Om ämnet Matematik

Bakgrund och motiv

Skolämnet matematik handlar inte enbart om att räkna och lära sig en samling regler utantill. En del i matematiken är just att hantera procedurer och räkna, men enligt flera studier har detta fått en alltför stor dominans i svensk skolas matematikundervisning. I denna ämnesplan ges därför stort utrymme åt att belysa fler sidor av matematiken – matematik som verktyg, hjälpmedel, språk och logik. Det betonas också att matematikämnets styrka är möjligheten att kunna uttrycka mönster och samband generellt på ett internationellt matematiskt språk.

Målen i matematikämnesplanen uttrycks som matematiska *förmågor*. Förmågorna är generella, dvs. de är inte kopplade till något specifikt matematiskt innehåll. Förmågorna utvecklas dock genom att ett specifikt innehåll bearbetas. Till exempel ska eleverna utveckla förmågan att använda begrepp, men i målet står det inte vilka begrepp det rör sig om. Det centrala innehållet anger vilka begrepp, metoder och sammanhang som eleven ska få möjlighet att möta i undervisningen. De sju förmågor som uttrycks i målen är:

Begreppsförmåga

Att beskriva innebörden av ett begrepp och samband mellan begrepp innefattar att kunna redogöra för definitioner, egenskaper och relationer hos begrepp och samband mellan begrepp. Ett begrepps innebörd, syfte och mening ges framförallt genom *hur* begreppen används i olika sammanhang inom matematiken eller i tillämpningssituationer.

För att kunna kommunicera kring begrepp behöver vi kunna representera begreppet med hjälp olika uttrycksformer, till exempel ord, symboler, bilder och animationer. Begreppet funktion kan exempelvis representeras som en avbildning mellan mängder – men också funktionsgrafer eller beteckningen $f(x)$. Olika representationer gör det lättare att rikta uppmärksamhet mot specifika aspekter hos ett begrepp.

Begreppsförmåga innebär att kunna använda begrepp och veta varför begreppen är viktiga, i vilka situationer de är användbara och hur olika representationer kan vara användbara för olika syften. Sambanden mellan begreppen gör att matematiken formar en helhet och nya begrepp knyts till och fördjupar kunskapen om redan bekanta begrepp.

Procedurförmåga

Procedurförmåga innebär att tillämpa olika matematiska procedurer och rutiner så att säkerhet, precision och effektivitet stärks efterhand. Här ingår att kunna lösa uppgifter av standardkaraktär, som även kan benämnas som rutinuppgifter, men också hantering av digitala verktyg samt att kunna välja en lämplig procedur. Det senare innebär i sin tur att kunna identifiera vilken procedur, normalt i form av en algoritm, som lämpar sig för en viss typ av uppgifter samt att kunna genomföra proceduren.

Problemlösningsförmåga

I syftestexten betonas problemlösningens betydelse både som mål och medel. Detta ställningstagande bygger på både nationella och internationella erfarenheter. Ett *problem* är en uppgift som inte är av standardkaraktär och inte kan lösas på rutin. Det innebär att varje frågeställning där det inte på förhand för eleven finns en känd lösningsmetod kan ses som ett problem. I många av de nationer som är framgångsrika med sin matematikundervisning, bedrivs en undervisning som baseras på problemlösning och där problemen innehåller många kvalitativa nivåer. En sådan undervisning medför att alla elever oberoende av kunskapsnivå, har möjlighet att utmanas och utveckla sina matematikkunskaper

Problemlösning som *mål* innebär att undervisningen ska ge eleverna förmåga att lösa matematiska problem. Problemlösningsförmåga innebär att kunna analysera och tolka problem. Det inkluderar ett medvetet användande av problemlösningsstrategier som att till exempel förenkla problemet, införa lämpliga beteckningar eller ändra förutsättningarna. Att lösa problemet innebär att genomföra ett resonemang där grunderna för resultatets giltighet blir tydligt och resultatet korrekt. Det ingår att värdera både resonemanget och resultatet. Ofta behöver man utföra olika procedurer i problemlösningsarbetet. I problemlösning ingår också att själv och i sampel med andra aktivt kunna formulera och uppmärksamma egna relevanta matematiska problem och vidareutveckla andras.

Problemlösning kan också ses som ett *medel* för att utveckla övriga matematiska förmågor och är därför också en del av det centrala innehållet. Genom att arbeta med strategier för problemlösning kan den ofta kaotiska, kreativa och icke-linjära problemlösningsprocessen lättare systematiseras. Om eleverna ges förutsättningar för metakognitiva reflektioner kan de utveckla sin problemlösningsförmåga. Det handlar om situationer där eleverna får tänka högt, söka alternativa lösningar, diskutera och värdera lösningar, metoder, strategier och resultat.

Modelleringsförmåga

Modelleringsförmåga innebär att kunna formulera en matematisk beskrivning – modell – utifrån en realistisk situation. Denna situation kan till exempel vara problem eller uppgifter inom karaktärsämnena samt problem eller situationer relevanta för privatekonomin eller med relevans för deltagandet i samhällslivet. Det handlar om att själv utforma en koppling i form av en modell snarare än att använda färdigformulerade modeller. I de fall modellen är färdig innebär modelleringsförmåga att kunna använda modellens egenskaper för att till exempel lösa ett matematiskt problem eller en standarduppgift. Modelleringsförmågan innebär också att kunna tolka resultatets relation till den verklighetssituation man hade från början. Det innebär även att kunna utvärdera modellens egenskaper och begränsningar i förhållande till den verkliga situationen.

Inom till exempel naturvetenskap, teknik, samhällsvetenskap och ekonomi har matematiska modeller en viktig funktion som redskap för att analysera specifika frågeställningar.

Resonemangsförmåga

Resonemangsförmågan innebär att kunna föra matematiska resonemang som involverar matematikens begrepp och metoder och utgör lösningar på problem och modelleringssituationer. Att föra ett resonemang innefattar även att själv och tillsammans med andra till exempel testa, föreslå, förutsäga, gissa, ifrågasätta, förklara, finna mönster, generalisera eller argumentera. Det innefattar även att kunna formulera och allmänt undersöka hypoteser samt genomföra bevis i tal och skrift. Detta inkluderar att uppmärksamma betydelsen av och kunna redogöra för de bärande idéerna i ett matematiskt bevis och inse skillnader mellan gissningar och välgrundade påståenden.

Matematiska resonemang kan till exempel utgöras av formella skriftliga bevis för matematiska påståenden, där resonemanget består av logiska slutsatser utifrån givna definitioner, axiom och satser.

Ett resonemang kan utgöra lösningen på ett problem och besvara en frågeställning, till exempel *varför sin 30 grader = 1/2*. Att besvara detta kan till exempel innebära att i resonemanget involvera en bild på en liksidig triangel, användningen av att alla vinklar är 60 grader och definitionen av begreppet sinus.

Kommunikationsförmåga

Kommunikationsförmåga är inte bara att kunna kommunicera med hjälp av termer, symboler, tabeller och grafer utan även med hjälp av ord, bilder, animationer, ritningar, gestaltningar och modeller och att anpassa sin kommunikation till sammanhanget. Sammanhangen kan till exempel vara ett experiment i naturkunskap eller elektronik, nyheter i en dagstidning eller medicindosering på ett äldreboende.

Relevansförmåga

Relevansförmåga innebär att kunna sätta in matematiken i ett större sammanhang. Relevansförmågan kan till exempel utvecklas i arbete med matematiska problem som har betydelse för privatekonomi, samhällsliv, tillämpning i andra ämnen och då inte minst i karaktärsämnena. Undervisningen har också möjlighet att stötta utvecklingen av denna förmåga genom att synliggöra matematiken i ett yrkesarbete, vilket ofta är dolt för en ovan betraktare.

Strukturen i gymnasieskolans ämnesplaner

De olika delarna i ämnesplanen hänger ihop på ett tydligt sätt. Det går till exempel inte att bara läsa det centrala innehållet eller kunskapskraven utan att sätta in dem i ämnesplanens hela sammanhang.

Syftet och målen är formulerade för ämnet som helhet. Syftet beskriver i löpande text vilka kunskaper eleverna ska ges möjlighet att utveckla genom undervisningen i ämnet. Det beskriver också sådant som inte ska betygsättas. Målen är formulerade i punktform och förtydligar vad läraren ska betygsätta.

Målen beskriver vilka kunskaper eleverna ska ges förutsättningar att utveckla genom undervisningen i ämnet. De är inte placerade i någon rangordning. De går in i varandra och är beroende av varandra. Målen sätter ingen begränsning för elevernas kunskapsutveckling – det går alltså inte att betrakta dem som något som slutgiltigt kan uppnås.

Det centrala innehållet anger vad som ska behandlas i undervisningen i varje kurs, för att eleverna ska få möjlighet att utveckla de kunskaper som beskrivs i målen. Målen och det centrala innehållet har alltså helt olika karaktär. Trots det kan det finnas visst innehåll även i målen, men i de fallen är målen mer övergripande och inte lika konkreta som det centrala innehållet.

Det finns en tydlig koppling mellan målen och kunskapskraven. Kunskapskraven uttrycker med vilken kvalitet eleven visar sitt kunnande i förhållande till målen. Ordningen i kunskapskraven är densamma som i målen. Om målen till exempel börjar med förmåga att läsa texter börjar också kunskapskraven med det. Däremot är det inte så att varje mål alltid motsvaras av ett stycke i kunskapskraven. Ett stycke i kunskapskraven kan lika gärna relatera till flera mål som till ett mål.

Kopplingen mellan ämnesplanens olika delar i ämnet matematik kan illustreras med följande exempel som rör matematiska begrepp:

I målet står: ”Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmågan att – använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen”

Målet ska läsas och tolkas i förhållande till det centrala innehåll som rör matematiska begrepp, till exempel: ”Begreppens förhållande och proportionalitet i resonemang, beräkningar, mätningar och konstruktioner" (kurs 1a).

Kunskapskravet, som relaterar till målet, anger med vilken kvalitet eleven ska visa sina kunskaper och uttrycks som: ”Eleven kan **med viss säkerhet** visa innebörden av centrala begrepp i handling samt **översiktligt** beskriva innebörden av dem med **någon** annan representation. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan dessa representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**” (kurs 1a, kunskapskrav för betyget E).

Ämnets uppbyggnad

Matematikämnet är indelat i 100-poängskurser. De tre inledande kurserna har parallella spår för olika typer av program. För yrkesprogrammen finns ett a-spår, för ekonomiprogrammet, estetiska programmet, humanistiska programmet och samhällsvetenskapsprogrammet finns ett b-spår och för naturvetenskapsprogrammet och tekniska programmet ett c-spår. Matematik 3b bygger på 2a eller 2b, matematik 3c bygger på 2a eller 2c. Matematik 4 bygger på matematik 3b eller 3c. Matematik 5 och matematik – specialisering bygger på matematik 4.

Likheter och skillnader mellan de tre spåren i matematik

Det centrala innehållet skiljer sig åt mellan de olika spåren även om visst innehåll är gemensamt. Skillnaderna möjliggör en infärgning av matematikstudierna mot programmens olika karaktärer.

I *kurserna 1a och 2a* uppmärksammas kopplingen till karaktärsämnena. Det centrala innehållet fördjupar grundskolans matematik i ett mer komplext sammanhang, dvs. karaktärsämnenas och yrkeslivets. Det centrala innehållet i kurserna 1a och 2a är delvis öppet formulerat för att kunna anpassas till karaktärsämnena. Framförallt geometrin och algebran har formuleringar som tillåter att innehållet väljs efter karaktärsämnenas behov. Till skillnad från b- och c-spåret nämns inte numeriska eller symbolhanterande verktyg i det centrala innehållet.

I *kurserna 1b, 2b och 3b* betonas till viss delstatistik, estetiska aspekter av matematiken (symmetrier), matematisk argumentation samt matematik som är relevant för modellering av samhällsvetenskapliga och ekonomiska frågeställningar (linjär optimering, derivata och integraler). I detta spår ingår ingen trigonometri till skillnad från c-spåret och i viss mån även a-spåret där det är valbart utifrån karaktärsämnenas behov. Programmering nämns som en strategi för problemlösning i det centrala innehållet i kurs 3b.

I *kurserna 1c, 2c, 3c och 4* fördjupas funktionsbegreppet, aritmetiken och algebra. Olika områden sammankopplas genom att samband och skillnader mellan olika begrepp eller områden inom matematiken har skrivits fram. Programmering nämns som en strategi för problemlösning i det centrala innehållet i alla dessa kurser.

Kurserna *5 och specialisering* är inte obligatoriska kurser i något program. Kurs 5 bygger på innehållet i matematik 4, framförallt genom fördjupning av differentialekvationer och bevisföring. Innehållet i specialiseringskursen kan variera och kursen kan läsas flera gånger med olika innehåll. Exempel på matematikområden ges i det centrala innehållet.

Tre varianter av kunskapskrav

Progressionen mellan de olika kurserna uttrycks huvudsakligen med hjälp av det centrala innehållet, eftersom det finns en inbyggd progression i matematikens ämnesinnehåll. Kunskapskraven för matematik finns i tre varianter:

Variant I: Kunskapskrav för matematik 1a

Variant II: Kunskapskrav för matematik 1b, 1c, 2a, 2b och 2c

Variant III: Kunskapskrav för matematik 3b, 3c, 4, 5 och specialisering

Det finns större likheter än skillnader mellan de tre varianterna. Skillnaderna innebär att i variant I betonas möjligheten att med ord och i praktisk handling kunna visa sina kunskaper inom karaktärsämnena och i en praxisnära miljö. Vidare kan retorisk algebra användas för betyg A i samband med problemlösning. Variant II lyfter fram symbolisk algebra i samband med problemlösning. I variant III inkluderas explicit aritmetik och algebra i procedurförmågan samt bevisföring inom resonemangsförmågan.

Byte mellan spåren

Vid byte mellan spåren kan eleverna behöva komplettera visst innehåll. I det nedanstående kommenteras de övergångar som bedöms vara vanligast och innehållet i spåren jämförs.

Övergång från 2a till 3b eller 3c

I kursen 2a är behandling av vissa begrepp inom algebran kopplade till dess tillämpning, till exempel kvadrerings- och konjugatregeln i *samband med ekvationslösning* samt algebraiska uttryck, formler och ekvationer kopplade till *konkreta situationer och karaktärsämnen.* I kurserna 2b, 2c och 3b, 3c är algebran framskriven utan sådana explicita kopplingar, vilket lämnar ett friutrymme. Det kan innebära att elever efter kursen 2a behöver förberedas på att använda algebra mer generellt.

Logaritmer finns inte med i kurs 2a men i kurs 2b och 2c och kan eventuellt behövas för att lösa exponentialekvationer i kurs 3.

Linjära olikheter finns inte med i 1a och 2a och kan behövas inför området linjär optimering i 3b. Trigonometrin för rätvinkliga trianglar från 1c fördjupas i 3c. Trigonometri ingår inte nödvändigtvis på alla yrkesprogram i 1a och 2a, då det centrala innehållet när det gäller geometriområdet är valbart utifrån karaktärsämnenas behov.

I 1a och 2a ingår inte uttryckligen användning av symbolhanterande verktyg, vilket det gör redan från kurs 1 i b- och c-spåren. I a-spåret ingår inte heller programmering som en strategi för problemlösning, vilket det gör i 1c och 2c. Elever som gör en övergång från 2a till 3c kan därför behöva förberedas på att använda programmering.

Övergång från 3b till 4

I matematik 4 fördjupas trigonometrin ytterligare med till exempel hantering av trigonometriska uttryck och bevis av trigonometriska formler. Trigonometri är ett område som inte ingår i kurserna 1b, 2b eller 3b. I matematik 4 ingår att representera komplexa tal som vektorer. Begreppet vektor behandlas i kurs 1c men inte i kurserna 1b, 2b eller 3b.

Logaritmer i kurs 2b är kopplat till *lösning av exponentialekvationer*. Denna koppling finns inte i kurs 2c. Där betonas explicit logaritmlagarna och logaritmfunktioner. Detta kan ha betydelse för elever som gör övergången 2b-3b-4, eftersom det i matematik 4 ingår derivering av logaritmfunktioner. Absolutbeloppet behandlas i kurs 3c och fördjupas till att betraktas som funktion i matematik 4. I kurs 3b ingår inte absolutbelopp.

I b-spåret nämns programmering som strategi för problemlösning först i 3b, medan det nämns redan från kurs 1 i C-spåret. Elever som gör övergången från 3b till 4 har därför sannolikt mindre träning i att använda programmering för problemlösning.

Kommentarer till ämnesplanen i matematik för kommunal vuxenutbildning

Ämnesplanen i matematik för gymnasieskolan gäller även för den kommunala vuxenutbildningen på gymnasial nivå. Eftersom man inom kommunal vuxenutbildning på gymnasial nivå inte läser program utan *utbildningen bedrivs i form av kurser* (20 kap. 5 § skollagen (2010:800)) är förutsättningarna för hur utbildningen ska bedrivas annorlunda jämfört med gymnasieskolan.

För kommunal vuxenutbildning gäller att *utgångspunkten för utbildningen ska vara den enskildes behov och förutsättningar* (20 kap. 2 § skollagen) och detta är avgörande för vilka kurser eleven ska läsa, förutsatt att eleven är behörig att tas emot till utbildningen. De kurser eleven läser ska ingå i elevens individuella studieplan, vilken därför kan ses som den vuxna elevens program.

Om eleven har som mål att avlägga en gymnasieexamen, finns krav på att vissa kurser måste ingå, bland annat i matematik. Är elevens mål yrkesexamen krävs minst betyget E i kursen matematik 1a. Om målet är högskoleförberedande examen krävs minst betyget E i någon av kurserna matematik 1b eller matematik 1c. I en gymnasieexamen kan det inte ingå betyg från två eller flera kurser i matematik på samma nivå, dvs. eleven kan inte ha betyg i till exempel både matematik 1a och matematik 1c i sin examen. *Om eleven tidigare har fått godkänt betyg på en inledande kurs i matematik, får rektorn besluta att detta betyg ska ersätta det betyg som krävs för att en gymnasieexamen ska kunna utfärdas* (4 kap. 14-16 §§ förordningen (2011:1108) om vuxenutbildning).

De tre spåren i matematik är utformade för olika typer av program inom gymnasieskolan. För kommunal vuxenutbildning på gymnasial nivå gäller att *huvudmannen beslutar om vilka nationella kurser som ska ges* (2 kap. 9 § förordningen om vuxenutbildning).

Jämförelse med grundskolans matematikämne

Grundskolans kursplan och gymnasieskolans ämnesplan är uppbyggda enligt samma struktur.

I grundskolan är fokus på att använda sitt samlade matematiska kunnande i olika sammanhang så som i vardagslivet och i andra skolämnen. Dessa sammanhang utvidgas och specificeras i ämnesplanen för gymnasieskolan till att inkludera samhälls- och yrkesliv, privatekonomi, andra ämnen och matematikens kulturhistoria.

Målen uttrycks både i grundskolans kursplan och i gymnasieskolans ämnesplan som förmågor. I grundskolan uttrycks fem förmågor och i gymnasieskolan sju:

Grundskolans långsiktiga mål:

- Förmåga att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder
- Förmåga att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- Förmåga att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter
- Förmåga att föra och följa matematiska resonemang
- Förmåga att använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser

Gymnasieskolans mål:

- Förmåga att använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen
- Förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg
- Förmåga att formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat
- Förmåga att tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar
- Förmåga att följa, föra och bedöma matematiska resonemang
- Förmåga att kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling
- Förmåga att relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang

I grundskolan är det centrala innehållet grupperat under rubrikerna Taluppfattning och tals användning, Algebra, Geometri, Sannolikhet och statistik och Samband och förändring samt Problemlösning. I gymnasieskolans ämnesplan återfinns motsvarande rubriker med vissa tillägg, till exempel aritmetik. Ibland sammanförs också områden. Ett exempel på detta är Aritmetik, algebra och geometri i kurs 3c.

Mönster och generella samband

Ett sätt att karakterisera matematiken är att beskriva den som vetenskapen om mönster. Det handlar om att undersöka ordning, regelbundenhet, strukturer, logiska samband bland exempelvis tal, former, rörelser, förändringar, beteenden och situationer. Genom att urskilja mönster i till synes skilda problem eller situationer kan generella samband formuleras och matematiska metoder utvecklas, som kan användas för att lösa problem inom olika områden både inom och utanför matematikens områden, till exempel för tillämpningar inom ekonomi, naturvetenskap och teknik.

Matematiken som sådan

Förutom att elever i skolan får en direkt tillämpning av ett matematikinnehåll som behandlas, får de också möjlighet att upptäcka matematikens egenvärde. Det handlar till exempel om att få upptäcka och uppleva styrkan och skönheten i matematikens logik, resonemang, i geometriska former, i tal samt i sambandet mellan dessa områden. Det kan upplevas i mycket enkla samband som att summan av de udda konsekutiva positiva heltalen blir ett kvadrattal, vilket också kan visas geometriskt:

Begrepp i ämnets syfte

Att arbeta matematiskt

Matematik kan ofta uppfattas som ett ämne där det endast finns *rätt* eller *fel* och att göra fel är detsamma som att inte ha ett matematiskt kunnande. Men matematiskt kunnande utvecklas även om man ställer ”fel” hypoteser, tvingas göra om och tänka nytt. Det krävs ofta hårt och långvarigt arbete innan professionella matematiker får fram resultat som de är nöjda med. Kanske finns det också mer än en lösning på ett problem.

Problemlösningsprocessen kan vara en kaotisk, kreativ och icke-linjär process och därmed svår att systematisera. Problemlösningsförmåga innebär att kunna analysera och tolka problem, vilket inkluderar ett alltmer medvetet användande av problemlösningsstrategier. Att lösa problemet innebär att genomföra ett resonemang där grunderna för resultatets giltighet blir tydligt och resultatet korrekt. Det ingår att värdera både resonemanget och resultatet. Ibland behöver man utföra olika procedurer. I problemlösning ingår också att själv och i sampel med andra aktivt kunna formulera och uppmärksamma egna relevanta problem och vidareutveckla andras.

Att arbeta matematiskt kan till exempel innebära att:

- Leka med problemet
- Samla och organisera data
- Diskutera, göra anteckningar och diagram
- Söka och hitta mönster
- Utforma och testa hypoteser

- Leta i sin verktygslåda efter strategier
- Kontrollera och söka efter mer information
- Redovisa sina resultat

Frågor som problemlösaren kan använda sig av i sitt matematiska arbete:

- Kan jag kontrollera på något annat sätt?
- Vad händer om…?
- Hur många lösningar finns det?
- Hur vet jag att jag hittat alla lösningar?

Exempel på strategier för matematisk problemlösning:

- Jämföra med liknande problem
- Gissa, försöka och förbättra
- Förenkla problemet
- Använda ekvation
- Göra lista eller tabell
- Arbeta baklänges
- Dramatisera problemet
- Rita en bild eller graf
- Göra en modell
- Göra simuleringar
- Prova alla möjligheter
- Söka efter undantag
- Om en lösningsmetod inte fungerar, börja om med en annan

Varierade arbetsformer och arbetssätt

Forskningsresultat och erfarenhet visar att en matematikundervisning som är varierad både till innehåll och till form främjar alla elevers kunskapsutveckling i ämnet.

När det gäller *arbetsformen*, dvs. hur läraren organiserar undervisningen, kan till exempel variationen bestå i att låta eleverna arbeta med gemensamma uppgifter i klass eller i mindre grupper, i par, men även individuellt. Läraren kan vända sig till hela klassen, handleda gruppvis eller individuellt samt välja lämpliga platser.

När det gäller variation av *arbetssätt*, dvs. den metod läraren använder sig av för att eleverna ska utveckla de matematiska förmågorna, finns det också många möjligheter att skapa variation. Detta kan bland annat åstadkommas genom val av olika uttrycksformer och i form av olika typer av undersökningar, laborationer och konstruktioner. Om undersökningar görs både med och utan digitala verktyg och interaktiva medier ökar variationsgraden ytterligare. Varierade arbetssätt stimulerar också flera sinnen och flera sätt att tänka

I matematikdidaktisk forskning inom variationsteorin och i det som benämns Learning Study används begreppet variation i betydelsen *innehållslig variation*. Teorin går ut på att eleven endast kan få syn på en egenskap hos ett begrepp om det presenteras i ljuset av en variation. Eleverna måste alltså ges möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna hos ett lärandeobjekt, till exempel vad som skiljer area och omkrets åt. Detta kräver en undervisning som lyfter fram och visar på likheter och olikheter, exempel och motexempel. Först när eleven erfar variation kan förståelsen för ett begrepp utvecklas och fördjupas.

Ytterligare en aspekt av variation kan vara sättet att ställa frågor. Att till exempel ställa frågor som har mer än ett svar uppmuntrar matematiskt tänkande. Ett enkelt exempel på en öppen fråga kan vara att, istället för att fråga hur stor volymen är av ett rakt prisma med givna mått, vända på frågeställningen. Den skulle då kunna vara: Du ska bygga en kaninbur med ca en kubikmeters volym som ska ha formen av ett rakt prisma. Hur kan den se ut? Med detta sätt att ställa frågor blir det mer än ett svar som duger och det ger också möjligheter till att utveckla resonemangs- och kommunikationsförmågan. Har till exempel uppgiften blivit löst på ett ändamålsenligt sätt?

Olika uttrycksformer

En vanlig kategorisering av uttrycksformer i matematik är fysisk, bildlig, verbal, numerisk och symbolisk. De fysiska och bildliga uttrycksformerna slås ofta ihop till benämningen estetisk uttrycksform, som då kan innefatta oväntade uttrycksformer inom matematik, till exempel drama, gestaltning och musik. Att få visa sitt kunnande med hjälp av olika uttrycksformer kan vara en väg mot att kunna generalisera med matematiska symboler. Att kunna röra sig mellan olika uttrycksformer visar på en förtrogenhet med matematiska begrepp.

För att motivera gymnasieelever att använda mera kreativa och estetiska uttrycksformer kan man hänvisa till exempel till fysiskt konkreta uttrycksformer från arbetslivet. Arkitekter laborerar till exempel i en första fas med klossar innan de bestämmer sig för vilka huskroppar och lägenhetsmoduler de ska arbeta vidare med. Ett annat exempel är plåtslagare eller skräddare som inte börjar klippa i sitt dyrbara material förrän de har laborerat med pappersmodeller för att hitta en optimal lösning.

Digitala verktyg öppnar möjligheter för ytterligare uttrycksformer. Ett exempel är bilder skapade med programmering eller algoritmer – så som funktionsgrafer, iterativa mönster eller fraktaler. Även programkod och algoritmer i andra former kan vara ett sätt att uttrycka och beskriva matematiska tankar och begrepp. Andra exempel på digitala uttrycksformer är animationer – även interaktiva sådana.

Den verbala uttrycksformen, till exempelretorisk algebra, ger eleven möjlighet att visa sitt matematiska tänkande på ett annat sätt än symboliskt. Den retoriska algebran, dvs. att eleven ger verbala beskrivningar av vilka procedurer som ska genomföras för att nå en lösning på ett problem, kan kopplas till algebrans ursprung. Den symboliska algebran började utvecklas först i början av 1600-talet.

Användningen av olika uttrycksformer i undervisningen engagerar fler sinnen, ger variation och fördjupad förståelse samt möjliggör att elever kan arbeta i samma kontext på olika sätt.

Digitala verktyg

I syftestexten anges att elever ska få ”utveckla sin förmåga att använda digitala verktyg för att lösa problem, fördjupa sitt matematikkunnande och utöka de områden där matematikkunnandet kan användas”. Detta avser i viss mån verktyg som används i rent pedagogiska syften i undervisningen, men framförallt verktyg som i sig används för matematik och låter eleverna exempelvis utföra omfattande beräkningar eller visualisera data och samband.

I sammanfattningen av ämnets långsiktiga mål nämns att elever ska få förutsättningar att utveckla förmåga att ”hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg”. Med detta avses både digitala verktyg och andra relevanta verktyg. Digitala verktyg nämns explicit i kunskapskraven, med krav på att eleven hanterar procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär ”både utan och med digitala [och andra praxisnära (1a)] verktyg”. Kravet på att hantera digitala verktyg finns i alla kurser och för alla betygssteg.

Olika typer av digitala verktyg

I det centrala innehållet nämns olika typer av digitala verktyg. De förtydligas nedan.

- **Digitala verktyg**: När den här termen används ges ingen närmare precisering av vilken typ av verktyg elever ska få möta i sin undervisning, och alla digitala verktyg som kan användas för att behandla det centrala innehållet är alltså möjliga.
- **Symbolhanterande verktyg**: Detta avser verktyg som kan hantera algebraiska uttryck och exempelvis förenkla uttryck, lösa ekvationer och söka extrempunkter för funktioner på algebraisk väg.
- **Numeriska verktyg**: Denna term används för att komplettera symbolhanterande verktyg i två typer av sammanhang – dels vid grafiska metoder, som normalt baseras på numeriska snarare än algebraiska metoder och dels vid beräkningar utanför det som symbolhanterande verktyg klarar av, så som lösning av polynomekvationer av hög grad.
- **Kalkylprogram**: Detta avser program för att hantera data och beräkningar i kalkylblad.

Det görs ingen skillnad på om digitala verktyg är exempelvis fristående enheter (så som grafritande räknare), program/applikationer, eller webbtjänster.

Såväl med som utan digitala verktyg

När metoder eller procedurer nämns i det centrala innehållet efterföljs de i de flesta fall av *såväl med som utan* någon kategori av digitalt verktyg. Formuleringen *med och utan* innebär att undervisningen ska ta upp båda dessa fall, men det är läraren som avgör vilken tyngd som ges till att behandla ett centralt innehåll med respektive utan digitala verktyg. I några fall nämns enbart *med* eller enbart *utan* digitala verktyg. I dessa fall finns inget krav på att undervisningen ska omfatta arbete utan respektive med digitala verktyg.

I många lägen kommer arbetet *med* de digitala verktygen att vara mycket lika mellan kurserna och elever som lärt sig att använda digitala verktyg för att lösa exempelvis linjära ekvationer, kommer i regel att kunna använda samma metoder för att lösa potensekvationer, ekvationssystem, andragradsekvationer, exponentialekvationer och trigonometriska ekvationer.

Programmering för problemlösning

I matematik 3b samt hela c-spåret finns programmering med som en strategi för problemlösning. Formuleringen som används är medvetet öppen för att tillåta stor variation både i vilken utsträckning programmering förekommer i undervisning och i vilka former.

Programmering som verktyg för problemlösning kan avse en rad olika saker. Nedan följer några uppslag.

- Programmering kan användas för att simulera situationer för att göra uppskattningar av sannolikheter, snarare än algebraisk-matematiska beräkningar. ”Vad är en sannolik värdeutveckling för en fond vars kurs ändras slumpvis enligt vissa mönster? Vad är chansen att slå Yatzy på högst tre slag?” Programmering kan också användas för att utforska variation i sannolikheter – ”Hur vanligt är det att en 50/50-sannolikhet faller ut 60/40 eller mer skevt vid 100 observationer? 1000 observationer?”.
- Programmering och datorkraft öppnar möjlighet att använda gissning som en systematisk strategi i problemlösning, exempelvis genom att göra ett stort antal gissningar i ett givet intervall och hitta värden som ligger nära önskade resultat eller låta gissningar förbättras systematiskt för att komma nära en lösning.
- Programmering kan användas för att utforska problem av typen ”för vilka heltal mellan 500 och 1000 gäller att…”.

Det ställs inga krav på specifika programmeringsspråk eller -miljöer. Det är dock ett krav att programmeringen används som en strategi för problemlösning.

I viss mån kan även kalkylblad användas för att utforska problem genom iterativa eller villkorsstyrda beräkningar. Detta kan vara särskilt användbart i de fall elever saknar relevanta kunskaper i programmering. Samtidigt innehåller kalkylblad många begränsningar som programmering inte gör. I den mån elever behärskar programmering ska de därför få använda relevanta programmeringsmiljöer för att fördjupa sitt matematiska kunnande.

Begrepp i kursen matematik 1a

Beräkning av räntor och amorteringar

Kunskap om räntor och amorteringar kan bidra till en förståelse för vad lån och krediter betyder för privatekonomin. Om arbetet med det centrala innehållet "Metoder för beräkning av räntor och amorteringar för olika typer av lån med kalkylprogram" utförs med elevnära matematiska problem kring till exempel snabblån och kreditkort kan relevanta kunskaper om hur amortering, räntor och avgifter hänger ihop utvecklas. Användandet av kalkylprogram ger möjlighet att göra beräkningar i fler steg än vad som är rimligt att göra för hand, och exempelvis undersöka hur totalkostnader påverkas av avikostnader eller förseningsavgifter.

Strategier för matematisk problemlösning

En strategi kan ses som en plan, ansats eller idé för att försöka lösa ett problem, men strategin i sig löser inte problemet till skillnad från en metod som – väl vald och korrekt utförd – kan lösa rutinuppgifter och delproblem. För exempel på strategier, se kommentar till ”Att arbeta matematiskt”.

Matematikens kulturhistoria

Ett exempel på anknytning till matematikens kulturhistoria är människans upptäckt av ett samband mellan en cirkels omkrets och dess diameter som representeras av talet π.

Tanken med det kulturhistoriska innehållet är att göra matematikundervisningen mera levande och motivationsskapande, och att eleverna via matematiska problem får ta del av människorna, den tidsepok och den kultur som upptäckte de matematiska samband och begrepp som behandlas i kursen.

Begrepp i kursen matematik 1b

Estetiska uttryckssätt

Med *estetiskt* menas här inte att det måste vara vackert, utan det ska tolkas som en uttrycksform bland många andra, till exempel bild, konstruktion, drama eller musik.

Illustration av begreppen definition, sats och bevis

Illustration innebär att presentera begreppens roll och funktion i matematik, samt att synliggöra skillnaden mellan att troliggöra och bevisa ett matematiskt påstående. Vidare handlar det om att skilja mellan konventioner och definitioner samt att skilja mellan formell sats och informell beskrivning.

Beräkning av räntor och amorteringar

Kunskap om räntor och amorteringar kan bidra till en förståelse för vad lån och krediter betyder för privatekonomin. Om arbetet med det centrala innehållet "Metoder för beräkning av räntor och amorteringar för olika typer av lån med kalkylprogram" utförs med elevnära matematiska problem kring till exempel snabblån och kreditkort kan relevanta kunskaper om hur amortering, räntor och avgifter hänger ihop utvecklas. Användandet av kalkylprogram ger möjlighet att göra beräkningar i fler steg än vad som är rimligt att göra för hand, och exempelvis undersöka hur totalkostnader påverkas av avikostnader eller förseningsavgifter.

Gestaltning

Gestaltning är ett exempel på en möjlig estetisk uttrycksform. Eleverna kan till exempel gestalta grafer med hjälp av armarna, men även med sig själva som punkter i koordinatsystem då koordinataxlarna ligger på golvet eller på marken. Grafers speglingar är också illustrativt att visa med denna uttrycksform.

Strategier för matematisk problemlösning

En strategi kan ses som en plan, ansats eller idé för att försöka lösa ett problem, men strategin i sig löser inte problemet till skillnad från en metod som – väl vald och korrekt utförd – kan lösa rutinuppgifter och delproblem. För exempel på strategier, se kommentar till ”Att arbeta matematiskt”.

Matematikens kulturhistoria

Ett exempel på anknytning till matematikens kulturhistoria är människans upptäckt av ett samband mellan en cirkels omkrets och dess diameter som representeras av talet π.

Tanken med det kulturhistoriska innehållet är att göra matematikundervisningen mera levande och motivationsskapande, och att eleverna via matematiska problem får ta del av människorna, den tidsepok och den kultur som upptäckte de matematiska samband och begrepp som behandlas i kursen.

Kommunikationsförmåga är inte bara att kunna kommunicera med hjälp av termer, symboler, tabeller och grafer utan även med hjälp av ord, bilder, animationer, ritningar, gestaltningar och modeller och att anpassa sin kommunikation till sammanhanget. Sammanhangen kan till exempel vara ett experiment i naturkunskap eller elektronik, nyheter i en dagstidning eller medicindosering på ett äldreboende.

Relevansförmåga

Relevansförmåga innebär att kunna sätta in matematiken i ett större sammanhang. Relevansförmågan kan till exempel utvecklas i arbete med matematiska problem som har betydelse för privatekonomi, samhällsliv, tillämpning i andra ämnen och då inte minst i karaktärsämnena. Undervisningen har också möjlighet att stötta utvecklingen av denna förmåga genom att synliggöra matematiken i ett yrkesarbete, vilket ofta är dolt för en ovan betraktare.

Begrepp i kursen matematik 1c

Illustration av begreppen definition, sats och bevis

Illustration innebär att presentera begreppens roll och funktion i matematik samt att synliggöra skillnaden mellan att troliggöra och bevisa ett matematiskt påstående. Vidare handlar det om att skilja mellan konventioner och definitioner samt att skilja mellan formell sats och informell beskrivning.

Beräkning av räntor och amorteringar

Kunskap om räntor och amorteringar kan bidra till en förståelse för vad lån och krediter betyder för privatekonomin. Om arbetet med det centrala innehållet "Metoder för beräkning av räntor och amorteringar för olika typer av lån med kalkylprogram" utförs med elevnära matematiska problem kring till exempel snabblån och kreditkort kan relevanta kunskaper om hur amortering, räntor och avgifter hänger ihop utvecklas. Användandet av kalkylprogram ger möjlighet att göra beräkningar i fler steg än vad som är rimligt att göra för hand, och exempelvis undersöka hur totalkostnader påverkas av avikostnader eller förseningsavgifter.

Strategier för matematisk problemlösning

En strategi kan ses som en plan, ansats eller idé för att försöka lösa ett problem, men strategin i sig löser inte problemet till skillnad från en metod som – väl vald och korrekt utförd – kan lösa rutinuppgifter och delproblem. För exempel på strategier, se kommentar till ”Att arbeta matematiskt”.

Matematikens kulturhistoria

Ett exempel på anknytning till matematikens kulturhistoria är människans upptäckt av ett samband mellan en cirkels omkrets och dess diameter som representeras av talet π.

Tanken med det kulturhistoriska innehållet är att göra matematikundervisningen mera levande och motivationsskapande, och att eleverna via matematiska problem får ta del av människorna, den tidsepok och den kultur som upptäckte de matematiska samband och begrepp som behandlas i kursen.

Begrepp i kursen matematik 2a

Metoder för beräkningar med kalkylprogram vid budgetering

Budgetering avser till exempel kostnadsanalyser. Inom många områden, både privat och yrkesmässigt, behöver man kunna göra en enkel budget för att ha kontroll över kostnader, intäkter och utgifter. Kalkylprogram kan i budgetberäkningar användas för att exempelvis skapa automatiska summor och delsummor eller särredovisa moms i kostnadsposter. Budgetering kan inkludera uppskattningar, procenträkning och beräkningar med funktioner.

Begrepp i kursen matematik 2b

Metoder för beräkningar vid budgetering

Budgetering avser till exempel kostnadsanalyser. Inom många områden, både privat och yrkesmässigt, behöver man kunna göra en enkel budget för att ha kontroll över kostnader, intäkter och utgifter. Kalkylprogram kan i budgetberäkningar användas för att exempelvis skapa automatiska summor och delsummor eller särredovisa moms i kostnadsposter. Budgetering kan inkludera uppskattningar, procenträkning och beräkningar med funktioner.

Introduktion av begreppet komplext tal

Introduktion av komplexa tal innebär att eleverna ska kunna lösa enkla ekvationer av typen typen$x^2 = -9$. För detta krävs endast att kunna att $3i \cdot 3i = -9$. Denna typ av ekvationer som saknar reella lösningar kan kopplas till egenskaper hos grafen för funktionen f(x)= x^2+9. Att *hantera* komplexa tals egenskaper och genomföra beräkningar på olika former samt lösa mer avancerade ekvationer ingår i matematik 4.

Regressionsanalys med digitala verktyg

Regressionsanalys innebär att anpassa en given funktionstyp till given data, och kan användas för att skapa modeller över förlopp eller andra samband. Om data utgår från elevnära eller samhällsaktuella situationer kan arbetet hjälpa elever att förstå matematikens roll i att beskriva samband och göra förutsägelser. Det kan också utgöra värdefulla exempel på hur funktioner och formler kan uppkomma, och vara underlag för att diskutera sambandens giltighet och begränsningar.

Användandet av digitala verktyg gör det möjligt att göra funktionsanpassningar till mer data än vad som är rimligt med manuella beräkningar. Det gör det också möjligt att göra bättre funktionsanpassningar och numeriskt utvärdera hur väl en funktion passar till given data.

Regressionsanalys avser i det här sammanhanget framförallt anpassning till räta linjer. I många digitala verktyg används samma metoder för anpassning till andra typer av funktioner. Att använda fler typer av funktioner kan fördjupa elevens förståelse för funktionsanpassning och regressionsanalys.

Beräkningar på normalfördelning med digitala verktyg

Beräkningar på normalfördelning avser att kunna använda normalfördelningens egenskaper i beräkningar. Det kan exempelvis handla om att ta reda på hur mycket av ett normalfördelat material som befinner sig inom en standardavvikelse från medelvärdet, men också att ta reda på hur långt från medelvärdet man behöver gå för att omfatta 50 procent av det normalfördelade materialet.

Den bakomliggande teorin för att göra beräkningar på normalfördelning kräver förhållandevis avancerade beräkningar med integraler och normalfördelningens täthetsfunktion. Det centrala innehållet omfattar dock endast att använda digitala verktyg för att få fram relevanta värden om normalfördelning – inte att sätta sig in i den bakomliggande matematiken.

Begrepp i kursen matematik 2c

Motivering och hantering av logaritmlagarna

Motivering innebär att man i undervisningen behandlar och undersöker det resonemang som ligger till grund för logaritmlagarnas giltighet. I kunskapskraven finns inga krav på att genomföra formella bevis, men eleverna ska kunna skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden.

Introduktion av begreppet komplext tal

Introduktion av komplexa tal innebär att eleverna ska kunna lösa enkla ekvationer av typen typen $x^2 = -9$. För detta krävs endast att kunna att $3i \cdot 3i = -9$. Denna typ av ekvationer som saknar reella lösningar kan kopplas till egenskaper hos grafen för funktionen f(x)= x^2+9. Att *hantera* komplexa tals egenskaper och genomföra beräkningar på olika former samt lösa mer avancerade ekvationer ingår i matematik 4.

Regressionsanalys med digitala verktyg

Regressionsanalys innebär att anpassa en given funktionstyp för att passa till given data, och kan användas för att skapa modeller över förlopp eller andra samband. Om data utgår från elevnära eller samhällsaktuella situationer kan arbetet hjälpa elever att förstå matematikens roll i att beskriva samband och göra förutsägelser. Det kan också utgöra värdefulla exempel på hur funktioner och formler kan uppkomma, och vara underlag för att diskutera sambandens giltighet och begränsningar.

Användandet av digitala verktyg gör det möjligt att göra funktionsanpassningar till mer data än vad som är rimligt med manuella beräkningar. Det gör det också möjligt att göra bättre funktionsanpassningar, och numeriskt utvärdera hur väl en funktion passar till given data.

Regressionsanalys avser i det här sammanhanget framförallt anpassning till räta linjer. I många digitala verktyg används samma metoder för anpassning till andra typer av funktioner. Att använda fler typer av funktioner kan fördjupa elevens förståelse för funktionsanpassning och regressionsanalys.

Beräkningar på normalfördelning med digitala verktyg

Beräkningar på normalfördelning avser att kunna använda normalfördelningens egenskaper i beräkningar. Det kan exempelvis handla om att ta reda på hur mycket av ett normalfördelat material som befinner sig inom en standardavvikelse från medelvärdet, men också att ta reda på hur långt från medelvärdet man behöver gå för att omfatta 50 procent av det normalfördelade materialet.

Den bakomliggande teorin för att göra beräkningar på normalfördelning kräver förhållandevis avancerade beräkningar med integraler och normalfördelningens täthetsfunktion. Det centrala innehållet omfattar dock endast att använda digitala verktyg för att få fram relevanta värden om normalfördelning – inte att sätta sig in i den bakomliggande matematiken.

Begrepp i kursen matematik 4

Olika bevismetoder

Olika bevismetoder kan till exempel vara direkta bevis, indirekta bevis och motsägelsebevis. I kursen matematik 5 utvidgas detta med induktionsbevis.