S. Sjöberg (red). *Fagdebatikk – fagdidaktisk införelse i sentrale skolefag*. Oslo: Gyldendal.
- Ek, Y., Murray, Å & Pettersson, A. (1997). *Utvärdering av grundskolan 1995 – UG 95. Matematik. Årskurserna 5 och 9*. Skolverkets rapport nr 119. Stockholm: Skolverket.
- Erickson, G & Börejsen, L (2001). Bedömning av språkfärdigheter i nationella prov och bedömningsmaterial. I P. Malmberg & R. Fern (red). *Språkboken – en antologi om språkundervisning och språkinläring*. Stockholm: Skolverket.
- Gipps, C. (1994). Beyond testing: Towards a Theory of Educational Assessment. The Falmer Press. London.
- Gipps, C. (2001). Sociocultural Aspects of Assessment. I G. Svingby & S. Svingby (red). *Bedömning av kunskap och kompetens. Konferensrapport från konferens om bedömning av kunskap och kompetens 17-19 november 1999*. Rapport nr 18 från PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm.
- de Lange, J. (1992). Assessment: No Change without Problems. I TA Romberg (Ed) *Reform in School Mathematics and Authentic Assessment*. SUNY Press. Albany, New York.
- Jernstahl Nordlund, M. (2001). *Elevers grundläggande kunskaper och färdigheter i matematik*. En utvärdering i skolor 3 och 8 genomförd i Ekerö, Nacka, Nynäshamn, Salem, Sollentuna, Tyresö och Upplands Väsby kommuner läsåret 2000/2001. Rapport 2001:2 från PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm.
- Ljung, B-O. (1962). Standardprov för högstadiet. *Tidning för Sveriges Lärare 10*. Stockholm.
- Marklund, S. (1975). Matematikundervisningens utveckling. *Aktuellt från skolöverstyrelsen*. Specialnummer, s 36-54.
- Murray, Å & Liljefors, R. (1983). *Matematik i svensk skola*. FoU rapport 46. Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Pettersson, A. (1990). *Att utvecklas i matematik. En studie av elever med olika prestationsutveckling*. Almqvist & Wiksell International.
- Pettersson, A. (1993). *Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992. Matematik, åk 9. Huvudrapport*. Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Skolverket.
- Pettersson, A. (1994). *Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992. Matematik, åk 9. Hur löser elever uppgifter i matematik? Förordad analys*. Skolverkets rapport nr 61. Stockholm: Skolverket.
- Pettersson, A. (1997). *Matematiken i utvärderingen av grundskolan 1995. Analys av elevernas arbeten med omfattande matematikuppgifter i åk 9*. Lärarhögskolan i Stockholm. Institutionen för pedagogik. Rapport från PRIM-gruppen nr 13.
- Regeringens skrivelse 1996/97:112: *Utvecklingsplan för förskola, skola och vuxenutbildning. – Kvalitet och likvärdighet*. Skolverket (1996). *TIMSS. Svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Skolverkets rapport 114. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (1996). *Diagnostiskt material i matematik. Skolår 2*. Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen.
- Skolverket (1996). *Diagnostiskt material i matematik. Skolår 7*. Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen.
- Skolverket (2000). *Diagnostiska uppgifter i matematik för användning i de tidiga skolåren*. Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen.

- Skolverket (2000). *Analysschema i matematik för åren före skolår 6*. Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen.
- Skolverket. (2001). *PISA 2000. Svenska femtonåringars läsförmåga och kunnande i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport nr 209. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik*. Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (2003). Diagnostiska uppgifter i matematik för användning i skolår 6 till 9. Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen. (in press)
- Skolverket (2003). *Analysschema i matematik för skolår 6 till 9*. Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen.
- Statens offentligt utredningar. (1992). *Skola för bildning, SoU 1992:94*.
- Utbildningsdepartementet. (1994). *Läroplanerna för det obligatoriska skolväsendet och de frivilliga skolformerna*. Lpo94. Lpf94.
- Utbildningsdepartementet (1998). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet. Lpo 94* Anpassad till att också omfatta förskoleklassen och fritidshemmet.
- Westin, H. (1997). *Matematiken i utvärdering av grundskolan 1995. Analys av elevernas lösningar på standardprovet i åk 9*. Lärarhögskolan i Stockholm. Institutionen för pedagogik. Rapport från PRIM-gruppen nr 14.
- Westin, H. (1997). *Farväl standardprov. Standardproven i matematik 1973–1997 för åk 9. Jämförelse av resultat på uppgifter som återkommit genom åren*. Lärarhögskolan i Stockholm. Institutionen för pedagogik. Rapport från PRIM-gruppen nr 15.
- William, D. (1994). Assessing authentic tasks: alternative to mark-schemes. *Nordic Studies in Mathematics Education*. NOMAD. VOL 2. NO 1, 48-68.

Bilagor

Generell bedömningsmatris för skriftligt prov

Förståelse och metod

Bedömningen avser:

- I vilken grad eleven visar förståelse för problemet.
- Kvaliteten på den metod som eleven väljer.

Genomförande och analys


Bedömningen avser:

- Hur fullständigt och hur väl eleven löser problemet och utför nödvändiga beräkningar.
- Elevens reflektioner kring och analyser av vald metod och resultat.
- Kvaliteten på elevens slutsatser.
- Hur eleven använder samband och generaliseringar.

Redovisning och matematiskt språk

Bedömningen avser:

- Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och i vilken mån den går att följa.
- Hur väl eleven använder matematiskt språk och representation (symbolspråk, grafer, figurer, tabeller, diagram).

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer		
	Lägre  Högre		
Förståelse och metod	Visar någon förståelse för problemet, väljer metod som bara delvis fungerar.	Förstår problemet nästan helt, väljer metod som fungerar.	Förstår problemet och väljer lämplig metod som ibland kan vara generell.
Genomförande och analys	Löser endast delar av problemet eller visar brister i procedurer och metoder.	Löser de väsentliga delarna av problemet med användande av logiska resonemang.	Genomför den valda metoden korrekt och analyserar resultatet.
Redovisning och matematiskt språk	Redovisningen går delvis att följa även om det matematiska språket är torftigt och ibland felaktigt.	Redovisningen är mestadels klar och tydlig men kan vara knapphändig. Det matematiska språket är acceptabelt men med vissa brister.	Redovisningen är välstrukturerad, fullständig och tydlig. Det matematiska språket är korrekt och lämpligt.

Generell bedömningsmatris för muntligt prov

Förståelse

Bedömningen avser i vilken grad

- eleven visar förståelse för uppgiften och för de matematiska begreppen
- eleven reflekterar kring och motiverar sina slutsatser
- eleven använder samband och generaliseringar.

Språk

Bedömningen avser i vilken grad

- elevens framställning är klar och tydlig
- eleven använder korrekt matematisk terminologi.

Delaktighet

Bedömningen avser i vilken grad

- eleven bidrar med egna matematiskt grundade idéer och förklaringar
- eleven följer och prövar andras förklaringar och argument
- eleven argumenterar och för diskussionen framåt.

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer		
	Lägre → Högre		
Förståelse	Visar någon förståelse för uppgiften och för några matematiska begrepp.	Visar förståelse för och använder matematiska begrepp samt kan motivera sina slutsatser.	Visar god förståelse för matematiska begrepp och sambanden mellan dessa. Motiverar sina slutsatser.
Språk	Begripligt och möjligt att följa men företrädesvis vardagsspråk.	Går bra att följa och med acceptabel matematisk terminologi.	Välstrukturerat och tydligt med en relevant matematisk terminologi.
Delaktighet	Deltar något i diskussionen.	Följer och prövar andras förklaringar.	Tar del av andras argument och för diskussionen framåt.

Äp9 Ma02

Delprov B – Del B2

Samlingssalar

- I I den nya skolan ska det byggas en samlingssal där första raden har 10 platser och andra raden har 13 platser. Rad 3 har 16 platser och så fortsätter varje rad att öka med 3 platser ända till sista raden som har 31 platser.
- a) Hur många platser finns det på rad 6?
- b) Hur många rader finns det i samlingssalen?
- c) Beskriv med ord eller med en formel hur man räknar ut antalet platser på rad n .
- II I en annan samlingssal kan man räkna ut antalet platser på rad n med formeln $12 + 5n$. Beskriv hur denna sal är uppbyggd.
- III Kalle påstår att man alltid kan beräkna totala antalet platser i en samlingssal, som är byggd på motsvarande sätt, genom att multiplicera antalet platser på den mittersta raden med antalet rader. Undersök om Kalle har rätt.


**Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta hänsyn till**

- vilka matematiska kunskaper du visat
- hur väl du redovisat ditt arbete
- vilka beskrivningar och slutsatser du kommit fram till.

Bedömningsanvisningar Delprov B – Del B2 (max 5/7)

För att underlätta en likvärdig bedömning av elevernas arbeten med Del B2 har en uppgiftsspecifik bedömningsmatris utvecklats. Matrisen fyller två syften. Den ger information om vad som bedöms i en elevs redovisning. Dessutom kan man med hjälp av den omsätta bedömningen till olika kvalitativa poäng. Den uppgiftsspecifika matrisen bygger på den generella matrisen. Efter matrisen visas ett antal bedömda autentiska elevarbeten (sid 14–17).

Uppgiftsspecifik bedömningsmatris till Del B2

Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer		
	Lägre  Högre		
Förståelse och metod	Eleven visar i sitt arbete att hon/han förstår hur samlingssalen i I är uppbyggd och har en metod för att beräkna antalet platser på "nästa rad". 1/0	Eleven visar i sitt arbete att hon/han förstår hur samlingssalar av denna typ är uppbyggda genom att tolka/skriva en av formlerna och/eller har en metod för att visa att Kalle har rätt. 2/0 2/1	Eleven kan både tolka och använda formler för att beskriva samlingssalar av denna typ och/eller väljer generell metod för att förklara att Kalle har rätt. 2/2 2/3
Genomförande och analys	Eleven genomför delar av uppgiften på ett acceptabelt sätt. Metoden kan vara enkel. 1/0	Eleven genomför i stort sett hela uppgiften för specifika talvärden. 2/0	Eleven genomför hela uppgiften och använder generella lösningsmetoder i någon del. Elevena analyserar sitt resultat och reflekterar över hur problemet förändras om samlingssalen har ett jämnt antal rader. 2/1 2/2
Redovisning och matematiskt språk	Redovisningen omfattar bara delar av problemet och är möjlig att följa. 1/0	Redovisningen är mestadels klar och tydlig. Det matematiska språket är acceptabelt. 1/1	Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är korrekt och lämpligt. 1/2

Här följer bedömda elevarbeten till Del B2:

Elevarbete 1

Samlingssalen

I a) rad 1: 10 platser
rad 2: 13 - " -
rad 3: 16 - " -
rad 4: 19 - " -
rad 5: 22 - " -
rad 6: 25 - " -

Svar: rad 6 har 25 platser

b) rad 6 har 25 platser, då har rad 7 28 platser och rad 8 har 31 platser.

Svar: Det finns 8 rader i salen

c) Om man ska räkna ut antalet platser på tex rad 7 så kan man göra så här: man får veta att rad 1 har 10 platser och att det sen läggs på 3 platser på varje rad, så är det bara att lägga på 3 platser på varje rad, alltså rad 2 har 13 platser osv.

II) rad 1: 12 platser

sen läggs det på 5 platser på varje rad.

III) vet ej hur man ska räkna ut det!

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng
Förståelse och metod	→	X	→	1/0
Genomförande och analys	→	X	→	1/0
Redovisning och matematiska språk	→	X	→	1/0
Summa				3/0

Elevarbete 2

I

RAD: 1	2	3	4	5	6	7	8
Platser: 10	13	16	19	22	25	28	31

a) Svar: På rad 6 finns det 25 platser.

b) Svar: det finns 6 rader på samlingsplatsen.

c) Man kan göra en lista ✓ Och på varje rad ökar man med tre platser

1	2	3	4	5
10	13	16	19	22

II På första raden finns det 12 platser. På 2:a 17 platser. På 3:e 22 plats osv.

III

1	2	3	4	5
10	13	16	19	22

Antal Rader · Antal platser i mitten = $5 \cdot 16 = 80$

Stämmer det? $10 + 13 + 16 + 19 + 22 = 80$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 19 \\ 16 \\ 13 \\ 10 \\ \hline 80 \end{array}$$

Svar: Ja det går.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng
Förståelse och metod	→	✗	→	2/0
Genomförande och analys	→	✗	→	2/0
Redovisning och matematiska språk	→	✗	→	1/1
Summa				5/1

Elevarbete 3

- I a) 25 st
b) 8 st
c) $n \cdot 3 + 10 - 3$

II

$12 + 5 \cdot 1 = 17$	salen är uppbyggd
$12 + 5 \cdot 2 = 22$	så dtt man plussar
$12 + 5 \cdot 3 = 27$	på 5 st hela tiden
	17 22 27

III Kalle har rätt. Eftersom man kan utgå ifrån mittenraden. Sedan minskar platserna nedåt med 5 men de som är uppåt ökar ju med 5. Då går det att multiplicera antalet platser med antalet rader i den mittersta raden

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng
Förståelse och metod			✗	2/2
Genomförande och analys			✗	2/1
Redovisning och matematiska språk		✗		1/1
Summa				5/4

Elevens arbete visar MVG-kvalitet därför att eleven använder ett generellt resonemang.

Elevarbete 4

- 1 a) 1:a raden 10 platser, ökning för varje rad med 3 platser

$$\text{Rad } 6 = 10 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 10 + 5 \cdot 3 = 25 \text{ platser}$$

Svar: På rad 6 finns det 25 platser

- b) Den sista raden har 31 platser

$$31 - 10 = 21 \quad 21 / 3 = 7$$

1 rad med 10 platser

7 rader med 3 platser extra

$$1 + 7 = 8 \text{ rader}$$

Svar: Samlingsalen har 8 rader

- c) Rad $n = 10 + 3(n-1)$

$$\text{II} \quad \text{rad } n = 12 + 5n$$

12 betyder att alla rader har minst 12 platser

$5n$ betyder att om det är rad n blir det

$$12 + 5 \cdot 1 = 17 \text{ platser}$$

Svar: Varje rad ökar med 5 platser och första raden har $12 + 5 = 17$ platser

- III Kallas teori stämmer eftersom den mittersta raden är "medelraden" (medianraden)

Ex. En sal har 5 rader

$$10 + 13 + 16 + 19 + 22 = 80$$

$$16 \cdot 5 = 80$$

Skulle salen ha jämt antal rader så får man ta ett tal som ligger mitt emellan de två talen i mitten



De två skuggade områdena är lika stora

$$\text{Ex. } 10 + 13 + \underbrace{16 + 19}_{17,5} + 22 + 25 = 105$$

$$17,5 \cdot 6 = 105$$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer			Poäng
Förståelse och metod			✗	2/3
Genomförande och analys			✗	2/2
Redovisning och matematiska språk			✗	1/2
Summa				5/7

Kunskapsprofil – matematik

Elevens namn:

Summera här din bedömning av var eleven befinner sig i förhållande till mål att uppnå i matematik i slutet av det femte skolåret.

Kunskapsområden	Lärarens kommentar (elevens prestationer inklusive Äp 5)
Grundläggande taluppfattning för naturliga tal enkla tal i bråkform enkla tal i decimalform (Del D)	
Räkning med naturliga tal – huvudräkning skriftliga räknemetoder miniräknare	
Talmönster, obekanta tal Förståelse och användning av räknesätten (Del C)	
Grundläggande rumsuppfattning Geometriska figurer och mönster (Del B)	
Jämförelse, uppskattning och mätning av volym vinklar massor (Del B)	
längder areor (tider) Ritningar och kartor (Grupp)	
Diagram, tabeller, lägesmått (Grupp)	

Äp5Ma03/04

(Kunskapsprofil – forts.)

Övrigt Matematikens språk, symboler och uttrycksformer Förklara och argumentera för det egna tänkandet Tillit till den egna förmågan Uthållighet Attityder till ämnet (vilja, våga, lust att lära) Ansvar för eget lärande	
--	--

Elevers kommentarer


Lärarens kommentarer

Det här går bra:
Det här är svårt:
Hur går vi vidare?

Äp5Ma03/04

Namn: _____ Del A Äp5Ma03/04

☐ Flicka☐ Pojke**Du och matematiken**

Hur känner du dig i följande situationer?	Säker	Ganska säker	Osäker	Mycket osäker
Du ska säga namnen på de här figurerna: 				
Du ska mäta med din linjal.				
Du ska uppskatta hur mycket mjölk som ryms i ett glas.				
Du ska ta reda på något från ett diagram.				
Du ska avgöra hur mycket pengar du ska ha tillbaka när du handlar.				
Du ska räkna $8 - 1 = ___ + 3$				
Du ska räkna $403 - 125$ utan miniräknare.				
Du ska räkna $96 / 3$ utan miniräknare.				
Du ska räkna $36 \cdot 100$ utan miniräknare.				
Du ska skriva talet tjugotusentvå med siffror.				
Du ska avgöra vilket tal som är störst av 3,8 och 3,14.				
Du ska arbeta med uppgifter som innehåller text.				
Du ska arbeta med uppgifter som ser annorlunda ut än du är van vid.				
Du ska räkna ut något med miniräknaren.				
Du ska förklara för en kamrat hur du har löst en uppgift.				
Du ska arbeta tillsammans med någon.				

IV. Bibliografi – baskunnande i matematik

Syftet med denna bibliografi är att presentera relevant litteratur, som fanns tillgänglig i början av 2003, med fokus på baskunnande i matematik. Den är skriven för de som har ansvar för barns och elevers lärande i matematik i förskola och skola. För varje titel ges en kort beskrivning med syfte och innehåll samt uppgifter som behövs för att finna litteraturen på bibliotek eller via bokhandel. Beställningsadresser är samlade i slutet. Bibliografin innehåller information om webblänkar som stöd för litteratursökning på nätet och avslutas med en förteckning över doktorsavhandlingar med svensk anknytning som behandlat frågor om matematikutbildning. För senare utkommen litteratur hänvisar vi till NCM:s webbplats, ncm.gu.se där information om litteratur ges kontinuerligt.

Bibliografin tar endast i begränsad omfattning upp specialpedagogisk litteratur. Sådan litteratur tas fram vid arbetet med en Ramkursplan i matematikdidaktik med inriktning mot elever i behov av särskilda utbildningsinsatser. Information om detta kommer också att ges på NCM:s webbplats.

Litteraturen är ordnad med texter på svenska först (märkta A), därefter övriga skandinaviska (B). Sedan följer texter på engelska (C). Inom varje grupp är titlarna ordnade så att litteratur som behandlar förskola och tidiga skolår kommer först enligt följande märkning: 1 gäller främst skolår F-6, 2 skolår 4–9, 3 skolår 8–12, 4 vux.

Sammanställningen är gjord av *Marianne Dalemar, Göran Emanuelsson, Bengt Johansson, Lars Mouwitz, Ronnie Ryding och Karin Wallby*, NCM.

A1 Analysschema i matematik för åren före skolår 6

Detta är ett material från Skolverket som utvecklats inom PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm. Det består av ett analysschema, strukturerat under rubrikerna "Mätning och rumsuppfattning", "Sortering, tabeller och diagram" och "Taluppfattning". Materialet innehåller också kommentarer kring hur schemat kan användas med exempel. Syftet med materialet är att stödja lärare i förskola och grundskola att reflektera över, analysera och dokumentera den begreppsutveckling i matematik som barn visar på olika sätt och i olika situationer.

Skolverket (2000). *Analysschema i matematik för åren före skolår 6*. Stockholm: PRIM-gruppen, Lärarhögskolan i Stockholm. ISBN: 91-89314-14-X. Beställs från Liber distribution.

A1 Diagnostiska uppgifter i matematik för användning i de tidiga skolåren

Detta material från Skolverket har utvecklats inom PRIM-gruppen vid lärarhögskolan i Stockholm och är en lätt revidering av det tidigare utgivna Diagnostiskt material i matematik för skolår 2 (Skolverket 1996). Uppgifterna i materialet utgör en uppgiftsbank där läraren/arbetslaget avgör vilka uppgifter eleverna ska arbeta med. Syftet är bland annat att barnets starka och svaga sidor i

matematik ska belysas. I materialet finns en översikt över vilka uppgifter som prövar olika områden. Rubrikerna överensstämmer med Analysschema i matematik – för åren före skolår 6. Det gäller även de rubriker som finns i det dokumentationsunderlag som ingår.

Skolverket (2000). *Diagnostiska uppgifter i matematik för användning i de tidiga skolåren*. Stockholm: PRIM-gruppen, Lärarhögskolan i Stockholm. ISBN: 91-89314-15-8. Beställs från Liber distribution.

A1 Barn och matematik

Innehållet bygger på författarens avhandling i pedagogik, *Att möta matematiska problem – en belysning av barns lärande* (1991). Hur upplever barn matematik och hur lär de sig räkna och lösa problem? Varför frågar de "Vad ska jag göra" i stället för att ta egna initiativ? Hur ska man få dem att engagera sig mera? Det är frågor som Ann Ahlberg funderat på i sitt arbete som lågstadielärare och som gett bakgrund för avhandlingsarbetet. Boken behandlar hur man kan gå tillväga för att få en positiv inställning till matematik och den egna förmågan, och hur man kan arbeta med problemlösning i matematik. En undervisning med bild och berättande som tar sin utgångspunkt i problemlösning beskrivs. Forskning kring inläring och dess betydelse för praktiken tas också upp.

Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik*. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-38431-9. Beställs från Studentlitteratur.

A1 Förskolebarn i matematikens värld

Boken beskriver hur förskolebarn från de allra yngsta åldrarna kan möta matematiska begrepp och idéer som naturligt förekommer i förskolans rutinsituationer, vardagsaktiviteter och temaarbeten. Utgångspunkten är förskolans läroplan och aktuell forskning. Författarna knyter an till förskolans tradition att använda sig av vardagsrutinernas och lekens möjligheter. Fokus är riktat mot barns intresse och barns värld och hur man som pedagog kan synliggöra matematiska begrepp och idéer. Boken ger inspiration för hur man kan arbeta med grundläggande matematik och förskolebarn.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (1999). *Förskolebarn i matematikens värld*. Stockholm: Liber. ISBN: 91-47-04950-2. Beställs från Liber distribution.

A1 Matematik från början, NämnarenTEMA

Denna bok tar upp barns tidiga möten med matematik och beskriver hur de kan utformas. Erfarna lärare och forskare ger både teoretisk bakgrund och praktiska exempel. Boken tar sin utgångspunkt i kursplaner och läroplaner och visar hur man i förskola, förskoleklass och under de första skolåren kan ge spännande och fängslande matematikaktiviteter och utveckla barns lärande. Författarna ger exempel på hur variation i barns erfarenheter och tänkande kan tas tillvara och utmanas.

Wallby, K., Emanuelsson, G., Johansson, B., Ryding, R. & Wallby, A. (Red.) (2000). *Matematik från början*. Göteborg: Nationellt Centrum för matematikutbildning, NCM. ISBN: 91-88450-20-1. Beställs från NCM.

A12 Bra matematik för alla

I boken ger författaren praktiska förslag till undervisning som kan förebygga svårigheter. En sådan undervisning är bra för alla elever och nödvändig för elever i svårigheter. Betydelsen av laborativt och undersökande arbete betonas liksom reflekterande samtal och diskussioner som kan leda till kunskande och bättre förståelse och därmed ökat elevengagemang. Detta är en något omstrukturerad och utökad version av Gudrun Malmers bidrag i den tidigare utgivna *Matematiksvårigheter och dyslexi* (Malmer & Adler, 1996).

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-02402-9. Beställs från Studentlitteratur.

A12 Lära matematik

Denna bok har sin bakgrund i olika forskningsprojekt och utvecklingsarbeten som författarna deltagit i, bl.a. ALM-projektet, Alternativ Läroång i Matematik, som pågick 1987–1991. Idéer om förändrad undervisning i matematik vad gäller innehåll, arbetssätt och metoder förs fram i relation till 1994 års kursplan för grundskolan. Frågor som svarar mot Vad, Varför och Hur behandlas. Kvalitet i elevers tänkande betonas liksom respekt för olika slags matematik och olika sätt att lösa uppgifter. Målbeskrivningar och utvärdering av elevers kunskaper diskuteras. Boken innehåller diskussionsuppgifter och klassrumsuppgifter med kommentarer.

Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn J. (1994). *Lära matematik*. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-39601-5. Beställs från Studentlitteratur.

A12 Att lyckas med matematik i grundskolan

Ungefär var sjunde elev upplever skolmatematiken som ett stort misslyckande. Budskapet i denna bok är att det är möjligt även för dessa barn och ungdomar att lyckas med matematiken. Boken består av två delar. Den första delen behandlar matematikinläringens psykologi och den andra dess pedagogik. Först behandlas således hur eleverna lär och sedan hur deras lärande bör stimuleras. Som en röd tråd genom boken löper frågor om mål, metod och innehåll. Författaren redogör bl.a. för hur eleverna kan lära sig lösa problem och utveckla sin kunskap om tal samt hur hjälpmedel som miniräknare och dator kan användas i numerisk räkning. Han visar även hur geometrin kan göras meningsfull genom att eleverna får upptäcka sambandet mellan geometri som logiskt system och den konkreta verkligheten.

Magne, O. (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-00205-X. Beställs från Studentlitteratur.

A12 Matematik som språk – verksamhetsteoretiska perspektiv

Barns informella språk och begreppsliga insikter bildar grunden för matematiklärande. Författaren uppmuntrar därför till en språklig mångfald där barn uttrycker matematik i lek, tal, bilder och texter. Matematik är ett kreativt ämne att samverka kring för både elever och lärare. Med praktiken som grund byggs en didaktisk teori upp. Den tar sin utgångspunkt i Vygotskijs språkteoretiska tänkande och i de begrepp och operationer grundskolans elever möter, men innehållet torde vara generaliserbart både till andra stadier och till ämnesinnehåll.

Høines, M. Johnsen (2000). *Matematik som språk – verksamhetsteoretiska perspektiv*. Malmö: Liber. ISBN: 91-47-04670-8. Beställs från Liber Distribution.

A12 Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle

Författarna tar upp grundläggande frågor om vad de menar med baskunskaper i matematik och var ansvaret ligger för att eleverna skall utveckla ett sådant kunnande. Tänkbara orsaker till dagens situation diskuteras. Områden som behandlas är bl.a. målbeskrivningar, individualisering, diagnostisering och konkretisering, problemlösning, samverkan med andra ämnen och tematisk undervisning samt hur olika stoffområden kan behandlas ur ett långsiktigt perspektiv från förskola till gymnasiet.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik – för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-02217-4. Beställs från Studentlitteratur.

A12 Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 1 – Grundläggande aritmetik

Denna bok i en serie på tre delar har som syfte att hjälpa lärare att förstå hur barn tänker och hur de kan bygga upp aktuella begrepp i matematik med fokus på tal och aritmetik. Boken används i första hand för grundläggande kurser i lärarutbildning och kompetensutveckling. Framställningen bygger på forskning om barns lärande och matematikens historia samt hur människan från början byggt upp och använt matematik.

Kilborn, W. (1989). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 1 – Grundläggande aritmetik*. Stockholm: Utbildningsförlaget (Liber). ISBN: 91-47-02993-5. Beställs från Liber distribution.

A12 Lärande och delaktighet

Hur kan man möta elevers olikheter i skolan? Hur kan lärare verka för att varje elev ska känna delaktighet, få tilltro till sin förmåga och lust att lära? Författaren behandlar dessa frågor utifrån specialpedagogiska perspektiv på undervisning och lärande, med inriktning mot matematik. Boken tar upp kommunikation mellan ansvarsnivåer och aktörer i skolan. Hur undervisningens innehåll och organisering kan relateras till elevers erfarenheter och möjligheter diskuteras. Skolans villkor och elevers förutsättningar att lära beskrivs med fokus på matematik. Med utgångspunkt

i vardagsarbetet analyseras hur man kan finna vägar till bättre lärande och delaktighet för elever. Boken vänder sig till blivande och verksamma lärare och specialpedagoger.

Ahlberg, A. (2001). *Lärande och delaktighet*. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-01774-X. Beställs från Studentlitteratur.

A12 Minoritets elever och matematikutbildning

Avsevärt färre elever med annat modersmål än svenska når nationellt uppsatta mål och strävansmål i matematik än elever med svenska som modersmål. Denna litteraturöversikt belyser olika faktorer som har betydelse för hur minoritets elever kan tillgodogöra sig matematikundervisningen. Översikten tar också upp många av de i litteraturen beskrivna förslag till förbättringar, vilka inte nödvändigtvis behöver medföra ökade kostnader för verksamheten. Dessa handlar bl.a. om uppfattningar och attityder hos dem som på något sätt har inflytande över elevens studiesituation och om ett kulturellt eller mångkulturellt innehåll i undervisningen.

Rönnerberg, I. & Rönnerberg, L. (2001). *Minoritets elever och matematikutbildning – en litteraturöversikt*. Stockholm: Skolverket. ISBN: 91-89314-29-8. Beställs från Liber distribution.

A12 Matematik – ett kommunikationsämne, NämnarenTEMA

Boken behandlar valda delar av grundskolans matematikundervisning. De övergripande frågorna om arbetssätt och arbetsformer, samtal och resonemang, problemlösning samt det historiska perspektivet behandlas liksom miniräknare, talmönster, rumsuppfattning och statistisk kommunikation. Boken innehåller teoriavsnitt, elevexempel och frågor för diskussion i arbetslag eller kompetensutveckling. Litteraturlistor till varje avsnitt ger stöd för den som vill läsa mer inom området.

Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne*. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik. ISBN: 91-88450-06-6. Beställs från NCM.

A12 Matematikdidaktikserien

Böckerna ingår en serie i matematikdidaktik och är avsedda för kompetensutveckling och grundutbildning av lärare i matematik. De är alla antologier och innehåller bidrag från verksamma lärare, lärarutbildare och forskare. Till kapitlen i böckerna finns studieuppgifter som kan användas för diskussion eller i kompetensutveckling.

Tal och räkning 1

Tal och räkning 2

De två första böckerna i serien har sin tyngdpunkt i elevers grundläggande taluppfattning och aritmetikkunskaper och vilken undervisning som kan hjälpa eleverna till allsidiga räknefärdigheter med och utan hjälpmedel. Tal och räkning 1 har fokus på ämnets historiska utveckling, på inläring

och undervisning, taluppfattning och räkneseättens innebörd i teori och praktik. I Tal och räkning 2 betonas olika sätt att räkna med och utan hjälpmedel.

Problemlösning

Detta är en antologi om hur elevers tänkande och färdigheter i problemlösning kan utvecklas och vilken undervisning som kan hjälpa eleverna att bli goda problemlösare i och utanför skolan. Vardagsanknytningen av matematiken, problemlösning som mål och medel och hur problemlösning kan användas som ett sätt att differentiera undervisningen är några exempel på områden som behandlas. Undervisning om problemlösning behandlas också i ett historiskt perspektiv.

Geometri och statistik

Boken beskriver hur elevers tänkande och färdigheter i geometri och statistik kan utvecklas. Den behandlar bl.a. arbetssätt inom geometriundervisningen, begrepp och termer och mätning. Statistikdelen innehåller bidrag kring statistiska undersökningar, tabeller och olika typer av diagram. Ett särskilt kapitel tar upp sannolikhetslära på mellanstadiet. Geometri och statistik behandlas också i ett historiskt perspektiv.

Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1991). *Tal och räkning 1*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-34681-6

Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1991). *Tal och räkning 2*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-34691-3

Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-35391-X

Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1992). *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-35401-0

Böckerna kan beställas från Studentlitteratur.

A123 Att vara lärare och elev i matematik

Denna rapport tar upp matematiken i grundskolan och den gymnasiala utbildningen. Bakgrunden är den utvärdering på nationell nivå som ägde rum i matematik våren 1992. Då tillfrågades 10 000 elever och deras lärare om arbets- och undervisningsformer, ansvarstagande, miniräknare m.m. Materialet är försett med diskussionsfrågor och är samlat under följande områden: lärare och elevers syn på matematiken, elevernas egen insats, arbetsformer, miniräknare, datorer och eget material, hemuppgifter och prov samt matematik jämfört med andra ämnen.

Gennow, S. & Pettersson, A. (1996). *Att vara lärare och elev i matematik – ett fortbildningsmaterial i matematik för grundskolan och den gymnasiala utbildningen*. Stockholm: Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen. Rapport 1996:1. Beställs från Lärarhögskolan i Stockholm, PRIM-gruppen.

A123 Matematik på elevens villkor – i förskola, grundskola och gymnasieskola

Att många elever har svårigheter med att tillgodogöra sig skolans undervisning har ofta förts tillbaka på bristfälliga undervisningsmetoder. I denna bok visar författarna att även innehållet i undervisningen har stor betydelse för elevers tänkande. Utgångspunkten är att eleverna konstruerar sitt matematiska tänkande utifrån egna erfarenheter, sociala förhållanden, könstillhörighet osv. Författarna illustrerar teorier med praktiska exempel från områden såsom bråkräkning, problemlösning och areauppfattning. I ett kapitel behandlas datorstödd undervisning. Boken är avsedd för lärarutbildning och kompetensutveckling inom förskola, grundskola och gymnasieskola. De områden som beskrivs ger exempel på hur undervisningsproblem i klassrummet kan angripas.

Gran, B. (Red.) (1998). *Matematik på elevens villkor – i förskola, grundskola och gymnasieskola*. Lund: Studentlitteratur. ISBN: 91-44-00229-7. Beställs från Studentlitteratur.

A123 Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 2 – Rationella och irrationella tal

I denna del av Didaktisk ämnesteor i matematik ägnas stort utrymme åt införandet av de negativa talen och rationella talen. Författaren menar att dessa två områden hittills fått en otillfredsställande behandling i skolan, vilket bl.a. visar sig i nedslående resultat på uppgifter som testar elevernas kunskaper inom dessa områden. Undervisningen har oftare byggt på minnesregler än på för eleverna rimlig logik. Författaren pekar särskilt på olyckliga konsekvenser för elever som skall studera algebra, ekvationslösning och funktionslära.

Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 2 – Rationella och irrationella tal*. Stockholm: Utbildningsförlaget (Liber). ISBN: 91-47-04516-7. Beställs från Liber distribution.

A123 Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 3 – Mätning, Geometri, Funktioner, Sannolikhetslära och statistik

Boken inleds med ett omfattande kapitel om mätning. Där betonas principerna för och tankeformer som underlättar förståelse för mätandet. Kapitlet om geometri behandlar både klassisk geometri och avbildningsgeometri, med särskild uppmärksamhet på konkretionsnivåer. Författaren anser att man missat viktiga verktyg i problemlösning i skolans matematikundervisning genom att formalisera funktionsläran för tidigt. Kapitlet funktioner ger förslag till en mera konkret uppläggning som kan leda till bättre insikt om vanliga funktioners egenskaper. Slutkapitlet, statistik och sannolikhetslära, utmynnar i en aktuell frågeställning, nämligen modeller för att konstruera och normera prov. Avslutningsvis diskuteras betygssättning.

Kilborn, W. (1992). *Didaktisk ämnesteor i matematik. Del 3 – Mätning, geometri, funktioner, sannolikhetslära och statistik*. Stockholm: Utbildningsförlaget (Liber). ISBN: 91-47-03255-3. Beställs från Liber distribution.

A123 Elevgrupperingar – kunskapsöversikt med fokus på matematikundervisning

Rapporten bidrar med kunskaper, erfarenheter och tankar som kan utgöra underlag för lokala diskussioner och beslut beträffande grupperingar. En litteraturöversikt redovisar forskningsresultat, främst kring nivågrupperingar. Dokumenterade risker och svårigheter med olika grupperingar redovisas liksom dess möjligheter. Dessutom diskuteras andra viktiga faktorer, såsom skolans olika syften, uppfattningar om hur elever lär och synen på matematikämnet. I ett historieavsnitt ges en kort beskrivning av grundskolans framväxt och differentieringsfrågans politiska dimensioner. Rapportens viktigaste slutsats är att det är undervisningen som är det centrala och bör diskuteras i första hand, inte organisationen.

Wallby, K., Carlsson, S. & Nyström, P. (2001). *Elevgrupperingar: en kunskapsöversikt med fokus på matematikundervisning*. Stockholm: Skolverket. ISBN: 91-89314-45-X. Beställs från Liber distribution.

A123 Uppslagsboken, NämnarenTEMA

Denna idébok i NämnarenTEMA-serien har matematikämnets Mål att sträva mot som utgångspunkt. Det är ingen "uppslagsbok" i vanlig bemärkelse utan en samling aktiviteter bestående av en sida för kopiering och en sida med teori och idéer om hur de kan utvecklas och fördjupas. Ett femtiotal uppslag, de flesta från Nämnarens drygt 25-åriga utgivning, har redigerats och ger lärare möjlighet att prova och vidareutveckla rika aktiviteter i klassrummet.

Trygg, L., Ryding, R., Emanuelsson, G., Mouwitz, L., Wallby, A. & Wallby, K. (Red.). (2002). *Uppslagsboken*. Göteborg: Nationellt Centrum för matematikutbildning, NCM. ISBN: 91-88450-34-1. Beställs från NCM.

A123 Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik

Syftet med denna rapport är att ge en bild av sambanden mellan läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik. Utgångspunkten är att elever i läs- och skrivsvårigheter också stöter på problem när de ska utveckla kunnande i och om matematik. Den starka betoningen på språklig förståelse och kompetens som forskning och nationella måldokument lägger på matematikämnet har bidragit till behovet av att utreda hur läs- och skrivsvårigheter påverkar elevers lärande och hur undervisningen kan utformas. Rapporten är baserad på litteraturstudier och empiriska studier. Den behandlar bl.a. automatiseringsprocesser, läsförståelse och problemlösning i matematik, förebyggande arbete.

Sterner, G. & Lundberg, I. (2002). *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. Göteborg: NCM, Nationellt centrum för matematikutbildning. NCM-rapport 2002:2. ISSN: 1650-335X. Beställs från NCM.

A1234 Huvudräkning. En inkörsport till matematiken

Den här boken handlar både om strategier för huvudräkning och hur man kan hjälpa elever att från första skoleåret utveckla förståelse för matematik. Barns informella tänkande kan utvecklas till kunnande om innebörd och funktion kring operationer med negativa tal, tal i bråk- och decimalform. Det gäller hur räknelagar och räkneregler fungerar och kan bli levande och utvecklingsbar kunskap för elever. I boken diskuteras huvudräkning räknasätt för räknasätt, med förklaringar på strategier och förslag på färdighetsträning med övningar. Boken passar för kompetensutveckling och grundläggande lärarutbildning.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning – en inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-04225-6. Beställs från Studentlitteratur.

A1234 Geometri på ett bräde

Geobrädet inbjuder till arbete med meningsfulla, lagom svåra problem, till ett undersökande arbetssätt och kan användas från förskolan och uppåt. Boken vill sprida idéerna kring geobrädets användning och passar som komplement till andra läromedel. I boken uppmuntras läsare att först lära känna geobrädet genom den fria leken och fortsätter sedan med problem att lösa, figurer att studera och texter att läsa.

Dunkels, A. (1992). *Geometri på ett bräde*. Malmö: Gleerups. ISBN: 91-40-61483-2. Beställs från Gleerups.

A1234 Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv

Syftet med boken är att samla bidrag från forskare verksamma inom matematikens didaktik i de nordiska länderna. Viktiga frågor tas först upp ur ett internationellt perspektiv. Frågorna sätts genom konkreta exempel in i sitt sammanhang i nordisk matematikdidaktik. Exempel på lärande och undervisning i matematik som hämtats från nordiska verksamheter redovisas. Vidare belyses mål för undervisningen, kursplaner, karakteristiska drag i god undervisning, räknandets roll, datoranvändningens påverkan på lärande och undervisningen i matematik, kommunikationens och dialogens roll, klyftan mellan forskare och lärare samt frågor om vad matematikundervisningen ska innehålla i framtiden.

Grevholm, B. (Red.) (2001). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-01835-5. Beställs från Studentlitteratur.

A1234 Matte med mening – tänka tal och söka mönster

Matematik beskrivs som ett spännande ämne, där mönster står i fokus, och boken innehåller både bilder och historiska exempel. Boken visar att matematik är mer än bara räkning. Texten är skriven för barn och rikt illustrerad. Boken presenterar aktiviteter och undersökningar som elever kan utföra enskilt och i grupp, hemma och i skolan. Flera exempel är hämtade från sådana

delar av matematiken som elever vanligtvis inte möter i undervisningen, men som kan utmana deras tänkande och stimulera intresset för matematik. Exempel på sådana områden är fraktaler, topologisk lek, Eulers formel, Goldbachs förmodan och fyrfärgsproblemet.

Dahl, K. & Nordqvist, S. (1994). *Matte med mening*. Stockholm: Alfabeta förlag. ISBN: 91-7712-410-3. Beställs från Alfabeta.

A1234 Att vardagsanknyta matematikundervisningen

Denna forskningsrapport behandlar skolmatematikens relation till vardagshändelser och menar att vi bör skilja på "vardagsmatematik" och "vardagsanknuten matematikundervisning" där det senare handlar om att använda kunskaper vunna i vardagen för att lära matematik. Exempel på undervisningssekvenser diskuteras utifrån vilka möjligheter som uppgiften rymmer och hur dessa tas till vara. Att eleverna får hjälp med att se vardagsexempel som en "konkret representation av en matematisk situation" betonas. Utan denna insikt finns risk för att elever inte utvecklar generella matematikkunskaper. Att vardagsanknyta undervisningen ställer krav på lärares kunskaper.

Wistedt, I., Brattström, G., Jacobsson, C. & Källgården, E-S. (1992). *Att vardagsanknyta matematikundervisningen*. Slutrapport från projektet Vardagskunskaper och skolmatematik. Stockholms universitet: Pedagogiska institutionen.

A1234 Nämnaren

Tidskriften Nämnaren utkommer med fyra nummer per år. Den riktar sig till lärare, lärarstuderande, lärarutbildare, forskare och personal med ansvar för fortbildning och utvecklingsarbete från förskola till gymnasieskola. I Nämnaren finns beskrivningar av klassrumsarbete, aktiviteter och problem att använda i klassen samt rapportering om forskning kring matematikundervisning. För att underlätta överblick över materialet finns det en sökbar databas på Nämnarens webbplats: [<http://namnaren.ncm.gu.se>] där man kan hitta information om artiklarna, samt en kort beskrivning av innehållet.

Nämnaren, Göteborgs universitet, Vera Sandbergs allé 5A, 412 96 Göteborg. ISSN 0348-2723. Beställs från NCM.

A1234 Algebra för alla, NämnarenTEMA

Algebra för alla behandlar algebraundervisning för skolår 1–12. I dagens samhälle behöver allt fler kunna förstå och använda formler, tabeller och diagram. Alla har glädje av algebraiskt tänkande som verktyg vid generaliseringar, problemlösning och beskrivning av mönster och samband mellan storheter. Inte bara nytta utan även spänning, utmaning och skönhet är viktiga ingredienser i en algebra för alla. Boken innehåller förslag till studieuppgifter, litteraturhänvisningar samt ett stort antal exempel.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik. ISBN: 91-88450-08-2. Beställs från NCM.

A1234 Hög tid för matematik

Detta är huvurapporten i en redovisning av ett uppdrag från regeringen till NCM och innehåller förslag till kompetensutvecklingsprogram för lärare i matematik. I rapporten ges en lägesbeskrivning av svensk matematikutbildning och ska läsas som en bakgrund till de förslag till åtgärder som presenteras. Rapporten innehåller också sammanfattningar från ett antal delrapporter som lämnades till regeringen i juni 2001.

NCM (2001). *Hög tid för matematik*. Göteborg: NCM, Nationellt centrum för matematikutbildning. NCM-rapport 2001:1. ISSN: 1650-335X. Beställs från NCM.

A1234 Vuxna och matematik – ett livsviktigt ämne

Denna rapport är en redovisning av ett uppdrag från regeringen, som gällde åtgärder för att stärka vuxnas lärande i matematik. Lärandet diskuteras utifrån ett antal motivbilder, individ och samhälle; demokrati och värdegrund; det livslånga och livsvida lärandet; lärande och kunskap i kunskapssamhället; vägledning och validering. En problematisering görs av vad matematik är och vad "baskunnande för alla" kan innebära. Validering av vuxnas matematikkunnande identifieras som ett viktigt område.

Gustafsson, L. & Mouwitz, L. (2002). *Vuxna och matematik – ett livsviktigt ämne*. NCM-rapport 2002:3. Göteborg: NCM, Nationellt centrum för matematikutbildning. ISSN: 1650-335X. Beställs från NCM.

A2 Analysschema i matematik – för skolår 6–9

Detta material från Skolverket är utvecklat inom PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm. Det består av ett analysschema, strukturerat under rubrikerna "Mätning, rumsuppfattning och geometriska samband", "Statistik och sannolikhet", "Taluppfattning" och "Mönster och samband". Materialet innehåller kommentarer kring hur schemat kan användas med exempel. Analysschemat bygger på det innehåll och strukturer i Analysschema i matematik – för åren före skolår 6 (Skolverket 2000). Syftet är att stödja lärare och elever i de aktuella skolåren att reflektera över, analysera och dokumentera elevens kunskapsutveckling i matematik.

Skolverket (2003). *Analysschema i matematik – för skolår 6–9*. Stockholm: PRIM-gruppen, Lärarhögskolan i Stockholm. ISBN: 91-85009-33-4. Beställs från Liber distribution.

A2 Diagnostiska uppgifter i matematik – för skolår 6–9

Detta material har utvecklats inom PRIM-gruppen vid Lärarhögskolan i Stockholm. Det innehåller nykonstruerade uppgifter men också uppgifter ur Diagnostiskt material för skolår 7 (Skolverket 1996), uppgifter ur ej sekretessbelagda ämnesprov för skolår 9 samt uppgifter ur tidigare utgivna ämnesprov för skolår 5. Uppgifterna ger en uppgiftsbank där läraren/arbetslaget avgör vilka uppgifter eleverna ska arbeta med. Syftet är bland annat att elevens starka och svaga sidor

i matematik ska belysas. I materialet finns en översikt kring vilka uppgifter som prövar olika områden. Rubrikerna överensstämmer med Analysschema i matematik – för skolår 6–9. Det gäller även de rubriker som finns i det dokumentationsunderlag som ingår.

Skolverket (2003). *Diagnostiska uppgifter i matematik – för skolår 6–9*. Stockholm: PRIM-gruppen, Lärarhögskolan i Stockholm. ISBN: 91-85009-34-2. Beställs från Liber distribution.

A2 Analys av elevernas arbeten med mer omfattande matematikuppgifter i åk 9

Rapporten redovisar en analys av hur cirka 1000 elever löser öppna uppgifter i matematik. Uppgifterna utmärks av att de kan lösas på många olika sätt och i rapporten har de olika elevarbetena klassificerats utifrån kvalitativa nivåer. Elevernas prestationer på dessa uppgifter har också jämförts med elevernas betyg.

Pettersson, A. (1995). *Matematiken i utvärdering av grundskolan 1995. Analys av elevernas arbeten med mer omfattande matematikuppgifter i åk 9*. Stockholm: Lärarhögskolan i Stockholm. PRIM-gruppen. Rapport nr 13. Beställs från PRIM-gruppen.

A23 Matematik – ett kärnämne, NämnarenTEMA

Denna bok uppmärksammar övergången från grundskola till gymnasieskola samt tar upp elevers och lärares syn på matematik och matematikundervisning. De aktiviteter och studieuppgifter som beskrivs är aktuella i båda skolformerna. Boken tar upp undersökande arbetssätt, problemlösning och utvärderingsformer, samverkan mellan matematik och karaktärsämnen samt differentiering.

Emanuelsson, G., Johansson, B., Nilsson, M., Olsson, G., Rosén, B., & Ryding, R. (Red) (1995). *Matematik ett kärnämne*. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik. ISBN: 91-88450-04-X. Beställs från NCM.

A234 Engagerande matematik – genom spänning, fantasi och skönhet

Matematikundervisningen har under århundraden varit receptartad. Det fornegyptiska härmningsmönstret "Gör så här, så blir det rätt" har inneburit snäv resultatriktning. Författaren argumenterar för mer matematik i skolmatematiken, ty den erbjuder spänning, skönhet och magi: Verkliga problem är alltid spännande. Symmetrier och lösningar kan förundra oss genom sin skönhet. Tal och former i naturen, tekniken och konsten talar till oss existentiellt – låt dem göra det! Boken har ett omfattande bildmaterial.

Ulin, B. (1996). *Engagerande matematik genom spänning, fantasi och skönhet*. Solna: Ekelunds. ISBN 91-7724-724-8. Beställs från Ekelunds förlag.

B1 Det matematiske barnet

Utgangspunkt for denne norske bok er at barn er nyfikne og har behov av å erövra kunnskap. De utforskar sin omgjeving på mange mått og i ulike samanheng, tenker, funderar og drar sluttsatser. Författarna sätter fokus på hur barn utvecklar, använder och uttrycker sitt kunnande i förskola och de första skolåren. Exempel visar på bredd och djup i barns tänkande och på hur de använder och utvecklar kunnande i olika situationer och språkliga uttrycksformer. Genom att exemplen är knutna till ämnesinnehållet ska lärare stimuleras att utmana barns kompetens och förmågor att lära matematik. Boken bygger på beprövd erfarenhet, forskning och utvecklingsarbete med exempel från praktik och strävar efter att ge vuxna redskap så att de inser och får förståelse för barns möjligheter.

Solem Heiberg, I. & Lie Reikerås, E K. (2001). *Det matematiske barnet*. Oslo: Caspar Forlag. ISBN 82-90898-26-6. Beställs från Caspar forlag.

B1 De små teller også. Matematikken i førskolepedagogikken

Boken tar opp kommunikasjon i førskolepedagogisk tradisjon. Den tar opp matematik i barns aktiviteter ved lek og undersøkingar, där det finns utrymme för fantasi och undringar med behov av systematisering och ordning. Matematiken ses inte isolerad utan som en del av helheten. Det handlar också om hur man undviker att enbart hänvisa till att matematiken "finns överallt" utan att oppmärksamma den spesielt. Barn förtjänar intresserade samtalspartners, som inte tänker matematik hela tiden, men "tillräckligt ofta". De förtjänar medspelare som är intresserade av deras matematik och boken ger stöd för det arbetet. Den är skriven för førskollärare, lärare och studerande.

Johnsen Høines, M. (Red). (1996). *De små teller også – matematikken i førskolepedagogikken*. Landås,; Caspar Forlag ISBN 82-90898-08-8. Beställs från Caspar forlag.

B12 Specialpedagogikk. Temanummer: Matematikkvansker

I dette temanummer om matematiksvårigheter bidrar forskare og lærere med sin syn på orsaker till svårigheterna. Diskussionen förs i ett brett perspektiv där t.ex. sociokulturella, neurobiologiska, språkliga, didaktiska och psykosociala aspekter diskuteras. Temanumret inneholder variationsrike pedagogiske forslag på hur förskolan og skolan kan möta barn og ungdomar utifrån deras erfarenheter og behov.

Spesialpedagogik nr 3/01. *Temanummer: Matematikkvansker*. Oslo: Laererforbundet. ISSN: 0332-8457. Beställs från Spesialpedagogikk, Wergelandsveien 15, 0167 Oslo. Tel: 22 03 00 00.

B1234 Eleven matematikken og samfundet

Denna norska bok handlar om elevers uppfattningar av och lärande i matematik. Särskilt behandlas krav på undervisningen med hänsyn till elevers uppväxt. Det läggs vikt på matematik som språk. Utifrån begrepp som egendomsförhållande diskuteras funktionell och instrumentell kunskap och analyseras sammanhang mellan innehåll och metoder i undervisningen. De två sista kapitlen behandlar inlärningsvårigheter speciellt i tidiga år.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet*. Larvik: NKI-forlaget, ISBN 82-562-1357-4. Beställs från Caspar forlag.

B1234 Matematikken og Verden

Matematik uppfattas av många som ett svårt och världsfrånvänt ämne. Denna bok vill ge en annan bild och ger exempel på ett ämne med vitala relationer till världen, till naturen och till dagligt, samhälleligt liv. Matematiken har en femtusennårig historia och den är som aldrig tidigare en skapande och problemlösande verksamhet. Ett antal danska utövare beskriver matematikens natur och roll. Boken vänder sig till nyfikna läsare utan specialistkunskaper i matematik, till lärare och matematikstuderande.

Niss, M. (Red.) (2001). *Matematikken og Verden*. Viby J: Fremad. ISBN 87-557-2336-5. Beställs från Fremad, Købmagergade 62, 1150 København K, Fax +45 3341 1811, [www.fremad.dk]

B1234 Hul i kulturen. Sæt matematik og matematikundervisning på plads i kultur- og samfundsbilledet

Denna debattbok från initiativet Matematikundervisning og demokrati i Danmark stimulerar till diskussion om matematikens funktion i kultur och samhälle. Vi lever i en värld fylld av teknologisk utveckling. Hur kan vi acceptera att stora delar av befolkningen obekymrat slår sig till ro med att de inte förstår matematik. Det innebär en fara för demokratin. Ämnet bör avmystifieras. Lärare i matematik måste få bättre samtalspartners i pedagogiska och kulturella sammanhang. Det finns problem i undervisningen på alla nivåer, men också stora möjligheter till lösningar och förbättringar. En förutsättning är en insats av alla som undervisar i matematik, av föräldrar och av politiker.

Nissen, G. & Blomhøj, M. (1994). *Hul i kulturen*. Köpenhamn: Spektrum/Forum. ISBN 87-7763-124-2. Beställs från Spektrum Forlag, Købmagergade 62, 1150 København K. Fax +45 3341 1811, [www.krak.dk]

C1234 Mathematics and Democracy

Vår vardag är rik på tal och kvantiteter, vilket gör det allt svårare för oss som medborgare att förstå och hantera vår egen sociala livsvärld. Traditionell matematikundervisning räcker inte till för att hantera detta medborgerliga och i grunden demokratiska problem. Det är huvudtemat i denna bok som istället pläderar för numeracy eller quantitative literacy som ett väsentligt undervisningsmål.

Medborgare med quantitative literacy behöver kunna mer än bara formler och ekvationer. Man behöver kunna närma sig och värdera situationer utifrån kännedom om kvantitativa data och förstå meningen med tal, kunna se fördelar och nackdelar med att tänka kvantitativt, kunna tänka själva och ställa relevanta frågor. Det gäller att både vilja och kunna engagera sig i en föränderlig värld. Att kunna tänka och värdera kvantitativt ses som något betydligt mer än att bara kunna räkna uppgifter i en lärobok i matematik.

Steen, L. A. (Ed). (2001). *Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy*. Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines. ISBN: 0-9709547-0-0 Beställs från [www.woodrow.org/nced/mathematics_democracy.html]

C1234 Principles and Standards for School Mathematics

Avsikten med NCTMs *Principles and Standards for School Mathematics* är att den ska vara en resurs och en vägledning för alla som vill förändra matematikundervisningen för elever från K-12 (från förskola till och med gymnasium) i USA. Förutom lärare som undervisar i matematik har alltså boken andra målgrupper, t.ex. föräldrar, skolledare och politiker. Detta dokument kan sägas sammanfatta internationella strömningar kring skolmatematik och barns matematiklärande. Boken inleds med en vision och sex överordnade principer. Därefter följer ett antal *standards* i form av bärande idéer, eller "stråk", som genomsyrar skolämnet, samt en utförlig beskrivning av vad som kan förväntas på olika stadier. Boken är en bra källa för konkreta idéer, men ger också underlag för en diskussion om hur kursplaner och undervisning ska utvecklas.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, Va: National Council of Teachers of School Mathematics. ISBN 0-87353-480-8. Beställs från [www.nctm.org/] (Här finns även elektronisk version.)

C4 Perspectives on Adults Learning Mathematics. Research and Practice

Denna bok kan betraktas som ett referensverk inom området vuxnas matematiklärande. Den är skriven av internationellt kända företrädare inom ett relativt nytt område inom matematikdidaktiken. Tanken med boken är att presentera området vuxnas lärande för en internationell publik. Den som vill få en överblick av vad som görs och vilka tankar som finns kring vuxnas matematiklärande har här en bra utgångspunkt.

Coben, D., J. O'Donoghue, & G.E. FitzSimons, (Eds.) (2000). *Perspectives on Adults Learning Mathematics. Research and Practice*. 2000. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. ISBN 0-7923-6415-5. Beställs från [www.wkap.nl].

Beställningsadresser

Alfabeta Bokförlag AB , Box 4284, 102 66 Stockholm.

Webb: www.alfamedia.se

E-post: info@alfamedia.se

Caspar forlag a/s, Postboks 2966 Landås, 5825 Bergen, Norge.

Webb: www.caspar.no/

E-post: post@caspar.no

Tel: 55 28 92 60, fax 55 28 89 98,

Ekelunds Förlag AB, Box 2050, 169 02 Solna.

Webb: www.ekelunds.se

E-post: education@ekelunds.se

Tel 08-82 13 20, fax 08-83 29 56

Gleerups, Box 367, 201 23 Malmö.

Webb: www.gleerups.se/

E-post: info@gleerups.se

Tel: 040-20 98 00

Liber distribution. Publikationstjänst 162 89 Stockholm.

E-post: skolverket.lds@liber.se

Tel: 08-690 95 76, fax: 08-690 95 50,

NCM, Göteborgs universitet, Vera Sandbergs allé 5A, 412 96 Göteborg.

Webb: ncm.gu.se/formular/

E-post: bestallning@ncm.gu.se

Tel: 031-773 22 03, fax: 031-773 22 00

PRIM. Lärarhögskolan i Stockholm, Box 34 103, 100 26 STOCKHOLM.

E-post: prim-gruppen@lhs.se

Tel: 08- 737 56 46, fax: 08-618 35 71

Studentlitteratur, Box 141, 221 00 Lund.

E-post: info@studentlitteratur.se

Webb: www.studentlitteratur.se

Tel 046-31 20 00, fax 046-30 53 38

Litteratursökning via Internet

http://ncm.gu.se/index.php?name=homepage_namnaren

Nämnarens sökbara databas med sammanfattande beskrivningar av innehållet i ca 2 200 artiklar som publicerats i tidskriften de senaste 25 åren.

<http://ncm.gu.se/index.php?name=litteratursokning-startsida>

NCM:s resurssida för litteratursökning. Sökmöjligheterna varierar mellan de olika tidskrifterna, databaserna och bibliotekskatalogerna. Från denna sida kan man t.ex. söka i LIBRIS, den nationella bibliotekskatalogen för universitets- och forskningsbibliotek samt flera folkbibliotek. Katalogen förtecknar beståndet av böcker och tidskrifter på ca 200 bibliotek samt artiklar ur tidskrifter och årsböcker. Här kan du också söka i Lokala kataloger. Många bibliotek har sina kataloger utlagda på Internet. Där finns uppgifter om antal exemplar och om tillgänglighet. Med lånekort till biblioteket kan man också beställa boken eller ställa sig i kö. På hemsidan finns också adresser till många svenska och utländska förlag och bokhandlare.

Doktorsavhandlingar

- Ahlberg, Ann (1992). *Att möta matematiska problem: en belysning av barns lärande*. (Göteborg studies in educational sciences, 87). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Allwood, Carl Martin (1982). *Knowledge, technique and detection of errors in statistical problem solving* (Göteborg psychological reports, 12(1982):2). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Bentley, Per-Olof (2003). *Mathematics teachers and their teaching: a survey study* (Göteborg studies in educational sciences, 191). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Bergqvist, Tomas (2001). *To explore and verify in mathematics* (Doctoral thesis – University of Umeå, Department of Mathematics, 21). Umeå: Umeå University.
- Bergsten, Christer (1990). *Matematisk operativitet: en analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematik* (Linköping studies in education. Dissertations, 29). Linköping: Linköping University.
- Chen, Xiaoda (1996). *Quality schooling with limited resources: an international comparison of mathematics and science education in China, Korea and Hungary* (Studies in comparative and international education, 37). Stockholm: Stockholm University.
- Dahland, Göte (1998). *Matematikundervisning i 1990-talets gymnasieskola: ett studium av hur en didaktisk tradition har påverkats av informationsteknologins verktyg* (Rapport/ Institutionen för pedagogik, Göteborgs universitet; 1998:05). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Dahllöf, Urban (1960). 1957 års skolberedning. *Kursplaneundersökningar i matematik och modersmålet: empiriska studier över kursinnehållet i den grundläggande skolan* (Statens offentliga utredningar, 1960:15). Stockholm: Stockholms högskola.
- Dunkels, Andrejs (1996). *Contributions to mathematical knowledge and its acquisition* (Doctoral thesis / Tekniska högskolan i Luleå, 202D). Luleå: Luleå University.
- Ekeblad, Eva (1996). *Children – learning – numbers: a phenomenographic excursion into first-grade children's arithmetic* (Göteborg studies in educational sciences, 105). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Ekman, Bengt (1968). *Teaching geometry in grade four: three experimental studies carried out in a practical educational situation* (Studia scientiae paedagogicae Upsaliensia, 10). Stockholm: Norstedt.
- Emanuelsson, Jonas (2001). *En fråga om frågor: hur lärares frågor i klassrummet gör det möjligt att få reda på elevernas sätt att förstå det som undervisningen behandlar i matematik och naturvetenskap* (Göteborg studies in educational sciences, 168). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Engström, Arne (1997). *Reflektivt tänkande i matematik: om elevers konstruktioner av bråk* (Studia psychologica et paedagogica. Series altera, 128). Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Hedenborg, Maj-Lene (1999). *Cognitive strategies in simple addition and subtraction: process models based on analyses of response latencies and retrospective verbal reports*. Stockholm: Stockholm University.
- Hedén, Rolf (1990). *Logoprogrammering på mellanstadiet: en studie av fördelar och nackdelar med användning av Logo i matematikundervisningen under årskurserna 5 och 6 i grundskolan* (Linköping studies in education. Dissertations, 28). Linköping: Linköping University.
- Hellström, Leif (1985). *Undervisningsmetodisk förändring i matematik: villkor och möjligheter* (Studia psychologica et paedagogica. Series altera, 79). Malmö: Liber Förlag/Gleerup.
- Holmberg, Ingrid (1975). *Effects of some trials to improve mathematics teaching* (Studia psychologica et paedagogica. Series altera, 26). Lund: Gleerup.
- Håstad, Matts (1978). *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går – idag – i morgon* (Trita-EDU, 016). Stockholm.

- Häggbloom, Lisen (2000). *Räknespår: barns matematiska utveckling från 6 till 15 års ålder*. Åbo: Åbo Akademis förlag.
- Jonsson, Karl Gustav (1919). *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*. Uppsala: Almqvist & Wiksell.
- Kristiansson, Margareta (1979). *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69: Knowledge of mathematics curriculum 62, curriculum 69* (Göteborg studies in educational sciences, 29). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Larsson, Inger (1973). *Individualized mathematics teaching : results from the IMU project in Sweden* (Studia psychologica et paedagogica. Series altera, 21). Lund: Lund University.
- Lingefjärd, Thomas (2000). *Mathematical modeling by prospective teachers using technology*. Athens: University of Georgia.
- Lithner, Johan (2001). *Undergraduate learning difficulties and mathematical reasoning* (Tekster fra IMFUFA, 399). Roskilde: Roskilde University.
- Löthman, Anna (1992). *Om matematikundervisning – innehåll, innebörd och tillämpning : en explorativ studie av matematikundervisning inom kommunal vuxenutbildning och på grundskolans högstadium belyst ur elev – och lärarperspektiv* (Uppsala studies in education, 40). Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Möllehed, Ebbe (2001). *Problemlösning i matematik: en studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4–9* (Studia psychologica et paedagogica. Series altera, 157). Malmö: Lärarhögskolan.
- Neuman, Dagmar (1987). *The origin of arithmetic skills: a phenomenographic approach* (Göteborg studies in educational sciences, 62). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Noonan, Richard D. (1976). *School resources, social class, and student achievement: a comparative study of school resource allocation and the social distribution of mathematics achievement in ten countries* (IEA monograph studies, 5). Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Palm, Torulf (2002). *The realism of mathematical school tasks: features and consequences* (Doctoral thesis / University of Umeå, Department of Mathematics, 24). Umeå: Umeå University.
- Pettersson, Astrid (1990). *Att utvecklas i matematik: en studie av elever med olika prestationsutveckling* (Studies in education and psychology, 25). Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Postlethwaite, Neville (1967). *School organization and student achievement: a study based on achievement in mathematics in twelve countries* (Stockholm studies in psychological studies, 15). Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Runesson, Ulla (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* (Göteborg studies in educational sciences, 129). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Samuelsson, Joakim (2003). *Nytt, på nytt sätt?: en studie över datorn som förändringsagent av matematikundervisningens villkor, metoder och resultat i skolor 7–9*. Uppsala: Uppsala universitet.
- Sandahl, Anita (1997). *Skolmatematiken – kultur eller myt?: mot en bestämning av matematikens didaktiska identitet* (Linköping studies in education and psychology, 51). Linköping: Linköping University.
- Warg, Lars-Erik (1983). *The effect of task content on performance in probabilistic inference tasks* (Abstracts of Uppsala dissertations from the Faculty of Social Sciences, 28). Uppsala: Uppsala universitet.
- Werdelin, Ingvar (1958). *The mathematical ability: experimental and factorial studies* (Studia psychologica et paedagogica. Series altera, 9). Lund: Gleerup.
- Wictorin, Mauritz (1952). *Bidrag till räknefärdighetens psykologi : en tvillingundersökning*. Göteborg: [Gumpert].
- Wikström, Hugo (1997). *Att förstå förändring: modellbyggande, simulering och gymnasieelevers lärande* (Göteborg studies in educational sciences, 114). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Wyndhamn, Jan (1993). *Problem-solving revisited: on school mathematics as a situated practice* (Linköping studies in arts and science, 98). Linköping: Linköping University.
- Åberg-Bengtsson, Lisbeth (1998). *Entering a graphicate society: young children learning graphs and charts* (Göteborg studies in educational sciences, 127). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.