Skolverket

Matematik – Gymnasieskola

Strukturer, ord och symboler i matematiska textuppgifter

Lisa Österling, Stockholms universitet

Den här texten innehåller en analys av lösningsstrukturen i två olika matematiska uppgifter. Uppgifterna tillhör två olika matematiska textgenrer – problemlösning och inommatematisk lösning. Inom genrepedagogiken utgår man från modeller för texter i genren, och tittar på vad som kan ingå och vad som brukar ingå. Vi går här igenom strukturen och vad som karaktäriserar språket i lösningarna till uppgifterna.

Strukturen i lösningen till en problemlösningsuppgift

Pólyas har fyra steg för problemlösning:

1. Förstå problemet
2. Planera för vilken strategi som ska användas
3. Använda strategin
4. Se tillbaka på problemet

Dessa fyra steg är inte bara en lämplig strategi för att lösa problem, utan de utgör också en lämplig struktur för att presentera lösningar till matematiska problem. Här diskuteras först en lösning där eleverna tydligt utgår från strategierna i sin lösning, därefter hur en lösning som inte utgår från strategierna kan vara strukturerad.

Exempel 1: I vårt första exempel har fyra elever som går första terminen i gymnasiet utgått från Pólyas strategier för att lösa problemet **Gurkan**:

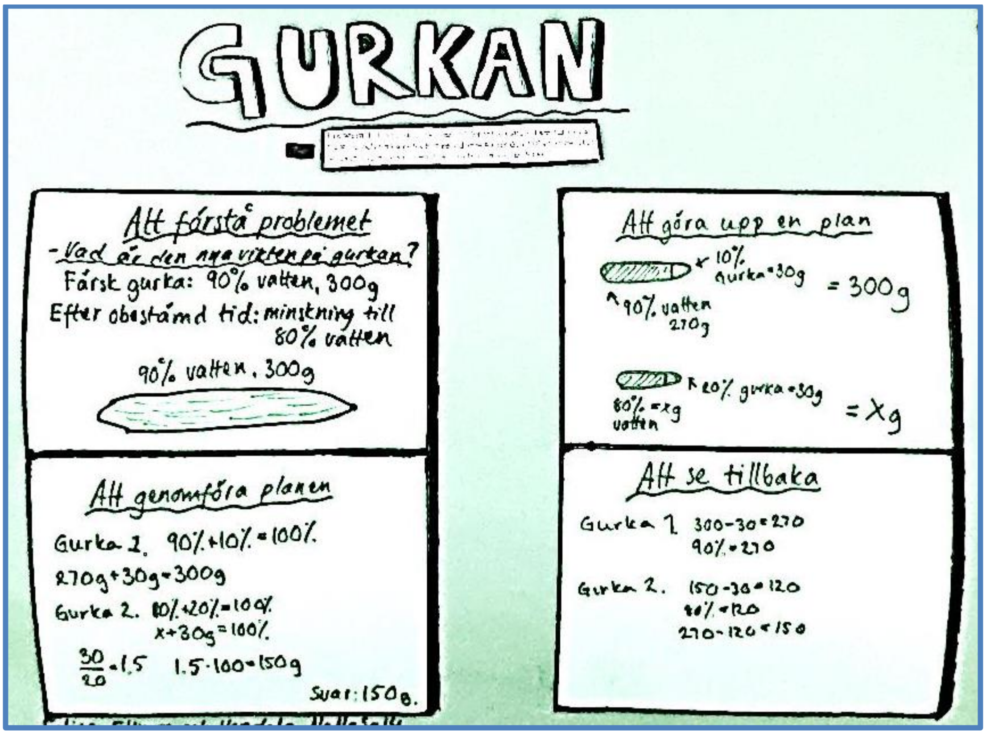
En färsk gurka innehåller 90 % vatten. Den får ligga framme och torka, och efter en tid innehåller den 80 % vatten. Hur mycket väger den nu, om den från början vägde 300 g?

Eleverna väljer att redovisa sina strategier och sin lösning som en väggtidning, se Figur 1.

Skolverket

Figur 1

Väggtidning där fyra elever använder strukturen från strategier för problemlösning



Vi analyserar vad de olika stegen innebär.

1. Att förstå problemet: Här sammanfattas vad som är givet i uppgiften, vad som är frågan, och en bild illustrerar situationen vi utgår ifrån, en gurka som väger 300 g och innehåller 90 % vatten.
2. Att göra upp en plan: Planen i det här fallet innebär att arbetet med bilder fortsätter, där en bild representerar utgångssituationen och en ny bild visar den nya situationen när gurkan torkat. I bilden anges allt som går att ta reda på, att vikten av den del av gurkan som inte är vatten måste vara 30 g i båda situationerna. Beteckningen x införs för vikten i den nya situationen.
3. Att genomföra planen: Sambanden som visades i bild i förra steget genomförs nu som beräkningar. Beräkningarna genomförs i det här fallet utan motiveringar.
4. Att se tillbaka: Här kontrolleras svaret genom att det jämförs med det som går att sluta sig till från uppgiften.

Strukturen för lösningen överensstämmer här med strategin för att lösa problemet. På så sätt kommer kunskap om hur lösningar presenteras också att kunna utgöra ett stöd för en problemlösningsstrategi.

Strukturen i en lösning till en inommatematisk uppgift

Exempel 2: Nästa exempel är ett lösningsförslag från tentamen till introduktionskurs i matematik på ingenjörsutbildningen. Det rör matematikinnehåll från gymnasiet, och får illustrera vilka förväntningar som finns på hur studenterna kan uttrycka sig språkligt i en lösning på högskolan (Kungliga Tekniska Högskolan, 2009).

Uppgift: Bestäm var parabeln $y = x^2 - 4x + 3$ skär *x*-axeln.

Lösning: Alla punkter på *x*-axeln har *y*-koordinat 0. Det betyder att kurvan skär *x*-axeln i punkter där *y*-koordinaten är noll, och *x*-koordinaten uppfyller att $y = x^2 - 4x + 3$. Denna andragradsekvations lösningar får vi med lösningsformeln $x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} = 2 \pm 1$. Skärningspunkternas *x*-koordinater är alltså 1 respektive 3, och *y*-koordinaterna, som sagt, 0. De sökta skärningspunkterna är alltså (1, 0) och (3, 0).

Svar: (1, 0) och (3, 0)

Finns motsvarande struktur här?

1. Här återges inte frågan i lösningen, men i stället anges de **utgångspunkter** man behöver känna till för att kunna lösa problemet, vilket i princip är att omformulera frågan:
   Alla punkter på *x*-axeln har *y*-koordinat 0. Det betyder att kurvan skär *x*-axeln i punkter där *y*-koordinaten är noll och *x*-koordinaten uppfyller att $x^2 - 4x + 3$ =0.
2. En **plan** finns inte tydligt angiven här, kanske för att uppgiften löses genom en tydlig procedur.
3. **Proceduren genomförs** och **resultatet** presenteras:
   Denna andragradsekvations lösningar får vi med lösningsformeln till $= 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} = 2 \pm 1$. Skärningspunkternas *x*-koordinater är alltså 1 respektive 3, och *y*-koordinaterna, som sagt, 0. De sökta skärningspunkterna är alltså (1, 0) och (3, 0).
4. I stället för att utvärdera resultatet och titta tillbaka anges här ett **tydligt svar** på den fråga som ställts. Det innebär att svaret anges som koordinater för punkter, inte som lösningarna till andragradsekvationen. Svar: (1, 0) och (3, 0)

Utifrån dessa två exempel, kan vi sammanfatta en modell för strukturen genom att ange vad som kan ingå i de olika delarna i en lösning till en matematikuppgift.

Del 1: **Inledning** där man kan välja att sammanfatta frågan, ge utgångspunkter, beskriva samband som behövs för att lösa uppgiften, och att göra en bild

Del 2: **En plan** där man kan välja att göra bilder, införa beteckningar, fler/nya samband som behövs för att lösa uppgiften, ställa upp ekvationer eller formler.

Del 3: **Genomförande av planen** där man ofta genomför beräkningar och presenterar ett resultat av beräkningarna.

Del 4: **Avslutning** där man kan se tillbaka och utvärdera svaret, eller se till att man har svarat tydligt på det som efterfrågas.

Det här är en sammanfattning efter att ha tittat på två lösningar till problemlösningsuppgifter. Kanske behövs inte alltid alla delar i en problemlösningsprocess. Kanske behöver vi ibland lägga till fler. Troligen är vissa genrer, som bevis, strängare vad gäller strukturen. Där gäller det att ännu mer noggrant precisera vad som ska ingå i varje steg.

Ord och symboler i lösningar

I de två presenterade lösningarna finns det likheter och olikheter i det matematiska språket. För att analysera språket är det möjligt att göra det stegvis genom att titta på allmänt intryck, matematikord, symboler, bilder och beräkningar, händelser och deltagare. Denna analys sammanfattas i tabellen nedan.

	Exempel 1: Gurkan	**Exempel 2: Skärningspunkter**
Allmänt intryck	Exempel från någon form av verklighet, bilder används som del i lösningsstrategin, mycket beräkningar och mindre förklarande text och matematiska symboler. Tydlig struktur med rubriker och indelningar i fält.	Inommatematisk kontext, utan bilder, med gott om matematikord och matematiska symboler, men ändå en del förklarande text.
Matematikord		Parabeln, *x*-axeln, punkter, x-koordinater, andragradsekvation, lösningar, lösningsformel, skärningspunkterna, *y*-koordinater.
Symboler, bilder, beräkningar	**Bilder** på gurkan i de olika situationerna. **Symboler:** *%, g, x* **Beräkningar:** *90 % vatten 300 g*	$y = x^2 - 4x + 3$ $x^2 - 4x + 3 = 0$ (1, 0) och (3, 0) **Beräkningar:** $x = 2 \pm \sqrt{2^2 - 1} = 2 \pm 1$

	10 % gurka = 30g, 90 % vatten = 270 g *20 % gurka = 30 g* *80 % = x g vatten* *90 % + 10 % = 100 %* *70 g + 30 g = 300 g* *80 % + 20 % = 100 %* *x+30g = 100%* *30/20=1,5* *1,5 ·100=150*	
Händelser, verb	Minskning - substantiv, nominalisering	Bestäm, skär, är, uppfyller, får Här har verben **bestäm** och **uppfyller** en specifik roll
Deltagare, subjekt i satsen	Om rubrikerna ingår, så är författaren den som underförstått deltar i texten, genom att förstå, genomföra, göra upp en plan och se tillbaka.	Oftast är ett matematiskt objekt deltagare **punkter på x-axeln** är **Skärningspunkternas x-koordinater** är **x-koordinaten** uppfyller Ett exempel med närvaro av läsare/författare i texten: får **vi**

Analysen visar att det är ganska stora språkliga skillnader mellan lösningarna i de två olika textgenrerna. Olika språkkrav ställer olika behov av stöttning i fokus. Särskilt elever som inte har svenska som sitt första språk har behov av stöttning.

Referenser

Kungliga Tekniska Högskolan. (2009). *Modelltentamen i matematik*. http://www.math.kth.se/math/GRU/2009.2010/SF1611/SF1611.modellt.2009.Svar.pdf