Skolverket

Stöttning genom språk och uttrycksformer

Kicki Skog och Lisa Österling, Stockholms universitet

Den här texten handlar om hur språk kan utgöra utgångspunkten för att stötta elevers matematiklärande. På så sätt anknyter texten till en princip för språklig stöttning, det vill säga att erbjuda en varierad och långsiktig språklig stöttning. Långsiktig språklig stöttning är extra viktigt för elever som lär sig svenska samtidigt som de lär sig matematik.

Först ges en bakgrund till hur forskare benämner olika former av stöttning som känns igen från matematiklärares undervisning. Därefter diskuteras ett exempel på stöttning där dynamisk programvara används i undervisningen.

Stöttning – en bakgrund

Gibbons (2013) använder Vygotskijs begrepp *stöttning*, scaffolding, för att beskriva tillfällig hjälp som leder elever mot nya färdigheter (Vygotskij, 2001). Det innebär att stöttningen ska utgöra ett pedagogiskt stöd för att eleverna senare ska kunna genomföra liknande uppgifter utan hjälp.

Stöttning i matematik kan handla om att med så många verktyg som möjligt, till exempel ord, bild, dramatisering eller dynamisk programvara, tydliggöra matematiska begrepp och fenomen. Stöttning kan också handla om att erbjuda verktyg för eleverna att utveckla långsiktiga strategier i arbetet med matematik. Det kan vara såväl verktyg för att lösa problem som verktyg för att föra ett matematiskt resonemang. På så sätt kan språkets och matematikens olika uttrycksformer användas för att stötta matematiklärande: att låta elever använda olika uttrycksformer stöttar begreppsbildningen när ett nytt begrepp introduceras, och långsiktigt kan eleverna använda sig av uttrycksformerna vid matematisk modellering, problemlösning och kommunikation i andra kontexter. I detta sammanhang kan elever som fortfarande utvecklar sitt svenska språk ges möjlighet att resonera på sitt modersmål. Även modersmålet kan ses som en uttrycksform.

Stöttning på makro- och mikronivå

Hammond och Gibbons (2005) beskriver den stöttning lärare använder på både makro- och mikronivå. Stöttning på makronivå, designed-in scaffolding, handlar om designen av undervisningen, det vill säga den planering som läraren gör utifrån kunskaper om elevernas förförståelse och genom noggrant urval av vilka uppgifter som ska göras samt i vilken ordning de ska komma. Just denna ordning, så kallad sekvensering, av uppgifter, i kombination med kunskaper om elevernas förkunskaper har visat sig vara mycket central för stöttning på makronivå. Relationen mellan uppgifterna har visat sig vara viktigare än varje enskild uppgift (Hammond & Gibbons, 2005). Sekvensering innebär att ett nytt innehåll, eller en större uppgift, delas upp i mindre uppgifter. Dessa delar presenteras sedan i en logisk följd där möjligheter att successivt öka den matematiska förståelsen och de språkliga uttryck som behövs tydliggörs. Den språkliga delen i stöttningen innebär att ord, begrepp och metoder bearbetas, diskuteras och exemplifieras genomgående för att stötta eleverna i att bygga upp ett relevant matematikspråk. För flerspråkiga elever kan den språkliga delen bearbetas även på modersmålet, antingen med stöd av en lärare som behärskar elevens förstaspråk eller en kamrat i klassen.

Stöttning på mikronivå, interactional scaffolding, bygger också på lärarens kunskaper om eleverna och ämnet, men sker i interaktion med eleven utifrån de behov hen visar för tillfället. Även om mikrostöttningen ges i relation till elevens behov i stunden, så bygger den på väl genomtänkta och förberedda ställningstaganden av läraren. Läraren kan som exempel be eleverna att skriva och berätta för en kompis, på det språk eleven behärskar bäst. Med utgångspunkt i stöttning på mikronivå kan läraren uppmuntra eleven att motivera varför hen har graderat axlarna på ett visst sätt, vad som händer då kurvan ändrar lutning eller försöka tolka derivatan på flera olika sätt. Stöttning på mikronivå blir på så vis en del av den formativa klassrumspraktiken.

Strategier för makrostöttning

Läraren planerar makrostöttningen inför undervisningen. Den planerade stöttningen ökar möjligheten för att mikrostöttningen ska fungera bra. En mindre medveten mikrostöttning riskerar att sluta i så kallad lotsning, det vill säga där lärarens återkoppling till elever är av formen, gör så här så blir det rätt. En genomtänkt makrostöttning utgår från att läraren förutser vad inom kunskapsområdet eleverna upplever som nytt och svårt. Strategier för stöttning behöver väljas så att de fokuserar just de förutsedda svårigheterna. De strategier som presenteras och exemplifieras i det här avsnittet är omformuleringar, sekvensering, visualisering och kontrastering.

Omformuleringar

Ibland kan elever ges i uppgift att berätta om ett matematiskt begrepp för en kompis. Istället för att läsa en formell definition av begreppet i ett läromedel, behöver eleverna med egna ord formulera det de kan om begreppet. En sådan uppgift är ett sätt att stötta elevers förståelse av begreppet genom att låta dem omformulera sina kunskaper med ett informellt språk. Det finns matematiska samband som är svåra att relatera till en informell eller vardaglig kontext, men lärare kan använda andra vägar för att göra matematiska begrepp och samband begripliga.

Enligt Lundberg och Sterner (2002) kan omskrivningar av matematiska symboluttryck orsaka problem för elever, då textuppgifter ofta innehåller många formella ord som ska tolkas, till exempel addera, formulera en regel och generellt. Betrakta följande exempel:

Exempel 1:

> Skriv uttrycket på faktorform: $x^2 - x - 2$.

Exemplet innehåller två formella ord, **uttrycket** och **faktorform**, med en precis matematisk innebörd. Exemplet innehåller också symboler. Betydelsen av ordet faktorform kan vara nytt och svårt för eleverna. Först behöver de komma ihåg vad det är innan de sedan också behöver veta hur de ska göra det som efterfrågas. Lundberg och Sterner skriver att om lärare är medvetna om att formella matematiska ord kan ställa till problem, så kan lärarna lättare förtydliga betydelsen med texten eller frågan för eleverna. För att möta detta kan läraren muntligt omformulera texter med hög koncentration av formella ord till mer informella ord, målande texter och fler förklarande meningar. En lärare som omformulerar exempel 1 enligt dessa principer skulle kunna uttrycka sig:

> Uttrycket $x^2 - x - 2$ är en summa av termer, där x^2, x och 2 är de olika termerna, som skiljs åt av tecken för addition eller, som här, subtraktion. För att skriva uttrycket på faktorform behöver vi istället ett uttryck som innehåller en multiplikation av faktorer, till exempel en multiplikation av två parenteser.

Formuleringen multiplikation av två parenteser är informell och skulle troligen inte fungera i skriven text. Men när lärare muntligt förklarar nya och svåra begrepp används sådana informella uttryck för att stötta eleverna i att förstå uppgiften. Lärarens stöttning innehåller också förklaringar och en målande bakgrund till exemplet. Anledningen till att omformulera texter är att eleverna ska kunna gå vidare och ta sig an kognitivt utmanande uppgifter. Lärarens stöttning leder också till att eleverna befäster orden och begreppen, och att de får strategier för att själva omformulera uppgifter. Gymnasiematematiken innehåller ofta ord och begrepp som är nya och svåra, det är en del av att lära sig matematik. Att omformulera texter i matematik hjälper både andraspråkselever och elever som läser matematik på sitt modersmål (Gibbons, 2013).

Exempel 2:

> En butik rabatterar en tröja som kostat 399 kr med 30 %. I priset ingår moms. Hur mycket är den nya momsen som ingår i priset efter rabatt?

I exempel 2 är det ord som rabatterar och moms, från en yrkes- eller samhällskontext, snarare än formella matematikord som utgör svårigheten. Eleverna behöver inse innebörden av att rabattera och av moms. En viktig stöttning när det gäller procent är att omformulera problem till att handla om ökning och minskning och att strukturera hur de olika delarna förhåller sig till varandra. En lärare som muntligt omformulerar exempel 2 skulle kunna uttrycka sig:

> Vi kallar tröjans pris för försäljningspriset. Försäljningspriset är från början 399 kr, men ändras. Att tröjan rabatteras med 30 % innebär en minskning med 30 % av försäljningspriset. Momsen beräknas på försäljningspriset efter förändringen. Momsen utgör 20 % av försäljningspriset på kläder.

Vad läraren gör är dels att vara tydlig med vad som är en minskning, dels att införa begreppet försäljningspris, som är mer tydligt och entydigt än tröjan kostar och priset efter rabatt. Där finns ett tydligt förhållande till momsen, i och med att momsen utgör en del av försäljningspriset. Den förklarande texten utgör en stöttning för eleverna att hitta ord och strategier för att själva kunna omformulera olika typer av procentproblem.

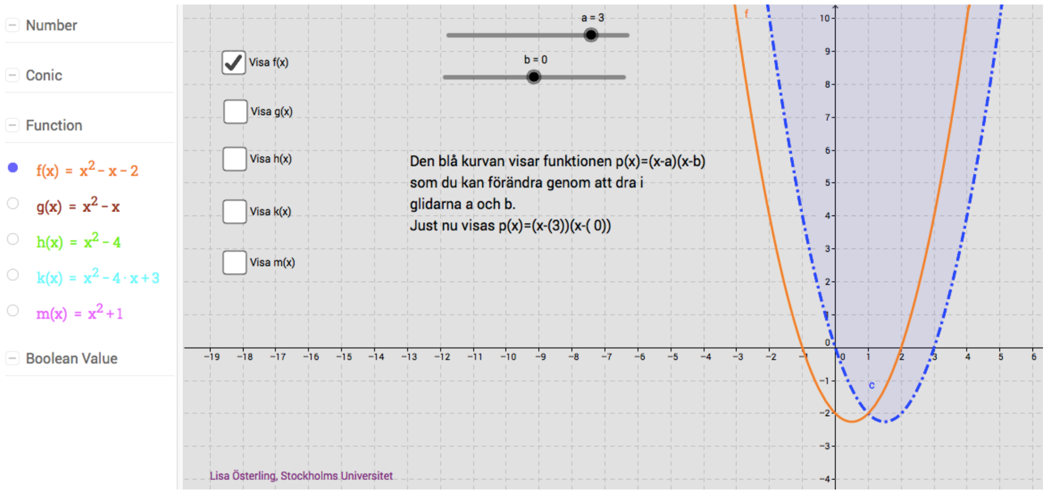
Sekvensering

Att planera undervisning i matematik kan innebära att man sekvenserar innehållet så att var och en av delarna i en serie exempel eller uppgifter bygger på varandra och bidrar till en helhet. I det här avsnittet diskuteras ett exempel om andragradsfunktioner. Jämfört med den räta linjens ekvation är det svårare att koppla andragradsfunktionens uttryck till grafens utseende. En möjlighet är att skriva funktionen på faktorform, men bara det steget är svårt för många elever. Det som lärare kan misstänka är nytt och svårt är till att börja med att skriva en andragradsfunktion på faktorform, men också att inse hur nollställen kan identifieras genom faktorerna.

Programmet GeoGebra används här för att visualisera, tillsammans med frågor som kontrasterar och sekvenserar. Matematikkunskap som kan vara ny och svår, men även spännande och viktig att lära sig, är hur de olika parametrarna i en andragradsfunktion på faktorform påverkar utseendet på kurvan. I detta exempel finns två parametrar med. Som en del av sekvenseringen har andra möjliga parametrar valts bort. Istället sparas de till ett senare tillfälle. I GeoGebra kan man, som i exemplet nedan, använda en konstruktion där parametrarna utgörs av glidare som kan ändras.

Figur 1

Två andragradsfunktioner från http://ggbtu.be/m1198345



Genom såväl graf som algebraiskt uttryck kan man jämföra de olika funktionerna *p*, blå och *f*, orange. Den dynamiska möjligheten som glidarna erbjuder gör att det enkelt går att förändra parametrarna för *p*, och därigenom enkelt undersöka flera fall. Det gör det möjligt att undersöka funktioner som har några gemensamma egenskaper, men som skiljer sig åt på några punkter.

Sekvenseringen genom den här uppgiften erbjuder en progression och stöttar på så sätt eleverna att stegvis kunna lösa en svårare fråga. Istället för att direkt be eleverna jämföra de olika formerna att skriva andragradsekvationer har frågan delats upp i en sekvens av frågor:

1. Kan du få *p(x)* att sammanfalla med *f(x)*? Hur kan du se i grafen vad *a* och *b* ska vara för att funktionskurvorna ska sammanfalla?
2. Visa *g(x)*, och hitta *a* och *b* så att kurvan för *p(x)* sammanfaller med *g(x)*. Kan du se sambandet mellan funktionsuttrycket för *p(x)* och värdet på *a* och *b*?
3. Svara på samma fråga som i 2, men för *h(x)* och *k(x).*
4. Kan du få *p(x)* att sammanfalla med *m(x)*? Varför/varför inte?
5. Kan du visa algebraiskt att funktionsuttrycken för *p(x)* och *g(x)* är ekvivalenta när kurvorna sammanfaller? På samma sätt, kan du visa att funktionsuttrycket för *p(x)* är ekvivalent med funktionsuttrycket för *h(x)* respektive *k(x)* när kurvorna sammanfaller?

Det går förstås att utveckla övningen genom att ställa fler, mer utmanande frågor till konstruktionen, kanske även översatta till elevers modersmål. Fråga 5 är en början till att generalisera sambandet. Här lämnar eleven GeoGebra för att arbeta med symbolspråket, med algebra. Steget att be eleverna formulera ett generellt samband är viktigt, då det stöttar elever att utveckla det matematiska resonemanget. Sekvenseringen synliggör olika steg i processen. Genom stegen stöttas eleverna i att på lång sikt själva gå igenom samma steg för att komma fram till ett generellt resonemang.

Visualisering

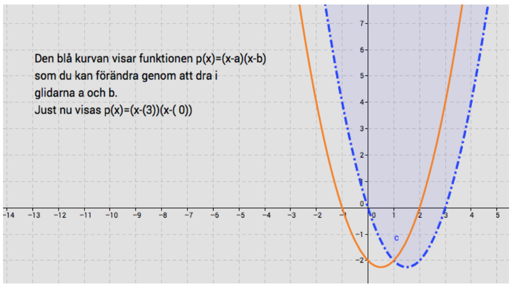
Övningen inleds med en bild av två kurvor. I beskrivningen till konstruktionen anges:

I den här konstruktionen ska du försöka få den blå funktionen att sammanfalla med de andra funktionerna en i taget genom att dra i glidarna *a* och *b*. Första uppgiften är:

1. Kan du få p(x) att sammanfalla med f(x)? Hur kan du se i grafen vad a och b ska vara för att funktionskurvorna ska sammanfalla?

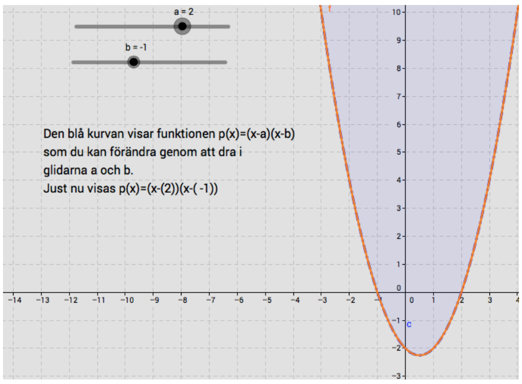
Figur 2

Glidarna a och b förändrar den orangea kurvan



Figur 3

Kurvorna sammanfaller



Den första uppgiften till eleverna är ett tydligt exempel på en visualisering, där eleverna *ser* grafen förändras när de drar i glidarna, de *ser* kurvorna sammanfalla, och de *ser* nollställen och värdena på glidarna tillsammans med funktionsuttrycket. Den första iakttagelsen eleverna behöver göra är att nollställena för funktionen *p* stämmer med värdena på glidaren. Den iakttagelsen behöver användas i alla kommande uppgifter, vilket tydligt gör den till en första del i en sekvens av sammanhängande uppgifter.

Kontrastering

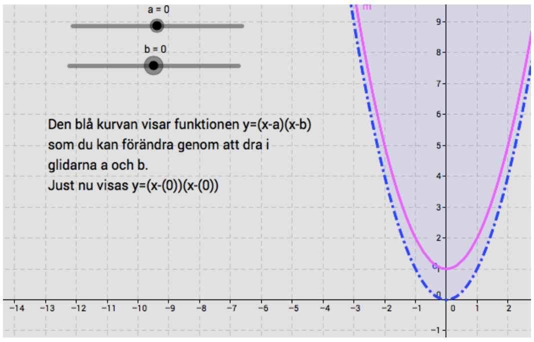
En svårighet med andragradsekvationer är att inte alla andragradsekvationer har lösningar. Ett sätt att illustrera det är att visa att det finns andragradsfunktioner som saknar nollställen. De funktioner som saknar nollställen kontrasteras mot de som har ett eller två nollställen. Kontrasteringen visar begränsningarna för när andragradsekvationer kan faktoriseras i det reella talområdet. För att förstå hela kedjan behöver elever använda en sekvens av samband och bland annat förstå:

- Att ekvationens rötter motsvaras av funktionens nollställen.
- Om funktionen skrivs på faktorform kan man identifiera nollställen i faktorerna.

I det här exemplet har eleverna fått undersöka det sistnämnda, att nollställen återfinns i ekvationen om den skrivs på faktorform. I sista uppgiften saknar *m(x)* nollställen:

Figur 4

En funktion som saknar nollställen



4. Kan du få *p(x)* att sammanfalla med *m(x)*? Varför/varför inte?

Den rosa kurvan är *m(x)*. Tidigare har eleverna använt nollställena för att hitta *a* och *b*, och på så sätt anpassa *p*. Eftersom *p* hela tiden har minst ett nollställe (eftersom *a* och *b* är reella tal) kan inte *p* sammanfalla med *m* när *m* saknar nollställen.

Fortfarande går det att lösa uppgiften genom att visualisera, alltså genom att se samband i konstruktionen, utan att göra algebraiska manipulationer.

Skolverket

Exemplen på stöttning, visualisering, kontrastering och sekvensering handlar om andragradsfunktioner, men kan överföras till andra områden i matematiken.

Att förutsäga vad som kan vara nytt och svårt för eleverna

Läraren kan ofta förutsäga vad som kommer att vara nytt och svårt för elever. Det är kring det matematikinnehållet och det matematikspråket det är till stor hjälp med en planerad stöttning, en så kallad makrostöttning. Vanligtvis dyker även oförutsedda svårigheter upp under lektionerna, vilket ställer krav på mikrostöttning. Genom en väl planerad makrostöttning ökar möjligheterna till en framgångsrik mikrostöttning. De strategier för stöttning som belysts i den här artikeln har olika funktion:

- Omformulering – att utveckla texter med hjälp av exempelvis informella ord, förklarande text och text som kan vara målande och beskrivande. Om läraren gör omformuleringen stöttar det elever genom att de bättre förstår texten. Långsiktigt får elever strategier att själva omformulera texter.
- Sekvensering – att dela upp ett svårt problem eller ett komplicerat samband i en sekvens av mindre delar, som bygger på varandra och leder till fram till att en större uppgift kan lösas eller ett större samband förklaras. En sekvensering kan med fördel avslutas med en generalisering eller utmaning. Det stöttar elever genom att de kortsiktigt kan angripa problemet och långsiktigt genom att de får strategier att själva sekvensera sin problemlösning.
- Visualisering – att synliggöra ett fenomen i konkret handling eller i rörlig eller tydligt sekvenserad illustration. Det stöttar elever genom att erbjuda ytterligare ett kommunikativt uttryck för ett begrepp eller ett samband.
- Kontrastering – att sätta ett begrepp i relation till ett annat, där egenskaperna är skilda och därmed möjliggör identifiering av det specifika begreppet. Det stöttar elever genom att begreppet blir tydligare.

Stöttning i matematik innebär att eleverna ska kunna använda matematikspråk och olika matematiska uttrycksformer för att utveckla sina kunskaper kring matematikinnehållet. Genom att använda makrostöttning, alltså att planera för omformuleringar, visualiseringar och kontrasteringar i en tydligt sekvenserad undervisning kan eleverna på lång sikt tillägna sig och använda strategierna för stöttning självständigt.

Referenser

Gibbons, P. (2013). *Stärk språket stärk lärandet. Språk- och kunskapsutvecklande arbetssätt för och med flerspråkselever i klassrummet.* Hallgren & Fallgren.

Gibbons, P., & Hammond, J. (2005). Putting scaffolding to work: The contribution of scaffolding in articulating ESL education. *Prospect: an Australian journal of TESOL, 20*(1), 6.

Sterner, G., & Lundberg, I. (2002). *Läs-och skrivsvårigheter och lärande i matematik.* Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Vygotskij, L. (2001). *Tänkande och språk*. Daidalos.

Österling, L. (2015) *Andragradsfunktionen på olika form.* Geogebratube. http://tube.geogebra.org/student/m1198345