

# Bedömning av kunskap för lärande och undervisning i matematik

*Skolverket*

ASTRID PETERSSON  
PROFESSOR, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Bedömning är en ständig följeslagare till undervisning och kan uppfattas på olika sätt. Den kan uppfattas mycket snävt och innebära prov och likställas enbart med bedömning av kunskap, men den kan också ha och har numera en mycket bredare och djupare innebörd, bedömning för lärande och för undervisning. Forskning har visat att bedömning rätt använd kan ha stor betydelse för den enskilde elevens lärande.<sup>1</sup>

En självklarhet men värd att lyfta fram är att vi endast kan bedöma den visade kunskapen. Vi kan aldrig säga att en elev inte kan, utan vi kan bara påstå att en elev inte har visat en viss kunskap. Att visa sin kunskap och få möjlighet att göra det ställer krav både på den som ska visa den och på den person som kunskapen ska visas för. För att börja med det senare; Vi lärare måste ordna situationer och ställa frågor, föra samtal på ett sådant sätt att eleverna får möjlighet att visa sina kunskaper. Eleverna behöver vara medvetna om att de måste visa sina kunskaper för att dessa ska kunna bedömas. Vilka hinder kan finnas för eleven att visa sin kunskap? En orsak kan vara att eleven helt enkelt inte vill visa den eller att hon/han inte vet vilken kunskap som efterfrågas. Sättet att fråga kan hindra eleven att visa sin kunskap. En episod som inträffade för mig var när jag frågade en liten pojke hur gammal han var. Han svarade inte på frågan och jag gjorde det som man inte borde, jag ställde om frågan igen tills jag förstod att frågan måste omformuleras. Frågan blev i stället ”Hur många år är du?” och jag fick omedelbart svaret ”Jag är tre år och inte gammal, hur gammal är du?” Han visste alltså hur många år han var, men han gav också en antydning om att gammal var för honom detsamma som en ”gammal människa”.

## Vad innebär det att kunna matematik och att lära sig matematik?

Matematik som räkning och enkel geometri är mycket gammal eftersom människan hade ett behov av att kunna bestämma antal (djur, barn mm) och mäta (längd, area, vinkel och tid). Men matematik som intellektuell sysselsättning utan krav på praktisk nytta är också mycket gammal. Vetenskapen matematik utmärks av ett symbolspråk, som är kompakt, koncist och mycket precist. Definitioner och påståenden måste vara glasklara. Matematiken utmärks av att nya teorier och resultat adderas till gamla. Skolmatematiken skulle vara nyttig och praktisk användbar. Därför infördes räkning tidigt i folkskolan under namnet ”de fyra räknesätten i hela tal.” Några årtionden senare infördes geometri för pojkar. De flesta kursplaner för grundskolan har betonat den praktiska färdigheten i räkning.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> se exempelvis Black m fl, 2003; Black & William, 1998; Hattie, 2009; Hodgen & William, 2006; Torrance & Pryor, 1998.

<sup>2</sup> Tambour & Pettersson, 2011.

I och med läroplanen för grundskolan 1994 får syftet med skolmatematiken delvis annat fokus. Där står att skolans ansvar är att varje elev efter genomgången grundskola ”behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet”.<sup>3</sup> I läroplanen står att skolan ska ansvara för det att varje elev efter grundskolan ”kan använda sig av matematiskt tänkande för vidare studier och i vardagslivet”.<sup>4</sup> Kommentarmaterialet i matematik<sup>5</sup> konstaterar att kursplanen i matematik utgår från samma syn på ämnet som kursplanen enligt Lpo 94, däremot skiljer sig den nya kursplanen vad gäller konkretionsgrad. Att kunna matematik är alltså så mycket mer än att kunna ett visst matematikinnehåll i olika situationer och att kunna utföra beräkningar. Det är också väsentligt att kunna lösa problem, att kunna kommunicera sin kunskap, att kunna presentera lösningar och resultat på olika sätt – med handling, bild, tal, skrift och med symboler. Till detta kommer att kunna använda relevanta strategier, modeller och metoder samt att kunna analysera, reflektera och kritiskt granska sina egna och andras lösningar. Dessutom krävs att kunna översätta exempelvis situationer och mönster till matematikens uttrycksformer och symbolspråk.

Även om ämnet matematik är hierarkiskt uppbyggt så lär man sig inte matematik vare sig linjärt eller hierarkiskt. Att lära sig matematik är inte som att klättra upp för en stege utan mer som att utforska och lära känna ett landskap.<sup>6</sup> Hur lärandet går till är mycket individuellt. Vi lär oss på olika sätt och därför är det också viktigt att lärandemiljöerna är flexibla och rika på olika matematiksituationer. Lärande, bedömning och undervisning bildar en triad, som växelverkar med varandra. Ett flexibelt lärande förutsätter att såväl undervisning som bedömning präglas av flexibilitet och tydlighet. Minst lika viktigt är att man är medveten om vad man gör och varför man gör det man gör. Men kanske framförallt att vara medveten om vad man inte gör och varför man inte gör det man inte gör vid bedömning och undervisning.

- Vad handlar undervisningen om och vad handlar undervisningen inte om?
- Vad bedöms av elevernas visade kunskaper och vad bedöms inte?

Att lära sig matematik är också att lära sig ett språk, med olika ord, konventioner, logiska resonemang, begrepp och symboler och att kunna använda det. Matematikens språk kan beskrivas som ett språk bestående av tre olika ordförråd. Ett ordförråd, som är detsamma som vardagsspråket, exempelvis fler, färre, mer, mindre, under, över. Ett annat ordförråd som är unikt för matematiken, som exempelvis nämnare och täljare. Ett tredje ordförråd, där orden har olika betydelser i vardagsspråket och i matematikspråket. Exempel på sådana ord är volym och bråk. När ett begrepp i matematiken ska introduceras för eleverna är det viktigt att vara medveten om dess betydelse och hur begrepp ska introduceras i undervisningen. Att vara förtrogen med det matematiska språket innebär också att kunna översätta vardagshändelser och vardagsspråk till ett matematiskt språk, men också att kunna översätta matematikspråk till vardagsspråk.

---

<sup>3</sup> Skolverket, 2006, s 10

<sup>4</sup> Skolverket, 2011a, s 13

<sup>5</sup> Skolverket, 2011b

<sup>6</sup> Hirst, 1974

<sup>7</sup> Pettersson, 1990

---

Läroplanen betonar en helhetssyn på elevernas kunskaper och kunskapsutveckling. Det är viktigt att eleverna får visa sitt kunnande på så många olika sätt som möjligt. För att kunna göra en så allsidig bedömning som möjligt av elevernas kunskaper är det också viktigt att eleverna får möjlighet att visa sina kunskaper muntligt.

Elever kan arbeta med uppgifter på många olika sätt. De som kommit fram till korrekta resultat kan ha använt olika strategier, exempelvis sådana som är beroende av sitt sammanhang eller mer generella. De elever som kommit fram till felaktiga resultat kan ha gjort fel som är mer tillfälliga, dvs. de förekommer inte systematiskt i elevernas lösningar utan är av mer slumpmässig karaktär. Det finns dock fel som är systematiska, dvs. de uppträder praktiskt taget konsekvent.

Dessa fel kan yttra sig på olika sätt. Ofta tyder detta på brister i begreppsförståelse. De systematiska felen har en tendens att kvarstå över en mycket lång tid, för vissa elever genom hela grundskolan. Skolverket (2008) har i samband med TIMSS-resultaten 2008 redovisat en fördjupad analys av hur elever förstår centrala begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer.

Studier över tid av hur elever löser uppgifter i matematik<sup>7</sup> visar att de elever som har stora svårigheter i matematik under hela sin skoltid har gjort allvarliga fel, som bl.a. visar på stora brister i begreppsförståelsen. Liknande resultat visades i de nationella utvärderingarna 1989, 1992, 1995 och 2003.<sup>8</sup> Det är därför viktigt att dessa elever tidigt uppmärksammas, så att de redan i de tidigare årskurserna kan få tillräckligt med adekvat hjälp. De nationella utvärderingarna visar också att det är vanligare att elever med låga resultat vill be läraren om hjälp oftare än vad de gör. De har i större utsträckning än övriga elever svårt att förstå lärarens förklaringar. De önskar i större utsträckning att de skulle vara bättre i matematik än vad de är. De är i större utsträckning än övriga elever okoncentrerade. Dessa elever har också i större utsträckning än övriga haft stora problem med läsning och skrivning.

Undersökningar av hur elever arbetar med uppgifter i matematik har visat att elever i matematiksvårigheter i större utsträckning än övriga elever visar

- brister i begreppsförståelse,
- felaktiga lösningsstrategier,
- brister i taluppfattning, exempelvis svårt att handskas med små och stora tal,
- svårigheter att hantera ovidkommande information (distraktorer), och
- svårigheter att generalisera sina strategier.<sup>9</sup>

Bedömning har ofta stort inflytande på elevens fortsatta kunskapsutveckling, men också på elevens motivation och självuppfattning.<sup>10</sup>

---

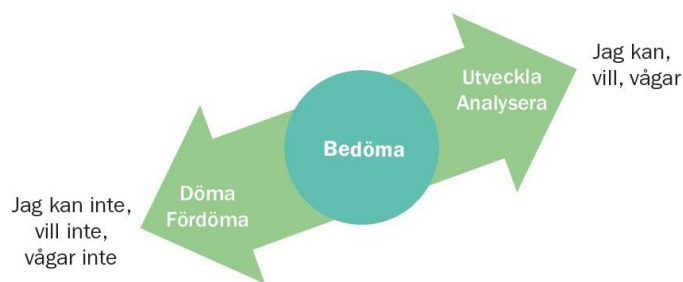
<sup>7</sup> Pettersson, 1990

<sup>8</sup> Pettersson och Björklund Boistrup, 2010

<sup>9</sup> Pettersson, 1993

<sup>10</sup> Pettersson, 2011

En bedömning som stödjer och stimulerar lärandet innebär att elevens visade kunskap analyseras och värderas så att eleven utvecklas i sitt lärande och känner tilltro till sin egen förmåga (jag kan, vill, vågar). I stället för en bedömning som leder till en dom och kanske ett fördömande (jag kan inte, vill inte, vågar inte).



Vad innebär det att utveckla och analysera kunskaper?<sup>11</sup> Ett viktigt inslag är att utgå från elevens arbete i matematik och analysera hur eleven har arbetat med olika uppgifter inom olika matematikområden.

- Vad har eleven förstått och vilka begrepp har eleven kunskaper om och kan använda?
- Vilka lösningsstrategier och metoder har eleven använt? Använder eleven bara strategier/metoder som är beroende av sammanhanget, eller är elevens metoder utvecklingsbara, dvs. har eleven väl fungerande metoder som är generaliserbara?
- Är de fel och missuppfattningar som visar sig allvarliga eller enkla?
- På vilket sätt har eleven analyserat, värderat och dragit slutsatser av lösningens resultat?
- Vilka förmågor visar eleven genom sin lösning?
- Vad ska jag som lärare ge gensvar på och hur ska det ges för att stimulera elevens fortsatta kunskapsutveckling i matematik?
- Vilken återkoppling har jag, som lärare fått på min undervisning i och med att jag analyserat elevernas kunskaper? Bör jag som lärare förändra min undervisning på något sätt, så att den mer svarar mot elevernas behov? På vilket sätt måste undervisningen förändras så att den utvecklar de kunskaper och förmågor som anges i läroplanen (Lgr11)?

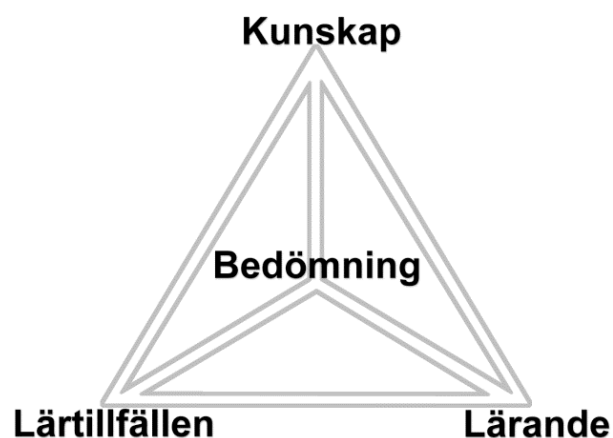
## Den komplicerade bedömningen

I ordboken står att bedömning är ”Värderande utlåtande över något, vanligen grundad på sakliga överväganden”.<sup>12</sup> Men bedömning innebär inte alltid en värdering. Snarare är det kanske så att vi bör undvika värderande omdömen för att bedömning ska vara ett konstruktivt verktyg för elevers lärande och lärares undervisning. Det finns många ordspråk som pekar på de värderande omdömenas konsekvenser, exempelvis ”Var rädd om orden, det sagda ordet ligger kvar och kan göra ont länge” och ”Ord av uppskattning är en nyckel, som passar till många lås.”

<sup>11</sup> Pettersson, m.fl. 2010

<sup>12</sup> Nationalencyklopedin, 1995, sid. 109

Bedömningsprocessen börjar redan med att bestämma vad som är väsentligt att bedöma i matematik. Med utgångspunkt i kursplanen väljer vi för bedömningen vilka förmågor som ska fokuseras och till vilket kunskapsinnehåll de ska kopplas, men inte bara för bedömningen utan också för undervisningen. Eleverna lär sig vid olika tillfällen bl.a. i samband med undervisningen och gör också urval av kunskapsinnehåll.<sup>13</sup>



Vi måste också bestämma oss för hur bedömningen ska gå till för att kunna bedöma det väsentligaste. Därefter följer analys av elevens visade kunskap och tolkning av dessa, dvs. vilka förmågor har eleven visat, vilket centralt innehåll har förmågorna tillämpats på, vad har eleven visat att han/ hon har förstått, vilka lösningsstrategier har eleven använt sig av osv. Slutligen ska vi dra slutsatser av vår analys och tolkning och bestämma oss för vad som ska dokumenteras och kommuniceras. Analysen ska få konsekvenser både för elevens lärande genom vilket gensvar jag ger, men också för matematikundervisningen.

Vi kan som sagt bara bedöma elevens visade förmågor och kunskaper. Vilka situationer och vilka uppgifter och vilket innehåll ska vi då använda för att eleverna ska ha möjlighet att visa sina förmågor? Det är ett viktigt beslut vi måste ta.

Förmågorna uttrycks på följande sätt i kursplanen;

- Formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder
- Använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- Välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter
- Föra och följa matematiska resonemang
- Använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.

<sup>13</sup> Pettersson, 2007

<sup>14</sup> Skolverket, 2011a, sid. 63

## Arbetet med ämnesprovet i årskurs 6

För att vara säkra på att vi låter eleverna visa sina förmågor på det som är väsentligt, analyseras och diskuteras Lgr 11 omsorgsfullt innan prov- och uppgiftskonstruktion vidtar. En provspecifikation sätts samman, som visar vilka förmågor som provas och i vilka uppgifter detta främst görs, vilket centralt innehåll som behandlas och vilka typer av uppgifter som används. Dessutom görs för varje uppgift en uppgiftsspecifikation. En uppgiftsspecifikation innehåller vilka förmågor som respektive uppgift prövar, vilket centralt innehåll eleverna ska visa sin förmåga inom, vilka kvaliteter elevarbetet visar, vilken som är uppgiftstypen (flerval, kortsvar, redogörelseuppgift, muntlig uppgift, skriftlig uppgift osv). Uppgiftsspecifikationen innehåller också hur en uppgiftslösning ska bedömas.

Efter att eleverna arbetat med uppgiften/provet ska en bedömning och tolkning göras av elevarbeten och svar. Detta sker utifrån kunskapskrav som gäller i slutet av årskurs 6.

Till ämnesprovet finns en blankett för att sammanställa elevernas resultat på ämnesprovet (resultatprofil). Men det finns ytterligare en blankett (kunskapsprofil) där hänsyn tas både till elevens prestationer på ämnesprovet och till övriga bedömningar av elevens visade kunskaper. I kunskapsprofilen finns också utrymme för att anteckna hur elev och lärare tillsammans ska gå vidare för att utveckla elevens lärande. Kunskapsprofilen kan också användas för att sammanfatta elevens prestationer och som underlag för att kunna konstatera om eleven nått den lägsta nivå av kunskapskraven och fr.o.m. 2012/2013 för att konstatera vilket betyg, som motsvarar elevens visade kunskaper.

Sedan 2013 ger ämnesprovet i årskurs 6 stöd för betygssättning. Som underlag för detta har den maximala poängen som en elev kan få när den löser en uppgift delats upp i E-poäng, C-poäng och A-poäng. Detta är också utsatt i provet vid varje uppgift. 1/0/0 innebär att uppgiften endast kan ge en E-poäng, 0/2/1 innebär att uppgiften inte kan ge någon E-poäng, men två C-poäng och en A-poäng. Ett provbetyg sätts på elevernas prestationer på hela provet. Det betyder att för varje elev summeras antalet E-poäng, C-poäng och A-poäng för alla delprov. Kravgränserna för respektive provbetyg uttrycks i en totalsumma oavsett vilken nivå som elevens poäng ligger på och dessutom för betygen C- och A som poängsummer på C- respektive A-nivå. Exempelvis kan kravgränsen för provbetyget C uttryckas som att eleven måste minst ha uppnått 75 poäng totalt, därav ska minst 22 poäng vara C-poäng och/eller A-poäng. Om en elevs provresultat visar på ett godkänt provbetyg motsvarande kunskapskravet för minst E har eleven visat de flesta förmågorna som beskrivs i kursplanen i matematik.



---

---

## Referenser

- Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B. & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning. Putting it into practice*. Maidenhead: Open University Press.
- Black, P. & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: Raising Standards through classroom assessment*. London: Kings College School of Education.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 metaanalyses relating to achievement*. London: Routledge.
- Hirst, P. (1974). *Knowledge and the curriculum. A collection of philosophical papers*. London: Routledge.
- Hodgen, J. & Wiliam, D. (2006). *Mathematics inside the black box. Assessment for learning in the mathematics classroom*. London: Department of Education Professional Studies. Kings College.
- Nationalencyklopedin. (1995). *Ordbok A-HZ*. Höganäs: Bra böcker.
- Pettersson, A. (1990). *Att utvecklas i matematik. En studie av elever med olika prestationsutveckling*. Stockholm: Almqvist & Wiksell International.
- Pettersson, A. (1993). Matematik ÅK 9. Huvudrapport. Den nationella utvärderingen av grundskolan. Våren 1992. Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Skolverket.
- Pettersson, A. (2011). Bedömning – varför, vad och varthän? I Lindström, L., Lindberg, V & Pettersson, A.(red). *Pedagogisk bedömning. Om att dokumentera, bedöma och utveckla kunskap*. Stockholm: Stockholms universitets förlag.
- Pettersson, A. (2007). *Pedagogisk bedömning – bedömning för lärande*. I Olofsson, M. (red) *Bedömning, flerspråkighet och lärande. Symposium 2006*. Stockholm: HLS Förlag.
- Pettersson, A. & Björklund Boistrup, L. (2010). National assessment in Swedish compulsory school. I B. Sriraman, (red). *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education. Norway, Sweden, Iceland, Denmark and contributions from Finland*. (pp. 373-385). Charlotte: Information Age Pub.
- Pettersson, A., Olofsson, G., Kjellström, K., Ingemansson, I., Hallén, S., Björklund Boistrup, L & Alm, Ll. (2010). *Bedömning av kunskap – för lärande och undervisning i matematik*. Matematikdidaktiska texter Beprövad erfarenhet och vetenskaplig grund. Del 4. Stockholm: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms universitet.
- Skolverket. (2006). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet*, Lpo 94. Stockholm: Skolverket.

---

---

Skolverket. (2008). TIMSS 2007. *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Analysrapport till 323. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.

Tambour, T. & Pettersson, A (2011). Matematikens karaktär – med ett historiskt perspektiv. I G. Brandell & A. Pettersson (red). *Matematikundervisning Vetenskapliga perspektiv*. (s. 13-40). Stockholm: Stockholms universitets förlag.

Torrance, H. & Pryor, J. (1998). *Investigating formative assessment. Teaching, learning and assessment in the classroom*. Buckingham: Open University Press.