Skolverket

Matematik – Gymnasieskola

Språk och uttrycksformer: formellt och informellt matematikspråk

Lisa Österling och Anette de Ron, Stockholms universitet

I den här texten fokuseras hur det informella och formella matematikspråket har olika funktioner för lärande och språkutveckling. Utifrån ett exempel diskuteras hur mottagaren till text och sammanhang påverkar vilket matematikspråk elever väljer att uttrycka sig på. Exempel visar också hur lärare kan arbeta för att elever ska få möjlighet att utveckla sitt matematiska skriftspråk genom att använda flera matematiska uttrycksformer. På så sätt har eleverna större möjlighet att anpassa språket i sina matematiska texter till konventioner och förväntningar i ett matematiksammanhang.

Informellt eller formellt språk

En lärare gav vid ett prov i matematik 3c en uppgift som lyder:

Uppgift: *En kompis till dig, som läser samma mattekurs som du, kommer fram till dig och säger 'Jag fattar inte ett dugg av det här med derivata.' Hjälp din kompis genom att förklara vad derivata är.*

Förklara så utförligt och på så många sätt du kan.
Du ska inte härleda eller beskriva deriveringsreglerna.

Uppgiften har tidigare förekommit på ett nationellt prov i matematik C (Lindström, et al., 1996). Det språkliga syftet med att föra in en tydlig mottagare, en kompis som läser matematik, är att eleven ska få möjlighet att använda ett språk som är anpassat till mottagaren. Det gör det möjligt för eleven att uttrycka kunskaper om begreppet derivata med det språk som eleven har tillgång till. Eleven kan tillåtas utföra uppgiften utifrån sin förståelse genom att den signalerar låga krav på ett formellt matematiskt språk. Men det medför också att texten kommer att anpassas efter mottagaren och inte efter matematikens konventioner. Nedan svarar en elev i matematik 3, David, som kan en hel del om derivata, på uppgifter ovan:

Derivatan är en funktion eller tal för riktningskoefficienten. Med hjälp av att derivera en funktion kan du ta reda på vad riktningskoefficienten, lutningen, är var som helst i funktionen genom att sätta in det värdet på x i din deriverade funktion.

Skolverket

Tanken med uppgiften är alltså att David ska kunna berätta om begreppet derivata med egna ord och att inte kopiera formelbladet eller bokens formuleringar om hur derivatan definieras eller används.

Davids lösning är en enkel förklaring av vad derivata kan vara och på hur han anser att man kan känna igen den. Redan språket i själva uppgiftsformuleringen är informellt, kompis, jag fattar inte ett dugg, vilket också inbjuder till att anpassa språket i förklaringen till språket i uppgiften. Strukturen är inte särskilt tydlig i förklaringen. De typiska symbolerna och matematiska uttrycksformerna saknas. Det leder till att svaret inte är tillräckligt precist. Det går inte att utläsa när en derivata är detsamma som riktningskoefficienten, eller vilka andra möjligheter det finns att använda eller beskriva derivatan.

Att ett informellt språk används i lösningen kan också bero på att David valt att begränsa sitt svar med hänsyn till hur mycket kompisen klarar att höra. Det finns fler tecken på att förklaringen är formulerad med hänsyn till kompisen som mottagare. Mottagaren är närvarande i texten genom ordet du, och verb som är typiska för matematiken, derivera, blandas här med vardagliga uttryck, ta reda på. Att ta reda på är inte särskilt precist, det kan tolkas både som beräkningar och som härledningar av riktningskoefficienten.

Läraren märkte efter provet att de flesta elever, liksom David, inte lyckats förklara på så många olika sätt. Hon valde därför att använda provet formativt. Genom att låta eleverna arbeta vidare med uppgiften efter provtillfället fick de möjlighet att utveckla språket och kommunikationen. Eleverna placerades i par som fick följande uppdrag:

1. Beskriv begreppet med ord, på en generell nivå, med rätt begrepp.
2. Beskriv begreppet genom en bild, till exempel en graf).
3. Beskriv begreppet med ett räkneexempel, visa med ett exempel och lös det.

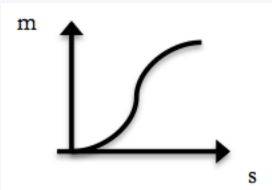
Läraren uppmanade eleverna att bläddra igenom läroboken för att hjälpas åt att hitta lämpliga begrepp att använda. Ett nytt språkligt syfte är nu att eleverna ska använda matematikens ord, symboler och representationer för att lösa uppgiften. Efter arbetet i par fick eleverna var och en lämna in ett nytt svar. Davids nya svar lyder efter bearbetningen:

1. **Beskriv begreppet med ord, på en generell nivå, med rätt begrepp.**

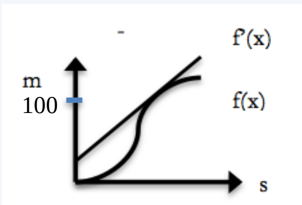
Derivatan beskriver hastighetsökningen i en bestämd punkt. För att ta reda på det kan man antingen använda deriveringsreglerna för att skriva ut en allmän formel för den funktionen, derivatans funktion. Eller utgår man från originalfunktionen och använder $\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)-(x)}{(y+h)-y}\right)$ i nämnaren kommer endast h stå kvar men i täljaren sätter man in de värden vi har och löser sedan uppgiften. När vi sedan har förenklat så mycket som möjligt sätter vi h som 0 och löser sedan talet. Därefter har vi fått derivatan i den punkten vi satte. Derivatan är en tangent till funktionen där den bara rör ett ställe.

I den här lösningen används de matematiska orden på ett tydligare sätt. Det finns också matematiska symboler. Dessutom är lösningen mer avslöjande, då det är tydligt vad David fortfarande är osäker på, till exempel att ställa upp differenskvoten. Här är det oklart om han menar att derivatan är tangentens lutning eller tangentens ekvation. I det första svaret var det tydligare att derivatan beskriver riktningskoefficienten, även om det inte angavs att det var riktningskoefficienten för tangenten.

2. **Beskriv begreppet genom en bild, till exempel en graf.**



Vill ta reda på hastigheten efter 100 meter.



Cykelfärd till skolan.

3. Beskriv begreppet med ett räkneexempel, ställ upp ett exempel och lös det.

$f(x) = x^2 + 5x - 3$, $x = 2$

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) = \frac{\big((x+h)^2+5(x+h)-3\big)-(x^2+5x-3)}{h} = \frac{\big(4+h^2+4h+10+5h-3\big)-(4+10-3)}{h} =$$

$$\frac{11+h^2+9h-11}{h} = \frac{h^2+9h}{h} = h + 9 = 0 + 9 = 9$$

Derivatan i $x = 2$ är 9

Deriveringsregel $f(x) = kx^n$

$f'(x) = n \cdot k \cdot x^{n-1}$

$f'(x) = 2x + 5$

$f'(2) = 2 \cdot 2 + 5 = 9$

Här är det tydligt att David verkligen använder matematikens uttrycksformer; grafer, symboler och begrepp. Det blir också tydligt för läraren vad i Davids matematiska språk som fortfarande kan förbättras. Det är till exempel otydligt vad graferna visar, när enheten men inte storheten anges på axlarna. Det hade varit bra att tydligare beskriva att det är tangenten som anger hastigheten. Det är genomgående tydligt att David förstått att derivatan handlar om lutningen i en punkt. I det andra exemplet används genomgående matematiska symboler, och i räkneexemplet används både regeln för att derivera potensfunktioner och differenskvoten och den här gången är kvoten rätt uppställd. Fortfarande finns delar som kan utvecklas för att lösningen ska få bättre kvalitet, limes saknas, $x = 2$ sätts in före förenklingen, och $\Delta x/\Delta y$ står i fel ordning.

Det är en stor skillnad mellan provsvaret och de bearbetade svaren, om man betraktar vilka olika uttrycksformer som används. I och med att David använder ett mer formellt matematikspråk blir det också synligt vilka misstag han gör och läraren har möjlighet att återkoppla på de detaljer som behöver rättas till. I det första svaret fanns det till exempel ingen möjlighet att upptäcka brister i matematikspråket, eftersom det inte användes där. En formativ klassrumspraktik utgör på så sätt en del av det språkutvecklande arbetet.

Från en uppgift där eleverna fick använda ett informellt språk för att beskriva ett begrepp, utvecklades deras lösningar genom en skrivprocess där matematikens uttrycksformer betonades. På så sätt har eleverna tagit ett steg mot att behärska och använda ett mer formellt matematikspråk.

Utveckla språket

När matematikundervisningen planeras ska hänsyn även tas till matematikspråket, så att eleverna ges möjligheter att utveckla och använda informella ord, formella ord och symboler. Planering av undervisning bör utgå från de tre grundprinciperna för en språk- och kunskapsutvecklande undervisning:

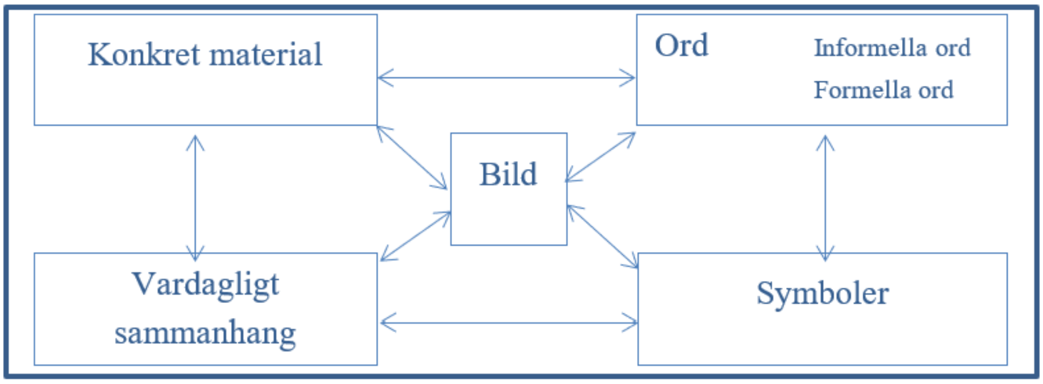
1. Att undervisa genom sammanhang.
2. Att främja aktiv språkanvändning.
3. Att ge språklig stöttning.

I exemplet som presenterats här utgår planeringen från att eleverna ska arbeta med översättningar mellan de olika delarna av matematikspråket, men först efter att de fått uttrycka kunskaper om begreppet med ett eget språk.

Ett liknande sätt att arbeta kan vara att låta eleverna använda olika uttrycksformer med hjälp av en tanketavla. Tanketavlan ger en bild av sambanden mellan uttrycksformerna. Idén bakom tanketavlan bygger på Richard Leshs (1987) klassiska schematiska bild över representationer och deras kopplingar till varandra. I figur 1 finns en omarbetad uppdelning av de fem representationer som Lesh beskrev.

Figur 1

Variant på tanketavla fritt efter Leshs representationer



Organisering av undervisning med stöd i tanketavlor kan gå till på olika sätt. Vad som står i de olika rutorna i tanketavlan, uttrycksformerna, skiljer sig åt mellan olika modeller och kan också vara olika beroende på elevgrupp, matematiskt område, med mera.

Planera för progression

När läraren har syftet klart och har bestämt vilka begrepp och symboler man vill göra eleverna medvetna om gäller det att planera för vilka steg man vill att eleverna ska ta från vardagsspråk in i matematikspråk samt vilka uttrycksformer man vill att de ska öva på. I detta sammanhang kan nämnas att elever med andra förstaspråk än svenska ofta har vardagligt språkbruk knutet till sitt modersmål.

I exemplet ovan har det informella och det formella språket olika funktion. Redan i tidiga skolår går det att träna eleverna i att hålla isär dessa funktioner, både när de talar och när de skriver. Förutsättningen är att läraren planerar för och stöttar elevernas matematiska språkutveckling samt har höga krav på språkanvändningen (Smit & van Eerde, 2013). För att få med alla elever från början och sedan få dem att komma vidare i sin utveckling av matematikspråket bör planeringen följa en genomtänkt progression. När ett område introduceras bör det förankras i de erfarenheter och informella ord som eleverna är bekanta med, i enlighet med grundprincip 1 för en språk- och kunskapsutvecklande undervisning i matematik.

Grundprincip 2 förespråkar en aktiv språkanvändning i matematikklassrummet. Genom en hög grad av elevmedverkan i diskussionerna kan läraren tillsammans med klassen skapa en gemensam språklig kunskapsgrund. Den innehåller såväl informella ord som formella ord och symboler.

Språk och uttrycksformer

En medvetenhet om vilket matematikspråk och vilka uttrycksformer som kan kopplas till ett kunskapsområde i matematik ökar möjligheterna till att arbeta språkutvecklande.

Olika sammanhang och mottagare för matematisk information innebär olika förväntningar på språket eftersom det ska fylla olika funktioner. Hur en uppgift är formulerad medför en viss förväntan på språket. I den här texten har resonemang förts om skillnaden på språket i en lösning i ett informellt sammanhang, berätta för en kompis, med en lösning i ett tydligt matematiksammanhang. Genom att läraren uppmuntrar och betonar vikten av att olika matematiska uttrycksformer och begrepp används hjälper läraren eleverna att få syn på konventioner och förväntningar i matematikspråket. Eleverna blir också mer medvetna om och får tillgång till olika matematiska uttrycksformer. De har då möjlighet välja vad som passar att använda i olika sammanhang. På så sätt berikas elevernas matematikspråk. Vad gäller flerspråkiga elever som kämpar med att lära sig svenska och matematik samtidigt är det bra att komma ihåg att elever som gått i skola i andra länder kan vara ovana vid att kommunicera matematik. Det kan vara enklare för dem att även öva kommunikation på sitt modersmål om det finns flera elever med samma modersmål i klassen.

När eleverna arbetar med tanketavlor, tillsammans eller enskilt, får de möjlighet att använda olika uttrycksformer för att utveckla begrepps- och kommunikationsförmågan.

Referenser

Lesh, R. (1987). The evolution of problem representations in the presence of powerful conceptual amplifiers. I C. Janvier (Red.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (s. 197–206). Lawrence Earlbaum Associates.

Lindström, J-O., Nyström, P. & Palm, T. (1996). *Nationella kursprov i matematik, Kurs A, C och E, vt 1996. Pm Nr 118*. Enheten för pedagogiska mätningar, Umeå universitet.

Smit, J., & van Eerde, D. (2013). What counts as evidence for the long-term realisation of whole-class scaffolding? *Learning, Culture and Social Interaction*, *2*(1), 22–31.