Skolverket

Matematikspråk och bevis i matematik

Marie Sjöblom, Malmö universitet

En del av matematiken, där korrekt användning av matematikspråk blir extra viktig, är matematiska bevis. I matematiska bevis används ord, begrepp, symboler, bilder och fraser på ett speciellt sätt. Genom att strukturera sitt sätt att tänka, skapas en logisk följd av påståenden för att visa en matematisk sats.

Elever i gymnasieskolan har ibland svårt att se igenom hur matematiska bevis skapas och vad som krävs för att genomföra ett bevis. Det finns också speciella konstruktioner i språket som

- om… så, vilket tyder på en implikation eller
- om och endast om, vilket tyder på en ekvivalens.

I den här texten fokuseras svårigheter och möjligheter kopplat till matematikspråk och bevis i matematik genom tre konkreta exempel. Reflektioner görs också över vad lärare kan göra för att stötta elevers utveckling av matematikspråk kopplat till matematisk bevisföring.

Exempel 1: att förstå vad ett bevis är

Säg att elever ska bevisa följande påstående: Produkten av två udda tal är udda. Ett matematiskt bevis för detta skulle till exempel kunna se ut så här:

> Påstående: Produkten av två udda tal är udda.
>
> Bevis: Låt $a = 2m + 1$ och $b = 2n + 1$ vara två godtyckliga udda tal, där m och n är heltal. Produkten ges av $a \cdot b = (2m + 1) \cdot (2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1 = 2p + 1$, där p är ett heltal. Då $2p + 1$ är ett udda tal, har vi visat att produkten är udda.

För att läsa och förstå det matematiska beviset finns det flera olika begrepp som eleverna behöver förstå: udda, godtycklig, produkt.

Vidare behöver det finnas en matematisk förståelse för vad ett bevis är – att det ska vara ett logiskt resonemang som visar att påståendet är sant för alla tal, att det inte räcker med att ge ett antal exempel. Ett vanligt fel som elever gör vid bevisuppgifter är att de försöker troliggöra med hjälp av sifferexempel. Här kanske de upptäcker att $5 \cdot 7 = 35$

och $9 \cdot 3 = 27$ och $3 \cdot 5 = 15$. Alla dessa multiplikationer ger udda produkter och eleverna drar därefter slutsatsen att det alltid är så, utan att alls genomföra något matematiskt bevis.

Ett annat vanligt fel som elever gör är att inte förstå att ett udda tal kan skrivas på formen $2n + 1$ eller att de låter båda talen vara $2n + 1$. Eftersom det inte står något i påståendet om att talen måste vara lika blir detta fel. Påståendet ska gälla för alla udda tal. Här behövs en förståelse för vad godtyckligt står för.

För att stötta eleverna i matematisk bevisföring, är det viktigt att som lärare vara medveten om vilka matematiska begrepp som eleverna behöver kunna och vilka ord som kan vara svåra i ett bevis. Det är också viktigt att synliggöra vanliga strategier för elever som kan användas i liknande bevisuppgifter till exempel att alla udda tal kan skrivas på formen $2n + 1$.

Exempel 2: att upptäcka språkliga svårigheter i bevisföring

I vanligt språk förekommer orden **om** och **så** i många olika meningskonstruktioner. När de används i matematikspråket har de ett speciellt signalvärde. En svårighet för elever här kan vara att förstå vad som är antagandet och vad som ska bevisas.

Säg till exempel att vi vill visa påståendet: Om x är ett jämnt tal, så är x^2 delbart med fyra. I detta påstående så är orden **Om… så** tydligt markerade och skickar en signal till eleverna att under antagandet att x är ett jämnt tal ska de visa att då är x^2 delbart med fyra. Denna sats kan emellertid formuleras på många olika sätt, till exempel:

- När x är ett jämnt tal, så är x^2 delbart med fyra
- Om x är ett jämnt tal, är x^2 delbart med fyra
- x^2 är delbart med fyra om x är ett jämnt tal
- x^2 är delbart med fyra när x är ett jämnt tal

I några av dessa påståenden kan det vara svårare att se igenom att det fortfarande är en implikation som ska bevisas. För elever med annat modersmål än svenska kan det vara ännu svårare att se dessa språkliga mönster. Här behöver lärare tänka på att elever med erfarenheter från skolgång i andra länder kan ha lärt sig andra metoder och sätt för att lösa uppgifter och att föra bevis.

Även i detta bevis finns det ett antal matematiska begrepp som elever behöver förstå för att kunna genomföra beviset. Förutom att veta vad ett jämnt tal är, eller vad x^2 betyder, så finns en svårighet i ordet delbart, då detta betyder olika saker i olika delar av matematiken. Tidigare i grundskolan har eleverna arbetat med att dela tal. De har lärt sig om bråktal och olika divisionsalgoritmer. Underförstått i denna uppgift är att påståendet handlar om heltal och att x är ett heltal. Vidare att något är delbart innebär att det ska vara jämnt delbart, det vill säga att divisionen ska gå jämnt upp och resultera i ett heltal. För att stötta elevernas utveckling av matematikspråket kan en strategi för lärare vara att uppmärksamma speciella ord och underförstådda antaganden.

Exempel 3: att se igenom strukturen i ett bevis

Det finns många olika sorters bevis som elever behöver lära sig att förstå och genomföra. Förutom att förstå vad ett bevis är innehåller gymnasiekurserna i matematik direkta bevis, motsägelsebevis, geometriska bevis, trigonometriska bevis och induktionsbevis. Det finns många olika sätt att genomföra bevisen, men det som är gemensamt är att det finns en struktur i olika sorters bevis, som behöver synliggöras för eleverna.

En tydlig struktur för ett motsägelsebevis skulle till exempel kunna se ut så här:

1. Skriv upp satsen.
2. Antag motsatsen till det du vill visa.
3. Visa att ditt antagande leder till en motsägelse.
4. Drag slutsats om att satsen är sann.

Genom att synliggöra strukturen i beviset och göra några exempel tillsammans med eleverna, kan eleverna förstå både helheten och delarna i beviset.

Strukturen för ett induktionsbevis skulle kunna byggas så här:

1. Skriv upp satsen.
2. Visa grundfallet – att satsen är sann för ett visst numeriskt värde på n.
3. Gör ett induktionsantagande, antag att satsen gäller för värdet n.
4. Visa att satsen gäller för värdet $n + 1$.
5. Drag slutsats med hjälp av induktionsprincipen att satsen är sann.

Liknande strukturer kan användas för att synliggöra för elever vad som förväntas i bevisuppgifter inom geometri där de behöver använda matematiska begrepp för att motivera sina påståenden till exempel, Vinklarna u och v är lika stora eftersom de är likbelägna. Detsamma gäller bevis av trigonometriska identiteter, där elever behöver ha förståelse för trigonometriska formler, förstå likhetstecknets betydelse och matematisk skillnad mellan uttryck och ekvation.

Möjligheter med matematisk bevisföring

Det finns inte bara svårigheter med matematikspråket kopplat till matematisk bevisföring, utan även möjligheter. Även om matematiska bevis kan ses som en speciell genre inom matematikspråket, innehåller de ofta många olika delar av matematiken som elever behöver förstå på djupet. Detta kan ge upphov till bra diskussioner om matematiska begrepp och uttryckssätt, och ge elever möjlighet att utveckla sin matematiska kommunikationsförmåga. För elever med andra modersmål än svenska kan det vara extra viktigt att få fördjupa sig i ett område som detta.

Tips på vidare läsning om matematiska bevis

I denna artikel beskriver Bergvall (2022) en studie om bevis i svenska gymnasieskolan och hur läromedel hanterar matematisk bevisföring.

Bergwall, A. (2022). Bevis och resonemang. *Nämnaren 3*(2022), 23–30. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2023/09/2330_22_3.pdf

I denna artikel beskriver Mannila (2010) en studie hur strukturerade härledningar kan öka den matematiska förståelsen utifrån en studie utförd i Finland.

Mannila, L. (2010). Strukturerade härledningar ökar förståelsen. *Nämnaren 3*(2010), 18–25. https://ncm.gu.se/pdf/namnaren/1825_10_3.pdf