

ANALYSRAPPORT TILL 323
2008

INTERNATIONELLA STUDIER

Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007

En jämförande analys av elevernas taluppfattning
och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i
Sverige, Hong Kong och Taiwan



Skolverket

Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007

En jämförande analys av elevernas
taluppfattning och kunskaper i
aritmetik, geometri och algebra i
Sverige, Hong Kong och Taiwan

Beställningsadress:
Fritzes kundservice
106 47 Stockholm
Telefon: 08-690 95 76
Telefax: 08-690 95 50
E-post: skolverket@fritzes.se
www.skolverket.se
Beställningsnr: 09:1138
ISBN: 978-91-85545-71-1
Form: Ordförrådet AB

Förord

Skolverket har statens uppdrag att följa upp och utvärdera kvalitet och likvärdighet i skolväsendet. Skolverket har också i uppdrag att lämna förslag om åtgärder för att stärka uppfyllandet av de nationella målen. För att göra detta är det viktigt att skaffa referenspunkter angående skolan som system och skolans måluppfyllelse i ett internationellt jämförande perspektiv.

En av de internationella undersökningar som Sverige deltagit i är TIMSS 2007 (Trends in International Mathematics and Science Study) som studerar matematik och naturvetenskap i grundskolans årskurs 4 och 8. Med kunskapsprov och enkäter samlas en mängd information in om nationella regler och mål, om faktisk organisation och undervisning och om elevernas kunskaper och attityder i TIMSS. Studien möjliggör jämförelser mellan länder och ger också information om förändringar i kunskap över tid inom de områden undersökningen mäter.

I samband med att resultaten från TIMSS 2007 presenterades sammanställde Skolverket en deskriptiv nationell rapport, rapport 323, och samtidigt publicerades en djupanalys av svenska elevers matematikkunskaper.

Denna rapport är ytterligare en fördjupning av de resultat som framkommer i TIMSS 2007. Rapporten är i första hand skriven för lärarutbildare och lärare. I rapporten analyseras data från TIMSS 2007 och motsvarande uppgifter i TIMSS 2003 samt även några uppgifter från de nationella proven i årskurs 9. Svenska elevers resultatmönster jämförs med resultatmönstren hos eleverna i några av de asiatiska länder som nått mycket goda resultat på TIMSS kunskapsprov, Hong Kong och Taiwan. I rapporten behandlas de matematiska områdena aritmetik och taluppfattning (tal i bråkform och proportionalitet), geometri (areabegreppet) och algebra (variabelbegreppet).

De resultat som redovisas går i linje med vad internationell forskning tidigare har visat. Några av rapportens slutsatser är:

- Svenska elever har en mer procedurrell än konceptuell kunskap i matematik vilket gör att eleverna kan lösa de uppgifter de är vana vid, men har svårigheter att använda sina kunskaper i nya situationer.
- I asiatiska länder får eleverna en mer konceptuellt inriktad undervisning vilket gör att kunskaperna inom t ex området proportionalitet och geometri visar ett mer sammanhängande mönster där de svenska elevernas resultat mer visar "öar" av korrekta lösningar.
- På uppgifter som prövar mer procedurella kunskaper har svenska elever samma prestationsnivåer som elever i de högpresterande asiatiska länderna.

Analysen har genomförts och rapporten skrivits av Per-Olof Bentley, universitetslektor och filosofie doktor vid Göteborgs Universitet, inom ramen för hans uppdrag som ämnesdidaktisk expert i TIMSS 2007-projektet. Författaren ansvarar för rapportens innehåll och de uppfattningar som uttrycks.

Stockholm den 12 oktober 2009

Per Thullberg
Generaldirektör

Camilla Thinsz Fjellström
Projektledare

Innehåll

Del 1 • Teoretisk bakgrund

1	Introduktion	13
2	Teoretiska förutsättningar	16
2.1	Inläring av begrepp och procedurer.....	16
2.2	Analys av data.....	17
2.3	Reliabilitet och validitet.....	18
3	Några forskningsresultat	20
3.1	Den matematiska kunskapens beskaffenhet.....	20
3.2	Begreppsmodeller.....	27
3.3	Begreppsmodeller för tal i bråkform.....	28
3.4	Proportionalitet.....	32
3.5	Omkrets och area.....	36
3.6	Variabler, ekvationer, uttryck, funktioner och formler.....	37
3.7	En eller flera begreppsmodeller för samma begrepp.....	40
3.8	Övergeneraliseringar.....	41
3.9	Sammanfattning.....	42

Del 2 • Undersökningens genomförande och resultat

4	Problemformulering och syfte	47
4.1	Syfte.....	47
5	Metod	49
5.2	Kvalitativ innehållsanalys och statistiska metoder.....	50
5.3	Antal elever i de olika urvalen.....	50
6	Aritmetik och taluppfattning	52
6.1	Grundläggande taluppfattning.....	52
6.2	Negativa och positiva heltal.....	58
6.3	Tal i bråkform.....	59
6.4	Tal i decimalform.....	63
6.5	Begreppet proportionalitet.....	65
6.6	Funktionella samband.....	78
6.7	En bild av elevernas aritmetiska kunskaper.....	80
6.8	Sammanfattning och slutsatser.....	81

7 Geometri	83
7.1 Omkrets och area.....	83
7.2 Två-dimensionella representationer av tre-dimensionella objekt.....	94
7.3 Vridning.....	97
7.4 En bild av elevers geometriska kunskaper	99
7.5 Sammanfattning och slutsatser	99

8 Algebra	101
8.1 Ekvationer	101
8.2 Uttryck.....	104
8.3 Funktioner.....	107
8.4 Formler.....	109
8.5 Koordinatsystem.....	111
8.6 Olikheter	112
8.7 En bild av elevernas algebraiska kunskaper.....	113
8.8 Sammanfattning	114

Del 3 • Diskussion och referenser

9 Diskussion	119
9.1 Det centrala resultatet.....	119
9.2 Resultatet i relation till tidigare forskning	120
9.3 Studiens begränsningar	124
9.4 Syftet har nåtts.....	125
9.5 Framtida forskning	125

10 Referenser	127
----------------------	------------

Sammanfattning

Denna fördjupade analys av data från TIMSS 2007 visar att svenska årskurs-8-elever har matematiska kunskaper, vilka behöver utvecklas och förädlas. Den hierarkiska kunskapsstrukturen, som traditionellt har uppfattats som ett kännetecken för matematik, är inte nödvändigtvis den väg till kunskap som eleverna följer. I en procedurellt inriktad undervisning fokuseras beräkningar utan begreppslig förankring och inte på att belysa hur olika moment i matematiken förståelsemässigt bygger på varandra. I en konceptuellt inriktad undervisning däremot har begreppsförståelse en central roll, vilket stödjer uppbyggnaden av den hierarkiska kunskapsstrukturen.

Områdena taluppfattning, aritmetik, geometri och algebra med fokus speciellt på proportionalitets- och variabelbegreppen har analyserats. Jämförelser har gjorts med resultaten för årskurs-8-elever i Hong Kong och Taiwan, men också med svenska årskurs-4-elever. Även elevlösningar från det nationella ämnesprovet för årskurs 9 har analyserats och jämförelser har gjorts. Hong Kongs och Taiwans topplaceringar i TIMSS och deras konceptuella undervisning gör en jämförelse särskilt intressant. Syftet är därför att ingående beskriva svenska elevers matematikkunskaper med inriktning på procedurer och begrepp, att studera hur kunskapens beskaffenhet skiljer sig mellan elever i Sverige och i Hong Kong och Taiwan samt att utifrån kunskapens beskaffenhet och utifrån tidigare forskning dra slutsatser om undervisningens inriktning.

En utvidgad fenomenografisk teoriram som innebär en inriktning på förståelse av begrepp och behärskande av procedurer, har använts för analysen. Dessutom bygger analysen även på resultat från den internationella forskningen inom området.

Utifrån undervisningens inriktning kan två kunskapsstyper särskiljas, den procedurella och den konceptuella. Procedurell kunskap har en lokal natur och hänförs till lösningar av specifika matematiska problem, medan den konceptuella kännetecknas av att olika matematiska kontexter eller områden är sammanbundna av kärnfulla principer eller begrepp. Konceptuell kunskap kan generera procedurell kunskap medan det omvända endast kan ske undantagsvis.

Undervisningen i Hong Kong och Taiwan har en konceptuell inriktning till skillnad från undervisningen i Sverige där den huvudsakligen är procedurell. Typiska kännetecken för undervisningen i Hong Kong och Taiwan är att transfer tränas systematiskt och att eleverna uppmärksammas på kända misstag för att undvika dem. Transfer kan leda till övergeneraliseringar, vilka kan förklara elevmisstag.

Undervisningens inriktning speglar sig också i elevers lösningar av uppgifterna. Om endast enstaka spridda uppgifter har lösts, så beror detta på, att kunskapen varit av lokal procedurell karaktär. Har däremot mer eller mindre samtliga uppgifter lösts, uppgifter som belyser ett och samma begrepp i olika problem-situationer eller kontexter, så har kunskapen varit konceptuellt strukturerad. Användningen av lågkvalitativa begreppsmodeller i undervisningen, kan också ha påverkat elevernas möjligheter att lösa uppgifterna negativt. Speciellt tydligt är detta rörande tal i bråkform, proportionalitet och variabler.

Resultatet visar, att den konceptuellt inriktade undervisningen i Hong Kong och Taiwan ger positiva resultat avseende elevernas prestationer. Genom att kontexten varierar kan eleverna lättare avgöra huruvida ett attribut tillhör själva begreppet eller dess kontext. Den procedurella undervisningen i Sverige karakteriseras av att varje procedur är strikt kopplad till sin specifika kontext och att kontexten knappast varierar alls. Eleverna får då svårare att överföra sina lösningsprocedurer till nya sammanhang. I de fall då uppgifterna tillåter en direkt tillämpning av inlärd procedur, så lyckas de svenska eleverna nå samma resultat som eleverna i Hong Kong och Taiwan.

Summary

The in-depth analysis of TIMSS 2007 showed that Swedish pupils have mathematical knowledge that need to be developed and refined. The hierarchical structure of mathematical knowledge, which traditionally has been comprehended as a characteristic of the discipline of mathematics, is not necessarily the path to knowledge that pupils follow. In procedurally oriented teaching, calculations without conceptual anchorage are focused and not the conceptual linkage between the different parts of mathematics. In contrast, in conceptually oriented teaching conceptual understanding is focused and therefore supports pupils' development of the hierarchical mathematical structure.

The domains of number sense, arithmetic, geometry and of algebra for grade 8 were analyzed with focus on the understanding of the concepts of proportionality and variable. Comparison with grade-4-pupils' results and with the grade-8-pupils' results in Hong Kong and Taiwan was made. Also the pupils' solutions to the items of the national assessment test for grade 9 were analyzed. The top score in TIMSS of the East Asian countries together with their conceptually oriented teaching made a comparison especially interesting. The aim was therefore to cast further light on Swedish pupils' mathematical knowledge regarding procedures and concepts; to study whether the nature of mathematical knowledge differs between pupils in Sweden and in Hong Kong and Taiwan; to draw conclusions about the orientation of the teaching in Sweden not only from the characteristics of the pupils' knowledge but also from previous research.

An extended Phenomenographic framework with focus on the understanding of concepts and on the mastering of procedures was used. The analyses of the pupils' solutions in the different samples were based on in-depth interviews and on results of international research.

As a consequence of the orientation of the teaching, two types of knowledge were distinguished, procedural and conceptual. While procedural knowledge is mainly local to its character and linked to solutions of specific mathematical problems, conceptual knowledge is more general and characterized by its conceptual linkage between different mathematical contexts. The relation between conceptual and procedural knowledge is not bi-directional, since procedural knowledge only exceptionally can generate conceptual.

The teaching in the East Asian countries has a conceptual orientation, while the Western countries a procedural. Characteristic of the teaching in Hong Kong and Taiwan is also the systematic training of transfer and of avoidance of commonly known mistakes. In the West transfer can imply overgeneralizations, which seem to have a strong predictive power for explaining pupils' mistakes. Also their textbooks are permeated with a procedural approach.

The orientation of the teaching is reflected in the pupils' solutions to the test items. If only single scattered items are solved, it will mainly be due to the procedural character of the pupils' knowledge. If in contrast, more or less all items that concern one and the same concept in various contexts are solved, the pupils' knowledge will reflect a conceptual structure. The utilization of low-qualitative conceptual models in the teaching has a negative influence on the Swedish pupils' achievements on especially fractions, proportionality and variables.

The results showed that the conceptually oriented teaching in Hong Kong and Taiwan improves the pupils' achievements. The core issue for conceptual learning is the capability to identify the attributes of a concept. By varying the mathematical contexts the pupils get the possibility to determine whether an attribute belongs to the concept or to the context. The procedural orientation of the teaching in the Western countries is characterized by contextually linked procedures, which in principle implies that the context is not being varied. This also makes it hard for the pupils to transfer their solving procedures to unfamiliar contexts. In cases when the items allowed a direct application of procedures, the Swedish pupils succeeded in reaching the same scores as the pupils in Hong Kong and Taiwan.

Del 1

Teoretisk bakgrund

Del 1 • Teoretisk bakgrund

I den första delen ges först en introduktion till studien och problemställningen. Sedan redovisas de teoretiska förutsättningarna och slutligen resultat av forskning som är av betydelse för denna studie.

Utgångspunkten i introduktionen är en tidigare djupanalys av svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007. Den visar att svenska elever har kunskaper i matematik och det handlar om att utveckla och förädla dessa kunskaper snarare än att fylla kunskapsluckor. I denna studie är syftet att ytterligare fördjupa analysen av svenska elevers kunskaper samt att jämföra dem med elevers kunskaper i Hong Kong och Taiwan, två länder som ligger prestationsmässigt i topp i TIMSS-undersökningarna.

En viktig förutsättning för en studie, då elevers förståelse av begrepp och tillämpning av procedurer ska undersökas, är hur elever lär in dessa. Detta beskrivs i det andra kapitlet, teoretiska förutsättningar. Där redogörs även för analys av data, samt definition på reliabilitet och validitet i en studie som denna.

I det tredje kapitlet beskrivs relevant forskning, vilken har legat till grund för djupanalysen. Först avhandlas skillnaderna mellan procedurell och konceptuell kunskap. Sedan analyseras olika begreppsmodeller för centrala begrepp i skolmatematiken ur ett kvalitetsperspektiv.

Läsanvisning

Lärare och lärarutbildare rekommenderas att läsa avsnitten om begreppsinnläring, med speciell inriktning på de två processerna ”redescription” och ”theory revision”, avsnitt 2.1, i kapitel 2 och framför allt avsnittet om begreppsmodeller, 3.2, i kapitel 3. Även synen på elevmisstag i de ostasiatiska länderna kan vara värdefullt att studera, avsnitt 3.1.6. Övriga avsnitt är inte nödvändiga för att förstå resultatet utan utgör mer vetenskapligt ofrånkomliga delar i rapporten.

1 Introduktion

En tidigare analys av elevers matematikkunskaper baserad på data från TIMSS 2007, nationella ämnesprovet för årskurs 5 och en studie i Lilla Edet, har visat att den traditionella bilden av elevers matematikkunskaper kommit på kant. Den bild av elevernas kunskaper som framträder visar att kunskaperna inte primärt innehåller slumpmässiga räknefel eller brist på förkunskaper. Eleverna har kunskaper, men dessa behöver utvecklas och förädlas ytterligare (Bentley, 2008c).

Eleverna behärskar en rad beräkningsstrategier. Problemet är att dessa inte tillämpas i korrekt sammanhang eller kontext. Det typiska tycks vara att en korrekt strategi tillämpas i fel sammanhang. Benämnda problem kan inte lösas då de traditionella problemsituationerna inte är kända av eleven. Identifikationen av de typiska problemsituationerna subtraktiv och multiplikativ jämförelse, är de som verkar vara mest problematiska. Även modellering med innehållsdivision är problematisk. Men, som konstaterats, saknas det inte kunskaper om själva de matematiska modellerna utan det är identifikationen av problemsituationen som är problematisk.

I geometri, både för årskurs 4 och 8, visade det sig att förståelsen av area-begreppet, dess konservation och additivitet inte behärskades till fullo av en större grupp elever. På grund av de misstag som eleverna uppvisade, framgick att undervisningen sannolikt inte hade varit inriktad på begreppslig förståelse. I årskurs 4 var det vanligt att många elever använde summan av längden och bredden i stället för arean för att ange storleken på en rektangel.

I årskurs 8 var begreppsmodellen för vinkelbegreppet ett problem. Som den internationella forskningen visat har elever svårt att tillägna sig denna modell (Foxman & Ruddock, 1984; Mitchelmore, 1989; Mitchelmore & White, 1998). Spatialförmåga, att tolka en tvådimensionell representation av ett tredimensionellt objekt, visade sig också behöva utvecklas ytterligare. Den skillnad som man fann internationellt mellan pojkar och flickor i spatialförmåga kunde utjämnas då eleverna med hjälp av datoranimeringar fick spatiala erfarenheter. En klar förbättring kunde konstateras, vilken också kvarstod över tid (Ryu, Chong & Song, 2007). Det kan alltså konstateras att eleverna inte saknar uppfattningar om begreppen och begreppsmodellerna men att dessa uppfattningar behöver utvecklas och fördjupas ytterligare.

Algebra är ett område där begreppsförståelsen spelar en avgörande roll. Variabeln, vilken är det centrala begreppet i algebra, hade flertalet elever ett antal uppfattningar om. Dessa uppfattningar syntes i olika sammanhang. En och samma elev kunde ha både korrekta och för sammanhanget relevanta uppfattningar, men även relativt outvecklade uppfattningar som exempelvis att variabeln inte har någon symbolisk betydelse. Även uppfattningar av likhetstecknet spelar en avgörande roll inom algebran. Även inom algebran har elever således begreppsuppfattningar som är dels korrekta och dels sådana som behöver utvecklas ytterligare eller överges.

Mot ovanstående bakgrund kan konstateras att eleverna har en rad kunskaper om beräkningar och begrepp men att dessa i varierade grad behöver utvecklas och förädlas. En traditionell bild av elevernas matematikkunskaper är att det

saknas förkunskaper eller kunskapsbitar som måste sättas på plats eftersom en kunskapsbit bygger på en annan. Denna hierarkiska kunskapsstruktur är typisk för den teoretiska matematiken och många diagnostiska prov bygger på en sådan struktur. Då elever ska lära sig matematik så följer inte nödvändigtvis deras inläring samma hierarkiska struktur under varje del av uppbyggnadsskedet. Att målet däremot ska vara denna struktur eller något som i stort överensstämmer med denna torde vara odiskutabelt. Analysen av TIMSS 2007-data tyder på att nya delar inte läggs till fullt utbyggda och kompletta delar. Snarare tyder resultaten på att bilden är mer komplicerad och att tillägandet sker mer successivt med djupare insikt och där användningen av beräkningsstrategier och begrepps-förståelse kan förfinas över tid (Bentley, 2008c; Niss, 2000).

En viktig fråga berör kunskapsuppbyggnadens struktur och dess koppling till undervisningens inriktning. De olika inriktningarna av matematikundervisning, procedurell eller konceptuell, framhäver denna hierarkiska struktur olika mycket. I en procedurell inriktning fokuseras mycket på beräkningar utan begreppslig förankring. Den kommer därför inte i någon högre grad att belysa hur olika moment av matematiken bygger förståelsemässigt på varandra. En konceptuell undervisning däremot inriktas mer på förståelse av begrepp och generella matematiska principer.

Både vägen till målet och målet självt, den hierarkiska matematiska strukturen, ser olika ut beroende på undervisningens utformning och innehåll av för- enklingar, såsom begreppsmodeller.

I den första djupanalysen av TIMSS 2007 studerades kunskapens beskaffenhet genom att belysa hur elever tillämpade beräkningsstrategier och förstod begrepp eller begreppsmodeller. Detta var ett steg djupare bakom den matema- tiska strukturen. I denna studie är avsikten att kasta ytterligare ljus på elevernas kunskapsuppbyggnad samt att visa vilka begrepp som är särskilt viktiga att förstå. Nedan återges vilka innehållsliga områden som analyseras och vilka data analyserna baseras på:

- Området *taluppfattning och aritmetik* för årskurs 8 där ett antal intressanta begrepp tillkommer, som har relativt stor inverkan på totala resultatet på TIMSS 2007, speciellt proportionalitetsbegreppet. Utvecklingstrender mellan årskurs 4 och 8 studeras trots att det inte är samma elever som följs. Beroende på storleken på delurvalen kan det vara möjligt att dra slutsatser om tydliga trender speciellt om samma trend kan hittas i nationella ämnesproven för årskurs 9. Därför analyseras vissa principiella uppgifter från de nationella ämnesproven för att om möjligt finna trender. Finns sådana och de överensstämmer med motsvarande trender i TIMSS 2007 kan mer kraftfulla slutsatser dras.
- Elevers kunskaper i *geometri* i årskurs 8 i TIMSS 2007 jämförs med motsva- rande uppgifter i nationella ämnesprovet för årskurs 9.
- Även i *algebra* jämförs resultatet för årskurs 8 i TIMSS 2007 med motsva- rande uppgifter i nationella ämnesprovet för årskurs 9.
- För att svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 för årskurs 8 ska kunna be- skrivras med hög precision, görs en jämförelse med årskurs 8 elevers resultat i Hong Kong och Taiwan. Resultaten från dessa länder är särskilt intressanta då flera internationella forskningsprojekt visat att undervisningen huvudsakligen har en inriktning på begreppslig förståelse (Stevenson & Stigler, 1992; Stigler

& Hiebert, 1999). Dessa länders resultat ligger bland de högstpresterande i TIMSS 2007. På vad sätt skiljer sig då resultaten på uppgifter och sekvenser av uppgifter mellan svenska elever och elever från dessa två länder? Finns det några typiska lösningsmönster, som kan förklara eller kasta ljus över skillnaderna i resultaten?

- Även resultat för svenska elever från TIMSS 2003 kommer att utnyttjas, då detta kan göra slutsatser betydligt säkrare.
- Viss jämförelse med resultaten från Sverige och årskurs 4 kommer också att göras för att se om det finns några utvecklingstendenser.

2 Teoretiska förutsättningar

Först presenteras ett antal för studien nödvändiga definitioner av begrepp. Därefter redovisas hur inläring av begrepp går till samt vilken roll begreppsmodeller har i undervisningen. Analysen av data beskrivs och slutligen definieras studiens reliabilitet och validitet.

2.1 Inläring av begrepp och procedurer

Både begrepp och procedurer uppfattas som *fenomen* inom fenomenografin.¹ Tidigare inlärd begrepp spelar en viktig roll då nya begrepp erfars. Om ett nytt begrepp ska kunna erfaras, så måste det skilja ut sig från tidigare inlärd begrepp. Detta sker då *särskiljande begreppsegenskaper eller attribut* urskiljs och uppfattas, vilket lättare kan ske då egenskapen, som attributet representerar varierar. På detta sätt får variationen en central roll i erfandet. Sådana begreppsattribut benämns ofta, som kritiska och kan vara individberoende. Olika individer uppfattar därför inte nödvändigtvis samma attribut som särskiljande (Bentley, 2008a; Marton & Booth, 2000).

Upprepad exponering för attributen spelar en viktig roll vid inläring. Två delvis olika processer ”theory revision” och ”redescription” är verksamma beroende på hur ofta eleven erfar begreppet.

Om eleven erfar begreppet mer sällan svarar ”theory revision” för inläringen. Först skapas en relativt grov uppfattning av begreppet. Då eleven på nytt erfar begreppet förfinas successivt uppfattningen för att över tid närma sig en uppfattning, som står i överensstämmelse med individens inflöde av sensomotoriska data. Beskrivningen av denna process liknar i hög grad Vygotskys (1986) teori om inläring av vardagliga begrepp (Bentley, 2008a).

Processen ”redescription” å andra sidan är verksam då eleven ofta erfar begreppet i fråga. Uppfattningen av begreppet formas i hjärnans associativa delar och kontrolleras mot individens inflöde av sensomotoriska data innan den lagras via ”redescription” i långtidsminnet (Bentley, 2008a).

Ett begrepp anses ha *förstått*, då tillräcklig kunskap har tillägnats om begreppsattributen och andra involverade begrepp samt om relationen emellan dem emellan (Bentley 2008a, s.11).

I skolmatematiken förekommer förenklingar av den matematiska disciplinens begrepp. Sådana förenklingar, som görs för att öka tillgängligheten för eleverna och underlätta deras lärande, benämns *begreppsmodeller* och har ofta begränsade tillämpningsområden. Många av de modeller, som används i svenska skolor, har beforskats internationellt (Bentley, 2008a).

Procedurer, som också uppfattas som fenomen, har en med begrepp analog uppbyggnad. Då begrepp byggs upp av sina egenskaper och andra kända begrepp, så byggs procedurer upp med utgångspunkt i för individen tidigare kända procedurer. Dessa delprocedurer, som ofta är strikt sekvenserade, utgör *procedurens olika steg*. En procedur kan *tillämpas* både korrekt och inkorrekt.

¹ Fenomenografi är en forskningsinriktning som ser inläring ur den lärandes perspektiv. Olika kvalitativa uppfattningar om begrepp och procedurer studeras

Speciellt den inkorrekt tillämpningen är intressant, då den också kan avslöja hur individen har uppfattat både proceduren i fråga samt involverade begrepp. Ur forskningssynpunkt kan det därför vara mer givande att studera hur en procedur tillämpas i ett sammanhang än att bara avgöra om tillämpningen är korrekt eller inkorrekt. Om en procedur tillämpas korrekt i rätt sammanhang, så anses det att individen *behärskar* proceduren. De modeller av den matematiska disciplinens procedurer som används i skolmatematiken kan ibland benämnas *procedurmodeller* (Bentley, 2008b).

I benämnda problem beskriver texten en problemsituation. Utifrån denna ska en matematisk modell skapas. Denna process benämns *enkodning*. Den matematiska modellen kan innehålla minst en operation. För att komma fram till en sådan modell måste eleverna vara bekanta med de fyra elementära operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division samt kunna avgöra problem-situationens beskaffenhet.

Teoretiskt sett är en problemsituation att uppfatta som ett begrepp med sina begreppsattribut, vilka beskriver situationens karaktär. Ett exempel på en problemsituation är en jämförelsesituation där två tal ska jämföras. Själva jämförelsen karaktäriserar då situationen. Till en viss typ av problemsituation är en specifik operation förknippad. Så enkodningen består av att identifiera vilken typ av problemsituation, som texten beskriver samt av att bestämma här till hörande operation (Bentley, 2008a).

2.2 Analys av data

Inom fenomenografin utgörs traditionellt data av utskrivna intervjuer. Det förutsätts att individernas berättelser speglar deras sätt att tänka och förstå olika fenomen. Men även individers beteenden har varit utgångspunkt för fenomenografiska analyser (Lindahl, 1996). Genom komparativa analyser av data vaskas uppfattningskategorier fram, först på grupp-nivå, eftersom stabiliteten i uppfattningar är större där än på individ-nivå. Detta beror på att en individ kan exponera både fragment av uppfattningar och mer eller mindre hela uppfattningar. Från ett fragment kan det vara svårt att skapa en fullständig beskrivning av en kategori. När kategorierna väl är beskrivna, kan analysen återvända till individ-nivå. Utifrån data identifieras då vilka uppfattningar varje enskild individ har exponerat. En individ kan både ha flera uppfattningar om samma begrepp och tillämpa olika beräkningsprocedurer på samma operation, vilket gör att variationen blir tvådimensionell, en som kvalitativt beskriver uppfattningarnas beskaffenhet samt en som beskriver antalet uppfattningar varje individ visat. Den senare kan därför också analyseras statistiskt. Ett antal individer i ett urval har var och en ett antal uppfattningar eller tillämpningar. I TIMSS-projektet kan emellertid en elev exponera endast en lösning per uppgift. Detta kan beskrivas statistiskt med frekvenser och relativa frekvenser, vilket gör att slutsatser om förhållanden i populationen kan dras från resultat funna i urvalen (Bentley, 2008a)

I vissa fall kan uppfattningarna verka oförenliga. Det är viktigt att notera, att en individ kan ha flera uppfattningar och tillämpningar än vad som exponeras i intervjusituationen. Karaktären på de frågor och experimentproblemens beskaffenhet, som används i intervjun, kan avgöra om en speciell uppfattning eller procedur exponeras. Lärandets process och resultat ses alltså ur den lärandes perspektiv i en fenomenografisk teoriram (Bentley, 2008a).

Då elevlösningar av uppgifterna i TIMSS och i det nationella ämnesprovet analyseras, ses lösningarna som dokumenterade beteenden utifrån tillämpningar av procedurer och uppfattningar av begrepp. Precisionen i dokumentationen varierar givetvis och därmed kan också tolkningen vara mer eller mindre precis. Även om en lösning är väl dokumenterad kan det vara svårt att kausalt binda den till en speciell begreppsuppfattning eller tillämpning av en procedur. Om begreppsuppfattningen eller proceduren tidigare är känd kan detta avsevärt underlätta en sådan kausal analys. Har däremot elever intervjuats om begreppsuppfattningar och tillämpningar av procedurer i relation till en viss problemtyp och det därmed har framkommit hur deras uppfattningar och tillämpningar är manifesterade i lösningar av ett sådant typproblem, så kan en kausal relation lättare identifieras. Med dessa förutsättningar blir tolkningsprocessen av elevlösningar betydligt enklare. En viss osäkerhet kan dock finnas i det enskilda fallet genom att en lösning slumpvis skulle kunna överensstämma med tillämpningen av en viss procedur utan att eleven har tillämpat proceduren ifråga. Om däremot stora grupper av elever uppvisar samma lösningsprofil på en uppgift, så är det knappast troligt att detta enbart beror på slumpen. Sannolikt hänger detta i stället samman med en speciell tillämpning av en procedur eller tillämpning av en för sammanhanget icke avsedd procedur.

Mot ovanstående bakgrund kan ett lämpligt tillvägagångssätt vid analys av elevlösningar av uppgifter i matematik vara att först intervjua ett antal elever om hur de gått tillväga, då de löst uppgifterna samt om deras uppfattningar om involverade begrepp och deras tillämpningar av procedurer. När sålunda beskrivningskategorierna framkommit, är det möjligt att dra slutsatser utifrån övriga icke intervjuade elevers lösningar. Denna studie grundar sig därför på antagandet, att elevers lösningar speglar deras uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer.

Om det inte har varit möjligt att genomföra intervjuer som förberedelse för analysen av elevers lösningar, så kan tidigare forskning, såväl nationell som internationell, utgöra motsvarande vägledning.

2.3 Reliabilitet och validitet

Reliabilitet är ett mått på noggrannhet i datainsamlingsprocessen (Swedner, 1978). Hög reliabilitet förutsätter en avslappnad intervjusituation, icke vägledande frågor samt icke bekräftande responser från intervjuaren.

Validitet i fenomenografiska studier innefattar primärt intern och extern validitet. Den interna validiteten består dels av innehållsvaliditet och dels av konstruktionsvaliditet.

Innehållsvaliditet fångar hur väl otolkade data beskriver individers uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer. Därför måste frågor och problemuppgifter ha en sådan karaktär, att de tillåter en allsidig exponering av uppfattningar av begrepp och tillämpningar av procedurer. I annat fall kan uppfattningar och tillämpningar förbli oexponerade. Eftersom tillämpningar av vissa procedurer är kontextuellt betingade, måste en uppsättning av problemuppgifter innehålla en kontextuell variation. Innehållsvaliditeten utgör alltså ett autenticitetskriterium (Bentley, 2008a).

Konstruktionsvaliditet däremot, fokuserar tolkningsresultat av data och är därför ett mått på hur väl kategorierna speglar försökspersonernas förstå-

else av begrepp och tillämpningar av procedurer givet de data som föreligger (Bentley,2008a).

Extern validitet berör begreppet generalitet. I en utvidgad fenomenografisk teoriram har generalitetsbegreppet en något annan betydelse än vid kvantitativa studier. Beskrivningskategorierna anses representera den variation som föreligger i populationen. Eftersom denna studie utförs i en utvidgad fenomenografisk teoriram förekommer också en statistisk behandling av data. I denna del av studien får generalitetsbegreppet en delvis annan innebörd som berör möjligheten att från urval dra sannolika slutsatser om populationen. Urvalens representativitet blir då av central betydelse (Bentley,2008a).

Denna studie innefattar tre urval elever från våren 2007, dels de elever som deltagit i TIMSS i årskurs 4 och dels de i årskurs 8 samt den grupp av elever i årskurs 9 som gjort det nationella ämnesprovet och vars lösningar insamlats. Det är viktigt att belysa frågan om extrapolering av dessa tre resultat från urvalen till att gälla respektive population dvs. samtliga elever i årskurserna 4, 8 och 9.

Urvalet av TIMSS-deltagarna är gjort på skolnivå, dvs. slumpvis utvalda skolor, 155 för årskurs 4 och 159 för årskurs 8. Då urvalet är gjort på skolnivå är enskilda elever inte slumpvis utvalda.

Alla provuppgifter, som deltagarna gjort, har inte analyserats utan huvudsakligen de som frisläppts. Per årskurs kommer de frisläppta uppgifterna från 6 häften av totalt 14, vilket motsvarar ungefär 43 procent av samtliga uppgifter. I årskurs 4 har varje häfte gjorts av ca 450 elever och i årskurs 8 av ca 550 elever. Totalt har alltså i årskurs 4 närmare 33 000 elevlösningar analyserats och i årskurs 8 närmare 40 000. Mot denna bakgrund har endast tydliga trender vad gäller elevernas kunskaper behandlats.

Antalet analyserade elevlösningar från det nationella ämnesprovet för årskurs 9 är ca 400, vilket är en relativt liten andel av de ca 100 000 elever som går i en årskurs på grundskolan. De ca 400 elevlösningarna är för få för att självständigt kunna utgöra en solid grund för slutsatser. Om däremot samma typ av elevmisslag eller kunskapsprofiler skulle konstateras i flera studier, så blir generaliseringsmöjligheterna säkrare och större.

3 Några forskningsresultat

Ett av de sätt att beskriva matematisk kunskap, som ofta dyker upp i samband med internationella komparativa studier, har varit indelningen i procedurell och konceptuell kunskap. Kärnfulla matematiska principer har visat sig ha stor betydelse för elevers lärande. Denna indelning i olika kunskapslag och principer behandlas i det första avsnittet. Även begreppsmodeller skulle kunna utgöra kärnfulla principer. För att avgöra kvaliteten på begreppsmodellerna har forskningen utarbetat vissa kriterier. I det andra avsnittet problematiseras dessa frågor. I de följande avsnitten beskrivs och analyseras olika begreppsmodeller för tal i bråkform, för proportionalitet, för area samt för begrepp inom algebran. I det näst sista avsnittet diskuteras de konsekvenser som övergeneraliseringar kan ha. Dessutom behandlas möjliga konsekvenser av en parallell användning av flera begreppsmodeller för ett och samma begrepp i undervisningen. Därefter ges en sammanfattning av kapitlet.

3.1 Den matematiska kunskapens beskaffenhet

Först beskrivs skillnaden mellan procedurell och konceptuell kunskap samt hur denna kommer till uttryck i undervisningen och i läroböcker. I samband med dessa två kunskapsstyper har begreppet transfer särskild betydelse. Detta presenteras i avsnitt 3.1.5. I flera av de ostasiatiska länderna uppfattas och behandlas elevers misstag på ett annat sätt än i undersökta västländerna och redovisas i tredje avsnittet. Därefter beskrivs kärnfulla matematiska principer, vilka har en central roll i konceptuellt inriktad undervisning. Slutligen analyseras hur de två kunskapslagen speglas i elevers lösningar av grupper av uppgifter.

3.1.1 Procedurell och konceptuell kunskap

Procedurell kunskap har fokus på regler och procedurer för lösningar av uppgifter. Rittle-Johnson och Wagner Alibali (1999) menade att procedurell kunskap kunde ses som "action sequences for solving problems" (s. 175), alltså sekvenser av handlingar. Denna kunskap inbegriper sålunda primärt procedurer, det vill säga handlingssekvenser för problemlösning, och inte förståelse av begrepp.

Konceptuell kunskap däremot definierar Rittle-Johnson och Wagner Alibali (1999) som "explicit or implicit understanding of the principles that govern a domain and of the interrelations between pieces of knowledge in a domain" (s. 175). Detta är ett vanligt sätt att beskriva förståelse av principer och begrepp. Så konceptuell kunskap inom ett matematiskt område innebär primärt förståelse av de matematiska begreppen inom området. Begrepp kan också vara hierarkiskt strukturerade i sub-begrepp, begrepp och meta-begrepp. Ett exempel härpå är talbegreppet (Bentley, 2008).

En procedur kan vara kontextuellt betingad och kan därför användas i en speciell typ av problemsituationer. En sådan procedur kan inte utan vidare transfereras till en annan typ av situationer utan att proceduren först modifieras. Analogt med begrepp kan en grupp av procedurer sammanfattas med en övergripande gemensam princip eller metaprocedur. En sådan metaprocedur, vilken beskriver hela gruppen av procedurer på en mer abstrakt nivå, kan sägas vara en

ekvivalensklass i matematisk bemärkelse. Ekvivalensrelationen utgörs då av den gemensamma abstrakta principen. En sådan metaprocedur kan därmed benämnas en metakognitiv procedur (Delazer, 2003).

Procedurer har också en begreppslig förankring, som kan ha nära anknytning till metaproceduren. Det är viktigt att konstatera, att en metaprinzip inte ses som enbart procedurell kunskap, då en sådan princip innebär en relation mellan olika kunskapsdelar och därför också kan ses som konceptuell. Så för att ytterligare poängtera skillnaden mellan de två kunskapstyperna så kan konstateras, att den procedurella kunskapen har en lokal natur och hänförs till hur specifika matematiska problem löses, medan den konceptuella kunskapen innebär, att olika delar av matematiska kunskaper är sammanbundna av kärnfulla principer och begrepp. Man kan säga, att den procedurella kunskapen utgörs mer av isolerade kunskapsöar utan inbördes explicita samband.

Innehållet i en undervisning behöver inte vara så strikt uppdelat. En konceptuell undervisning innehåller inte enbart begreppsförståelse utan också matematiska procedurer, medan en procedurell undervisning mer eller mindre enbart tar upp procedurer.

3.1.2 Relationen mellan procedurell och konceptuell kunskap

Hur är då relationen mellan de två kunskapstyperna? Kan de generera varandra? Det har visat sig, att konceptuell kunskap kan generera procedurell kunskap. Men det är betydligt mindre vanligt, att procedurell kunskap kan generera konceptuell. Detta kan endast ske under speciella villkor (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Bentley, 2008a).

Som tidigare beskrivits i kapitlet ”Teoretiska förutsättningar” lärs begrepp in genom att begreppsattributen erfars i relation till tidigare inlärd begrepp. Dessa attribut benämns särskiljande då de gör, att två likartade begrepp kan skiljas åt. Genom att se dem i varierande situationer kan de särskiljande begreppsattributen lättare erfaras.

Det som kan vara problematiskt för en lärande är att urskilja om ett attribut tillhör ett begrepp eller om det är en del av den kontext, som begreppet befinner sig i. Mot denna bakgrund blir det därför särskilt viktigt, att kontexten varierar så att det lättare går att avgöra huruvida attributet är ett begreppsattribut eller ej. Det är därför svårt att erfa ett begrepp med dess särskiljande attribut i en procedur, vilken tillämpas på bundna problem eller i en specifik kontext. Då kan det vara svårt att avgöra vilka attribut som tillhör begreppet och vilka som tillhör kontexten. Denna svårighet kan vara ett av skälen till att procedurer har så svårt att generera konceptuell kunskap.

En kontext rörande procent kan vara ett exempel där det kan vara svårt att avgöra om ett attribut är kontextspecifikt eller om det är en del av proportionalitetsbegreppet. Då procent introduceras i undervisningen sker detta procedurellt och är inriktat på hur beräkningarna sker med omvandling av procentsatsen till decimalform och multiplikation med referenten och inte på proportionalitetens egenskaper, som är det som procentberäkningar begreppsligt representerar. Det troliga är, att eleverna inte upptäcker att proportionalitetsbegreppet finns med i sammanhanget. Skulle de göra det, skulle de kunna tro, att omvandling av procentsatser till decimalform är en avgörande egenskap hos proportionalitet, vilket det inte är.

Även en problemsituation med sträcka, hastighet och tid representerar en proportionalitet. Dock finns anledning att anta, att sambandet mellan storheterna i allmänhet introduceras med hjälp av formeln $s = v \cdot t$. Detta gör det inte enkelt att se, att proportionalitetsbegreppet är en del av sammanhanget. Även här kan elever få intrycket, att de sammanhangsspecifika egenskaperna tillhör begreppsattributen.

Det är viktigt att påpeka, att procedurer kan läras och exekveras utan någon begreppslig förståelse. Delazer (2003) refererar Giaquinto (1995) och menar att:

... pure knowledge of an arithmetic principle is not equivalent to knowledge that requires understanding. That is, a principle may be successfully applied without being understood and thus consists of procedural knowledge. As an example Giaquinto stated that one may be taught that $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ without knowing why that should be true. Several other examples may be given, and it is certainly a common experience for primary-school children to apply principles without understanding their conceptual basis (Delazer, M., 2003).

Så enskilda procedurer kan läras utan någon egentlig begreppslig förståelse. Då en grupp av procedurer har en gemensam övergripande princip, kan det emellertid inte uteslutas, att denna princip abstraheras. I ett sådant fall kan begreppslig förståelse äga rum.

3.1.3 Procedurell och konceptuell undervisning

Eftersom det visat sig i jämförande internationella kunskapsmätningar, att undervisningens inriktning haft avgörande betydelse för elevernas prestationer, kan det vara intressant att beskriva undervisningen i de länder, som är ledande. Flera av de ostasiatiska länderna som Singapore, Japan, Taiwan och Hong Kong ligger bland de främsta i TIMSS. Ett antal studier har visat, att den konceptuella inriktningen av undervisningen kan förklara dessa länders framgångar (Bl.a. Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999). Stevenson och Stigler (1992) har i sin beskrivning av undervisningen i Japan, Kina, och Taiwan jämfört med den i USA. Även Stigler och Hiebert (1999) har beskrivit undervisningen i Japan, Tyskland och USA i ett jämförande perspektiv.

En typisk lektion i de ostasiatiska länderna centreras runt ett problem, som ska lösas, ofta ett problem som eleverna inte stött på tidigare. Problemet är väl utprovat för att erbjuda så många olika lösningar som möjligt. Detta liknar vad Bentley (2008) benämnt ”powerful experiment problems” (kärnfulla matematiska principer), vilka har egenskapen att tillåta exponering av alla kända sätt att förstå ett begrepp. När det gäller proportionalitetsbegreppet är det så kallade ”saftproblemet” ett sådant exempel (Se avsnitt 3.1.4). Då läraren försäkrat sig om, att eleverna uppfattat problemet på avsett sätt, så vidtar enskilt arbete. Läraren kontrollerar då, om eleverna som grupp har funnit de olika förväntade lösningarna. Statistiskt sett krävs härför en grupp om minst 40 elever (Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999).

Därefter vidtar en presentation av elevlösningarna på skrivtavlan. Man börjar med den minst avancerade lösningen och fortsätter successivt med allt mer avancerade lösningar. Sedan diskuteras lösningarna och eleverna motiverar sina lösningsstrategier. Elevernas argumentation för motiv till val av lösningsmetod är ett led i en medveten träning. Läraren använder sig av frågor, inte för att elev-

erna primärt ska visa vad de kan utan för att stimulera elevernas tänkande kring problemet samt kring de begrepp, som problemet ska illustrera. Mot slutet av lektionen knyter läraren ihop de olika kunskapsbitarna och visar på vad problemet har genererat för kunskap och framhäver lektionens sammanhängande tema. I till exempel Japan får lektionen inte störas av ovidkommande aktiviteter, för då riskerar eleverna att inte uppfatta lektionens tema och den poäng som problemet ska illustrera (Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999).

Elevernas självständiga arbete kunde indelas i tre kategorier: "... practice routine procedures, apply concepts or procedures in new situations, and invent something new or analyze situations in new ways." (Stigler & Hiebert, 1999, s.70). Att träna procedurer är en typisk procedur inriktad del av undervisningen, vilket överensstämmer med inriktningen av stora delar av lektionerna i Tyskland och USA². Den andra kategorin handlar om tillämpning av begrepp och procedurer i nya situationer. Om situationer ska vara nya så krävs det rimligen att de är obekanta för eleverna. Därmed får eleverna medvetet träna att tillämpa procedurer i obekanta situationer. Detta gör, att eleverna lättare kan avgöra om ett attribut är en del av begreppets egenskaper eller om det är en del av kontexten. Vad som konstituerar själva begreppet framträder lättare för eleverna om kontexten och sammanhanget varierar (Bentley, 2008a). Denna *transfer* eller överföring av procedurer till nya situationer, vilket är ett typiskt konceptuellt innehåll i undervisningen, är något som knappast förekommer i de undersökta västländerna.

I den tredje kategorin ingår att hitta på något nytt matematiskt, som exempelvis en modifiering av en procedur för att passa en helt ny situation. Denna kreativa sida inom matematiken tycks förekomma frekvent i de två ostasiatiska länderna³ medan den i väst nästan helt lyser med sin frånvaro (Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999).

Redan tidigt påpekade Alfred North Whitehead (1911/1948) vikten av en undervisning där de matematiska begreppen har en central plats:

The reason for this failure of the science to live up to its great reputation is that its fundamental ideas are not explained to the student disentangled from the technical procedure which has been invented to facilitate their exact presentation in particular instances. Accordingly, the unfortunate learner finds himself struggling to acquire knowledge of mass of details which are not illuminated by any general conception (Whitehead, 1911/1948, pp. 1–2).

Han menade, att om de matematiska begreppen undervisades om, så knyter de ihop de olika delarna av matematiken. I annat fall exponeras eleverna för en massa isolerade detaljer utan inbördes sammanhang.

I västländerna dominerar den procedurinriktade undervisningen. Den karaktäriseras av att matematiska regler står i fokus och presenteras i form av beräkningsformler, som sedan övas under elevernas självständiga arbete. Ball, Lubien-ski och Mewborn (2001) menade:

The pull towards neat routinized instruction is very strong. Teaching measurement by giving out formulas – $l \cdot w = \text{some number of square units}$ –

² Med västländerna avses främst Tyskland och USA men beskrivningarna äger även tillämpning på andra länder i Europa.

³ Med de ostasiatiska länderna avses i fortsättningen främst Hong Kong och Taiwan.

may seem much more efficient than hauling out containers, blocks, and rulers and having students explore the different ways to answer the questions of “how big” or “how much”. With focused, bounded tasks, students get the right answers, and everyone can think that they are successful. The fact that these bounded tasks sometimes result in sixth graders, who think that you measure water with rulers may, unfortunately, go unnoticed (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001, p. 436).

Uppgifterna var dessutom inskränkta till att avse endast direkta tillämpningar av den procedur som presenterats. Detta kan göra att eleverna verkar framgångsrika, då de löser de problem de ska, men de har i själva verket inte nödvändigtvis förstått särskilt mycket.

3.1.4 Läroböckernas inriktning

Som redovisats i tidigare avsnitt, så har undervisningen i västländerna en procedurell inriktning, vilket också läroböckerna har. Stodolsky (1988), som analyserade läroböcker i matematik i USA, hävdade att ”concepts and procedures were often inadequately developed, with just one or two examples given, and that the textbooks emphasized ‘hints and reminders’ to students about what to do”. Han fann också att begreppen omkrets och area introducerades med formler.

I Finland har också den procedurella inriktningen av läroböcker studerats av Haapasalo (2003), som menade att

Textbook writers and teachers seem to approach most topics in school mathematics procedurally. With regards to the gradient, they like to serve it as equation, and get pupils, with great hurry, to do mechanical manipulations with it, without caring too much about what to do and why the particular procedures work. Activities which allow pupils to produce the right answers without knowing much about the relevant concept attributes can lead the teacher to over-expectations concerning the child’s ability to get out of simple context-oriented – or sometimes pure mechanical – situations (Haapasalo, 2003, s.).

Denna procedurella inriktning hävdas ha mer eller mindre mekaniska manipulationer som centrala inslag. Så även i Finland, som dock tycks ha hävdat sig väl i internationella jämförelser, PISA 2003, har läroböcker och undervisning en procedurell inriktning.

Förutom den procedurella inriktningen så har ett annat problem, som rör läroböcker, uppmärksammats av flera forskarlag kopplade till TIMSS. En vanlig metod i läroböckerna visade sig vara att omväxlande presentera samma områden eller moment återkommande år efter år. Denna metod kallas spiralmetoden. Denna innebar, att det matematiska innehållet inte fördjupades och att eleverna endast ytligt exponerades för många innehållsliga områden under begränsad tid. Under en lektion kunde alltså elever stöta på aritmetik, geometri och statistik omväxlande och återkommande, vilket inte gav tillfälle till någon djupare förståelse (Schmidt, McKnight & Raizen, 1997; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang & Wiley, 1997a; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang & Wiley, 1997b).

3.1.5 Transfer

Det har visat sig att transfer eller överföring av kunskaper från en kontext till en obekant kontext underlättas med konceptuell kunskap. Rittle-Johnson och

Wagner Alibali (1999) menade att förklaringen till denna transfer var, att en elev med hjälp av den konceptuella kunskapen hade ett slags facit för att kontrollera om modifierade procedurer eller delvis nya procedurer var korrekta. På så sätt kunde de inkorrekta procedurerna sorteras bort.

Om elever exponerades för problem i olika kontexter och tränade att modifiera procedurer till de olika kontexterna så kan detta underlätta transfer. Troligen blir konsekvensen att eleverna erfar en metakognitiv procedur vid sådan träning (Shepard, 2001). Bransford menade redan 1979, att det fanns ett nära samband mellan att förstå ett begrepp och att transferera kunskap för att lösa problem, som representerade obekanta situationer.

Av allt att döma så stimuleras eleverna i de ostasiatiska länderna till att lösa problem i olika kontextuella situationer för att just transfer ska kunna äga rum. Har elever en gång lärt sig att transferera kunskaper och lösningsprocedurer så är de troligen mer medvetna om möjligheterna att transferera och söker därför mer ihärdigt efter modifierade procedurer, då de stöter på nya problemsituationer.

Eleverna i västländerna är uppenbarligen inte lika tränade att transferera procedurer, då det hör till undantagen att en sådan medveten träning förekommer i undervisningen. Därför är deras kunskaper om procedurer för att lösa problem mer att ses som isolerade öar utan inbördes samband med varandra. Enligt Stigler och Hiebert (1999) så ses matematikens natur i västländerna som en mängd procedurer för problemlösning. De menade att

Although teachers might understand that other things must be added to these procedures to get the complete definition of mathematics, many behave as if mathematics is a subject whose use for students, in the end, is as a set of procedures for solving problems (s.89).

Stigler och Hiebert (1999) menade alltså, att lärarna skulle kunna vara medvetna om att mer behövs än att bara träna procedurer. Trots denna förmodade medvetenhet sker ingen annan träning i klassrummet och därmed heller ingen träning av transfer.

3.1.6 En annorlunda syn på elevers misstag

I de ostasiatiska länderna sågs alltså inte elevers misstag som problem utan som steg på vägen mot förståelse i en inlärningssituation. Att en elev exponerade ett misstag var alltså ett tecken på, att eleven var på väg mot att förstå ett visst begrepp. Lärarna utnyttjade detta till att diskutera misstaget så att andra elever skulle undvika att göra samma misstag. Andra elever kunde då också förstå hur begreppet *inte* skulle förstås och begreppsuppfattningen preciserades då på detta sätt (Stigler & Hiebert, 1999).

I västländerna diskuterades inte misstag gemensamt med samtliga elever, för då kunde fler elever missförstå begreppet. Därför sågs det inte som önskvärt, att undervisningen behandlade misstag, vilka i stället undveks. På grund av undervisningens ytliga karaktär var detta nog en adekvat reaktion från lärarnas sida. Den djupare förståelse, som troligen krävs för att ta upp ett misstag, exponeras eleverna i väst inte för. Utan en sådan djuplodning som grund för förståelse är risken för missförstånd uppenbar. Lärarna i USA menade därför att genom en stegvis ökning av svårighetsgraden i procedurerna så skulle misstag undvikas. Till exempel skulle addition av tal i bråkform introduceras successivt genom att

liknämninga bråk först skulle adderas och sedan enkla bråk med olika nämnare. Därefter skulle de svårare problemen som $\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$ behandlas (Stigler & Hiebert, 1999).

I Japan startade lärarna däremot med det svårare problemet och diskuterade olika lösningar av det. Eleverna fick sedan motivera sina lösningsmetoder. Därefter studerades och diskuterades elevernas misstag gemensamt i klassen. Det vanliga misstaget att också addera nämnarna undersöktes noggrant. Konsekvenser av detta påvisades genom att man adderade en halv med en halv, vilket då gav summan $\frac{2}{4}$. Efter förkortning visade sig detta bli en halv. På detta sätt tydliggjordes för eleverna att denna addition av täljarna och nämnarna var en felaktig beräkningsprocedur, eftersom summan av två halva inte kan bli en halv. Upplevelsen av en sådan orimlighet gjorde att eleverna förstod varför de skulle undvika detta misstag. Sammanfattningsvis ansågs alltså misstag vara en del av inlärningsprocessen i de undersökta ostasiatiska länderna (Stigler & Hiebert, 1999, s.91; Stevenson & Stigler, 1992, s.147, 192).

3.1.7 Kärnfulla matematiska principer

Baroody (1987) introducerade begreppet *kärnfulla matematiska principer* (powerful mathematical ideas). Med en sådan matematisk princip menade han en som är tillämpbar i många olika matematiska situationer och därför används återkommande i undervisningen. Principen knyter också ihop flera olika innehållsliga delar av matematiken. Liping Ma (1999) exemplifierade detta med areabegreppet och visade, att ett stort antal geometriska figurers area kan återföras på arean av en rektangel. En triangelns area är hälften av den omskrivna rektangelns area. I en parallelogram grupperas en del av den om så att en rektangel bildas. På liknande sätt sker i ett parallelltrapets och i en godtycklig fyrhörning. Även cirkelns och ellipsens areor kan hänföras till arean av en rektangel. Cirkelns area är πr^2 , vilket betyder att dess area är π gånger större än en kvadrat med sidorna lika stora som cirkelns radie r . Ellipsens area, πab , vilket innebär att dess area är π gånger större än en rektangel med sidorna, vilka är hälften av storaxeln (a) och hälften av lillaxeln (b). Poängen med att en matematisk princip dyker upp i undervisningen vid ett flertal tillfällen är, att den känns lättare igen av eleverna och därför lärs bättre. Eleverna lär sig dessutom att se större matematiska sammanhang. Olika kunskapsområden inom matematiken knyts alltså ihop med hjälp av dessa kärnfulla principer samtidigt som transfer mellan olika kontexter kan underlättas.

Fler kärnfulla matematiska principer finns i samband med behandlingen av variabler i olika kontexter. En bokstavsbezeichnung kan behandlas på samma sätt oberoende av om den finns i en ekvation, i ett uttryck, i en funktion eller i en formel trots att den kan ha delvis olika betydelser i de olika kontexterna. Bokstavsbezeichnung kan representera ett specifikt okänt tal i en ekvationskontext men också ett generellt tal i en funktions- eller formelkontext. Detta förhållande kan verka självklart för den invigde läraren men behöver inte alls vara så självklart för elever för vilka fokus ofta är på att manipulera bokstäverna på olika sätt i olika kontexter.

3.1.8 Lösningmönster – En indikation på undervisningens inriktning

En naturlig fråga att ställa är hur elevers procedurella och konceptuella kunskap kan manifesteras i lösningar av uppgifter. Eftersom procedurell kunskap ofta ut-

görs av procedurer kopplade till problem i specifika kontexter, så har procedurell kunskap ofta en lokal natur, vilket även kan speglas i elevernas lösningsmönster. Uppgifter, som avser att testa ett och samma begrepp i olika problemsituationer eller i olika kontexter, löses lättare i den problemsituation eller i den kontext, i vilken eleven lärt sig proceduren. Då transfer inte underlättas av procedurell kunskap, kan i denna specifika kontext en sådan uppgift lösas medan samma typ av uppgift i en annan kontext inte kan lösas. Konceptuell kunskap däremot gör, att fler uppgifter, som testar samma begrepp, kan lösas i flera olika kontexter, eftersom begreppsförståelsen underlättar transfer (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Bentley, 2008a).

Som tidigare redovisats kan elever ha flera uppfattningar om ett och samma begrepp. Beroende på problemuppgifternas karaktär kan en viss uppfattning exponeras. Slutsatsen blir då, att eleven har denna uppfattning. Om däremot ingen uppfattning exponeras, så kan trots detta eleven ha en speciell uppfattning. Problemuppgiften kanske inte triggat exponering av just denna uppfattning. Då går det inte att dra slutsatsen, att eleven saknar denna uppfattning, utan endast att eleven inte har exponerat någon uppfattning i den specifika situationen (Bentley 2008a).

Om en medveten träning av transfer sker genom att uppgifter i olika kontexter eller i delvis nya kontexter löses och diskuteras, så tillägnar sig eleverna troligen metakognitiva procedurer eller begrepp. Detta medför att eleverna kan lösa en grupp av uppgifter, som testar ett och samma begrepp i flera olika kontexter. Sådan träning av transfer förekommer i det närmaste inte alls i de undersökta västländerna. Läroböckernas innehåll, som studerats i flera vetenskapliga studier, förstärker denna bild av kunskapens struktur i de olika länderna (Stodolsky, 1988; Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999; Haapasalo, 2003).

Med hjälp av elevernas lösningsmönster så är det möjligt att avgöra huruvida kunskapen har en procedurell eller en konceptuell profil. Om endast enstaka uppgifter lösts här och var så beror detta på att kunskapen varit av procedurell karaktär. Har däremot mer eller mindre samtliga uppgifter lösts, uppgifter som belyser samma begrepp i olika problemsituationer eller kontexter, så har kunskapen varit konceptuellt strukturerad.

Hur är det då möjligt att dra slutsatser om undervisningens beskaffenhet? Om undervisningen haft en procedurell inriktning, så är det knappast troligt, att eleverna själva har konstruerat konceptuell kunskap utan snarare en procedurell kunskap. Om däremot begreppsinsläring varit central i undervisningen så finns förutsättningar för att eleverna tillägnat sig konceptuellt orienterad kunskap. Beroende på hur eleverna löser uppgifter som rör samma begrepp eller princip, så kan alltså slutsatser om undervisningens orientering dras.

3.2 Begreppsmodeller

I det första avsnittet beskrivs de kvalitetskriterier för begreppsmodeller som är frekventa i forskningen. Därefter problematiseras skillnaden mellan begreppsmodeller och modellering av situationer i textproblem.

3.2.1 Kvalitetskriterier

Begreppsmodeller används i skolmatematiken för att göra komplicerat matematiskt innehåll lättare tillgängligt för eleverna. Detta innebär att modellerna ut-

görs av förenklingar av det matematiska innehållet. Det är därför viktigt, att en sådan modell håller en viss kvalitet och att den matematiska strukturen inte förvrängs. Därför finns kvalitetskriterier för att utvärdera olika begreppsmodeller.

Det första kriteriet benämns *strukturell validitet* och är ett mått på hur väl den matematiska strukturen bevaras. Förvrängs strukturen eller utelämnas viktiga karaktäristiska drag, så anses den strukturella validiteten vara låg. Det är också möjligt att egenskaper, utöver de som inte finns i det strikt matematiska begreppets definition, tillförs och att detta kan ge en felaktig uppfattning om begreppets matematiska natur (Charles, Nason & Cooper, 1999).

Ekologisk validitet avser hur väl modellen är anpassad till elevernas erfarenheter i vid mening, alltså inte bara till deras matematiska erfarenheter. Även elevernas andra erfarenheter kan användas för att underlätta deras förståelse av matematiska fenomen. Strukturer från andra områden i elevernas erfarenhetsvärld kan spegla matematiska strukturer och på så sätt underlätta inläringen (Hiebert & Carpenter, 1992; Charles et al., 1999). Nedan följande kriterium anknyter också till denna aspekt.

Enkelhet (Simplicity) är ett mått på modellens enkelhet. Om modellen är komplicerad att lära sig, så kan den matematiska strukturen döljas så, att det som modellen avser att illustrera inte framträder tydligt. Elevers möda måste då läggas på att ta till sig modellen som sådan, vilket gör att det begrepp som modellen avser att belysa inte uppfattas av eleven. Det fjärde kriteriet är inte heller det helt skilt från de tre första (Charles et al., 1999).

En annan avgörande sida för en modells kvalitet är om den ger vägledning vid beräkningar. Denna egenskap fångas av den *operationella validiteten*, som kan sägas mäta modellens användbarhet vid beräkningar och problemlösning.

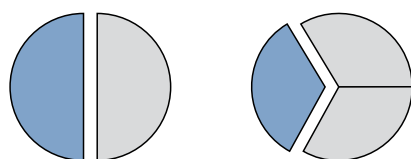
3.3 Begreppsmodeller för tal i bråkform

För tal i bråkform finns flera begreppsmodeller beskrivna i såväl nationell som internationell forskning. En av de mera kända är del-helhetsmodellen, som beskrivs i första avsnittet. Andelsmodellen, som visat sig vara problematisk, analyseras i det andra avsnittet. Modeller, i vilken tallinjen är central, presenteras och diskuteras i avsnitt tre. I det fjärde avsnittet problematiseras användningen av operatormodellen och slutligen presenteras mängdjämförelsemodellen.

3.3.1 Del-helhetsmodellen

Del-helhetsmodellen har beskrivits högfrekvent i forskningslitteraturen (Se till exempel Kilborn, 1995; Tzur & Simon, 2004; Siegler, 2003; Bentley, 2008a). Modellen har olika benämningar som pizzamodellen, chokladkaksmodellen och kvadratmodellen men samtliga handlar om tvådimensionella representationer. Den har därför också kallats diagrammodellen. I figur 3.1 illustreras den variant, som benämns pizzamodellen.

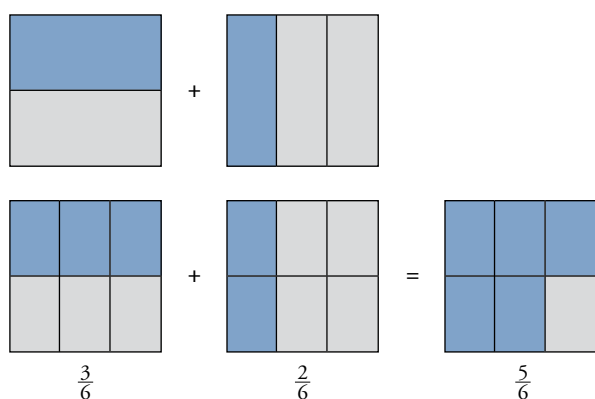
Figur 3.1 Pizzamodellen, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$



I modellen representeras en halv och en tredjedel. De prickmarkerade delarna representerar själva bråken eller med andra ord bråkens *begreppsbilder*. Självklart ritas inte de två cirklarna eller pizzorna olika stora, vilket skulle försvåra för eleverna vid storleksbedömningar. Modellens ekologiska validitet är hög, eftersom elevers erfarenheter av pizzor i allmänhet är omfattande. Vid applicering av denna variant på operationer som addition och subtraktion ger modellen begränsad vägledning. Dock kan modellen illustrera, att bråken kan utgöra olika enheter ex. halvor och tredjedelar, vilka inte utan vidare kan adderas. Detta låter sig inte heller göras med till exempel enheterna decimeter och centimeter. På samma sätt som vi kan ha två decimeter, så kan vi också ha två tredjedelar.

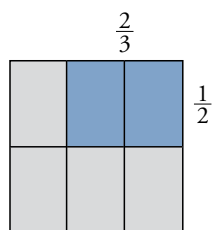
En andra variant av del-helhetsmodellen är kvadratmodellen, som schematiskt illustreras i figur 3.2. Denna variant ger förutom en begrepps bild också en operationell vägledning för eleverna. Så dess operationella validitet är förhållandevis hög. I figuren har också illustrerats additionen av en halv och en tredjedel. Genom att göra indelningarna av kvadraterna vågräta respektive lodräta och sedan lägga indelningarna över varandra så illustrerar modellen övergången till sjättedelar. Sammanräkningen av delarna visar resultatet fem sjättedelar.

Figur 3.2 Kvadratmodellen, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$



Modellens utformning i figur 3.2 gör att den utan modifiering kan visa additioner och subtraktioner av tal i bråkform. För att förklara en multiplikation krävs däremot en viss mindre modifiering av modellen. Denna modifierade variant brukar benämnas areamodellen (Freudenthal, 1983). I figur 3.3 illustreras multiplikationen av en halv och två tredjedelar.

Figur 3.3 Areamodellen, Multiplikation av de två bråken, en halv och två tredjedelar

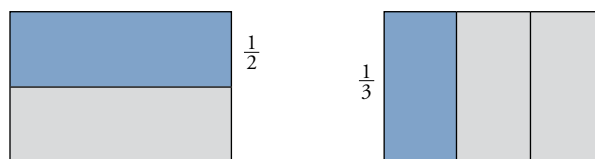


I denna variant representeras inte bråken, som ska multipliceras, av areorna utan av sträckorna, som skapas av indelningarna av kvadratens sidor. Den ena sidan

har delats i två delar och den andra i tre delar. Genom att beräkna arean av de prickade delarna av kvadraten kan multiplikationen visas. Arean är dels lika med $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ och dels $\frac{2}{6}$. Den identifikation, som då är möjlig, visar att $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$. Trots nackdelen med denna variant, att bråken här har två begrepps-bilder dels en sträcka och dels en area, har kvadratmodellen uppenbara förtjänster.

En annan variant av del-helhetsmodellen brukar benämnas chokladkaksmo-dellen. Den visas i figur 3.4.

Figur 3.4 Chokladkaksmodellen, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$



Eftersom en chokladkaka vanligtvis har en rektangulär form, så utgör det en påtaglig nackdel. Elever kan bibringas uppfattningen att de delar som bildas genom breddens respektive längdens indelningar representerar bråken. Utan problematisering kan en tredjedel se större ut än en halv, eftersom referenterna (längderna av längden och bredden) är olika stora. Chokladkaksmodellens strukturella validitet får därför anses som låg, då den matematiska verkligheten kan förvrängas.

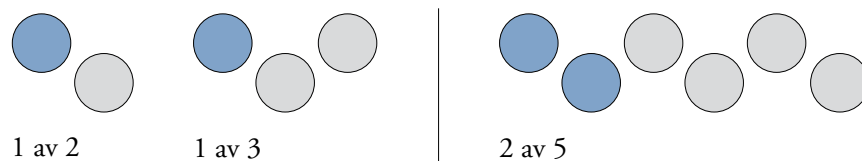
Mot denna bakgrund är det därför viktigt, att kvadrater och inte rektanglar används för att illustrera del-helhetsmodellen.

3.3.2 Andelsmodellen

Andelar har en relativ karaktär, då samma andel faktiskt kan representera olika stora delar. En andel anges genom att ett antal i relation till hela antalet beskrivs, exempelvis en av två eller två av fem. Förutom det diskreta fallet så kan andelar också beskrivas med kontinuerliga storheter exempelvis hälften av 9 liter. Som begreppsmodell har andelsmodellen stora nackdelar, vilket också beskrivits tidigare. I två sammanhang fungerar inte modellen.

För tal i bråkform som är större än ett hamnar modellen utanför sitt applikationsområde. Som tidigare beskrivits saknar exempelvis $\frac{2}{5}$ mening med andelsmodellen. Nio av fem kan man inte föreställa sig, då endast fem existerar och det är omöjligt att ta nio av dem. Speciellt vid storleksordnande kan modellen förorsaka elever problem. En elev resonerade som så, att eftersom det inte går att ta nio av fem, så fattas fyra och då måste talet vara mindre än ett (Bentley, 2008a).

Figur 3.5 Andelsmodellen, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$



Ett än större problem kan uppstå, då elever använder modellen som operationell vägledning vid addition av liknämninga och oliknämninga bråk. Eftersom modellen inte heller fungerar för liknämninga bråk, så blir problemet än större. Om $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ ska beräknas så ger modellen 2 av 5 plus 1 av 5 vilket blir 3 av 10. Detta gör att additionen blir $\frac{3}{10}$ (Siegler, 2003; Silver, 1983; Davis, 1999). Detta är ett klassiskt misstag, vilket alltså kan bero på användningen av denna olämpliga begreppsmodell. I figur 3.5, ovan, illustreras additionen $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ med andelsmodellen. Resultatet blir detsamma som att addera täljarna för sig och nämnarna för sig, $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1+1}{2+5} = \frac{2}{7}$. Detta är ett i forskningen tidigare känt misstag, som är högfrekvent förekommande (Stigler & Hiebert, 1999; Siegler, 2003; Silver, 1983; Davis, 1999). Misstaget beror troligen mest på, att i modellen ingår inte ett av bråkens viktigaste attribut nämligen storleken på delarna. Dessa enheter, halvor och tredjedelar, kan uppfattas som lika stora i figuren. Jämför pizzamodellens delar i figur 3.1.

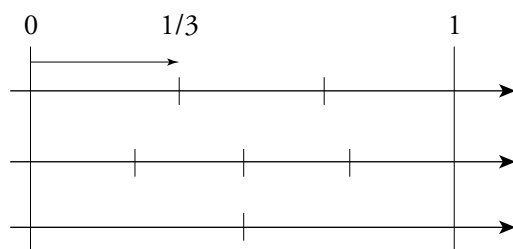
Det kan alltså konstateras, att andelsmodellen har påtagliga nackdelar. Den förvränger det matematiska innehållet och har därmed låg strukturell validitet. Däremot är andelsbegreppet ett viktigt begrepp i textproblem där det kan modelleras med tal i bråkform. Men detta är som tidigare visats en helt annan sak.

3.3.3 Tallinjen

Tallinjen används ibland som modell vid introduktion av tal i bråkform. Talen markeras som punkter och olika indelningar av tallinjer förekommer. Om denna bild av ett tal i bråkform är den första eleverna stöter på, så kommer bråkets begreppsmodell att vara en punkt. En sådan modell ger liten eller problematisk operationell vägledning. Om två bråk ska adderas så motsvaras detta i modellen av att två punkter ska adderas. Detta saknar självfallet begreppslig betydelse och kan givetvis försvåra inlärningen för eleverna. Ska två bråk multipliceras kan problemet också bli stort, då multiplikation av två punkter inte heller har någon begreppslig betydelse (Bentley, 2008a).

Däremot, om ett bråk redan har introducerats med till exempel del-helhetsmodellen, så kan bråket representeras på tallinjen, vilket kan utveckla elevernas erfarenheter. I figur 3.6 visas detta.

Figur 3.6 Tallinjen



De olika indelningarna kan underlätta förståelsen av ekvivalenta bråk, exempelvis att en tredjedel motsvarar två sjättedelar. Ibland kan också talpilar användas. Då uppstår inget begreppsligt problem vid addition och subtraktion. Däremot kan multiplikation vara svårare att åskådliggöra.

3.3.4 Operatormodellen

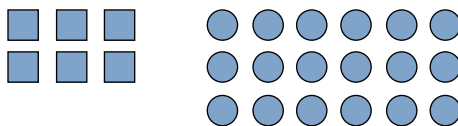
Operatormodellen används främst till att illustrera multiplikation av ett tal i bråkform och ett heltal, till exempel $\frac{3}{5} \cdot 30$. Modellen benämns även multiplicerare-dividerare beroende på att bråkets nämnare delar upp heltalet 30 i fem delar, vilka sedan multipliceras med tre. Vi får först resultatet sex, som efter multiplikation blir 18. Modellen beskrevs troligen först av Hasemann (1980).

Operationellt fungerar modellen, men begreppsligt ger den signalen, att bråket inte är ett tal utan två, vilket innebär, att den strukturella validiteten därför måste ses som förhållandevis låg. Även den ekologiska validiteten kan anses låg, då modellen inte nämnvärt anknyter till elevers tidigare vardagserfarenheter. Modellen kan med sitt smala applikationsområde också bidra till att procedurrella isolerade kunskapsöar skapas.

3.3.5 Mängdjämförelsemodellen

Med mängdjämförelsemodellen kan två mängder av objekt jämföras. I figur 3.7 illustreras en sådan mängd. Avsikten är att trianglarna ska relateras till cirklarna. Detta kan modelleras med bråket sex artondelar.

Figur 3.7 Mängdjämförelsemodellen med bråket sex artondelar



Mängdjämförelsemodellen, som har viss anknytning till andelsmodellen, kan lätt förväxlas med denna.

3.4 Proportionalitet

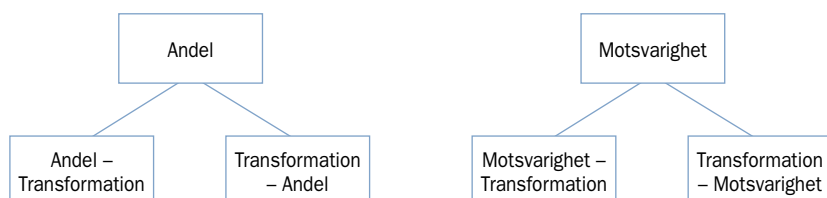
Först behandlas uppfattningar av begreppet och därefter beskrivs en ganska frekvent använd begreppsmodell.

3.4.1 Uppfattningar av proportionalitetsbegreppet

Beskrivningen av proportionalitetsbegreppet och uppfattningar om det bygger på Bentleys studie (2008a). Proportionalitet består antingen av en multiplikativ förändring eller av en multiplikativ jämförelse. Ett proportionalitetsproblem innehåller egentligen två situationer, en i vilken den multiplikativa förändringen presenteras, och en i vilken denna förändring appliceras på nytt. Två huvuduppfattningar av begreppet kan urskiljas. Den ena består av en relation mellan delen och helheten och den andra av en relation mellan två delar. Exempelvis kan den första relationen uttryckas som 2 delar av 8 delar, vilket innebär att de 2 delarna ingår i de 8 delarna, dvs. i helheten. Den andra relationen kan uttryckas som 2 delar till 6 delar. Delarna bildar då tillsammans helheten 8 delar. I den andra relationen kan det emellertid också vara fråga om att relatera två olika storheter till varandra. Relationen mellan del och helhet betecknas som *andel* eller *proportion*, medan relationen mellan delar eller storheter betecknas som *förhållande*.

eller *motsvarighet*. I figur 3.8 visas lärares uppfattningar om begreppet proportionalitet.

Figur 3.8 Kategorier av lärares exponerade begreppsliga förståelse av proportionalitet (Bentley, 2008a)



I det följande beskrivs kategorierna andel och motsvarighet mer ingående. För en fylligare redogörelse se Bentley (2008a).

Beskrivningen bygger på det så kallade ”saftproblemet” känt från internationell forskning. Det lyder: ”Du ska blanda saft. På flaskan står det 2 delar saft till 6 delar vatten. Du har 9 liter vatten i en hink. Hur mycket saft ska Du hälla i?” Andelsuppfattningen manifesteras av att lärarna urskiljer att 2 delar och 6 delar tillsammans bildar en helhet, 8 delar. De olika andelarna av saft och vatten uttrycks som 2 åttandedelar och 6 åttandedelar. Problemet löst med andelar representeras schematiskt i figur 3.9.

Figur 3.9 Begreppslig förståelse av proportionalitet, andel

Första situationen	6	→	8
Andra situationen	9	→	?

Relationen mellan 6 och 8 i den första situationen kan beskrivas med den multiplikativa förändringsfaktorn $\frac{4}{3}$. Denna tillämpas sedan i den andra situationen, vilket ger $\frac{4}{3} \cdot 9 = 12$. Totala mängden blandad saft blir alltså 12 liter och därmed blir mängden koncentrerad saft 3 liter.

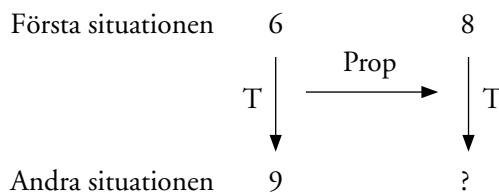
I uppfattningen andel – transformation, som schematiskt representerats i figur 3.10, skapas först helheten 8 delar, vilket också innebär att en andelsrelation råder. Genom att sedan bestämma förändringsfaktorn 1,5 mellan 6 delar och 9 liter och därefter tillämpa en sådan transformation (T) på 8 delar så fås 12 liter, vilket innebär att den koncentrerade saften är 3 liter.

Figur 3.10 Begreppslig förståelse av proportionalitet, andel – transformation

		Prop	
Första situationen	6	→	8
	T	↓	↓ T
Andra situationen	9		?

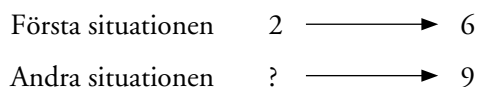
Uppfattningen transformation – andel skiljer sig från föregående genom att i stället för att konstatera att proportionalitet råder så bestäms först den multiplikativa förändringen 1,5 i transformationen (T) av 6 delar till 9 liter. Därefter konstateras att mängden vatten, 6 delar och 9 liter, är andelar av samma helhet. Så 6 delar är samma andel av 8 delar som 9 liter av den efterfrågade mängden utspädd saft. Då kan samma transformation (T) tillämpas på 8 delar. Detta resulterar i 12 liter och då är mängden koncentrerad saft 3 liter.

Figur 3.11 Begreppslig förståelse av proportionalitet, transformation – andel



Uppfattningen ”förhållande eller motsvarighet” kan utgå från en relation mellan två delar av samma helhet. Med utgångspunkt i saftproblemet så är det de 2 delarna saft, som motsvaras av de 6 delarna vatten. Tillsammans bildar de helheten 8 delar. I figur 3.12 nedan visas problemet schematiskt.

Figur 3.12 Begreppslig förståelse av proportionalitet, motsvarighet



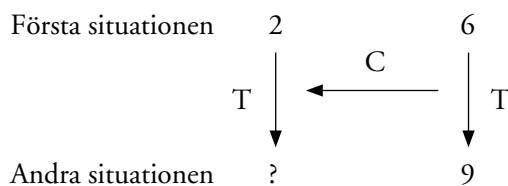
Motsvarigheten är fullt bestämd i den första situationen:

$$2 \cdot k = 6, \text{ vilket innebär att } k = 3.$$

Genom denna beräkning är motsvarigheten känd i sina huvudaspekter. För en viss mängd saft ska man alltså ta tre gånger så mycket vatten. I den andra situationen är mängden vatten känd, 9 liter. Den efterfrågade mängden koncentrerad saft ska därför multipliceras med 3 för att bli 9. Mängden saft blir då 3 liter.

I uppfattningen transformation – motsvarighet, figur 3.13, bestäms först transformationens (T) förändringsfaktor mellan 6 delar och 9 liter till 1,5. Därefter konstateras att motsvarighet råder och därför kan transformationen (T) tillämpas på 2 delar så att 3 liter erhålls. Så först används en transformation därefter en motsvarighet och sist tillämpas den första transformationen igen.

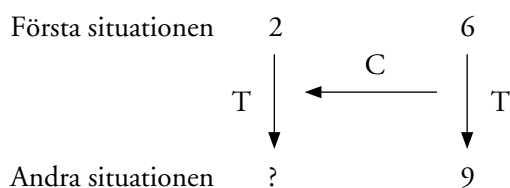
Figur 3.13 Begreppslig förståelse av proportionalitet, transformation – motsvarighet



En annan ordning är karaktäristisk för nästa uppfattning motsvarighet – transformation i figur 3.14. Då startas med konstatera att motsvarighet råder mellan mängden koncentrad saft och mängden vatten. Sedan bestäms transformationen (T) mellan mängderna vatten, 6 delar och 9 liter och tillämpas därefter den på mängden koncentrad saft, 2 delar så att resultatet blir 3 liter.

Det är alltså ordningen i vilken de olika delbegreppen uppträder i problemlösningen som har skapat de två kategorierna under respektive huvudkategori.

Figur 3.14 Begreppslig förståelse av proportionalitet, motsvarighet – transformation



Det visade sig i Bentleys studie (2008a), att två mönster av uppfattningar av proportionalitet kunde urskiljas. Eftersom ett av studiens syften var att utröna, om det fanns lärare, som hade kunskaper nödvändiga för en konceptuell undervisning, studerades detta speciellt. Det ena mönstret representerades av lärarnas egna uppfattningar av proportionalitetsbegreppet, vilka omfattade matematiskt väl utvecklad förståelse samt kunskap om elevers vanliga misstag vid utveckling av förståelse av proportionalitet. Det andra mönstret bestod av lärares egna uppfattningar av begreppet, som matematiskt sett var mer outvecklade samt av den övergripande uppfattningen, att elever i princip förstod begreppet på samma sätt som läraren. I detta mönster ingick alltså inte några kunskaper om elevers outvecklade uppfattningar av proportionalitet. Eftersom studien var fenomenografisk kunde inga slutsatser dras om hur frekventa det ena eller andra mönstret var bland svenska lärare. Dock fanns båda mönstren representerade. Emellertid så finns det anledning att förmoda, att om en lärare under ett flertal år undervisat med en konceptuell inriktning, så kan läraren ha exponerats för elevers outvecklade uppfattningar av begreppet mer frekvent än den kollega, som haft en procedurell inriktning, eftersom utvecklade begreppsutfattningar då knappast kan ha exponerats.

En slutsats som är möjlig att dra är, att om elevers begrepps-förståelse ska kunna utvecklas effektivt, så har den lärare, som känner till vanliga missuppfattningar och kan förebygga dem i undervisningen, en fördel framför den lärare, som saknar denna kunskap.

3.4.2 En vanligt förekommande begreppsmodell

Hart (1981) beskrev en modell, som man försökte introducera i Storbritannien dock med mindre lyckat resultat. Modellen har också flitigt använts i Sverige.

Den skrivs: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Den utläses: ”*a* förhåller sig till *b* som *c* förhåller sig till *d*”. Någon begreppslig förklaring till divisionen i modellen ges vanligtvis inte. I stället tillämpas den oftast procedurellt. Modellen kan appliceras på både ett andelsproblem och på ett motsvarighetsproblem men gör ingen åtskillnad mellan dem. Detta kan innebära svårigheter för eleverna att urskilja vad variablerna *a*, *b*, *c* och *d* egent-

ligen representerar. Formeln ska snarare uppfattas som en beräkningsanvisning. Den ger heller ingen vägledning i huruvida det är nödvändigt att transformera en andelsrelation till en motsvarighetsrelation eller omvänt. Proportionalitetsproblem, som innehåller sådana nödvändiga transformationer, brukar därför vara förenade med låga lösningsfrekvenser.

3.5 Omkrets och area

Först redovisas elevers och lärares uppfattningar om areabegreppet och dess relation till begreppet omkrets.

3.5.1 Uppfattningar av areabegreppet och dess relation till begreppet omkrets

Yngre elever har en tendens att använda linjära mått för att beskriva storleken på en rektangel (Clements & Stephan, 2003). Ibland kan längden på en sida användas. Ett annat linjärt mått, som visade sig i TIMSS 2007, var summan av längden och bredden av en rektangel. Detta användes frekvent av elever i årskurs 4 för att ange en rektangels storlek, ett förhållande som Cuneo (1980) beskrivit tidigare.

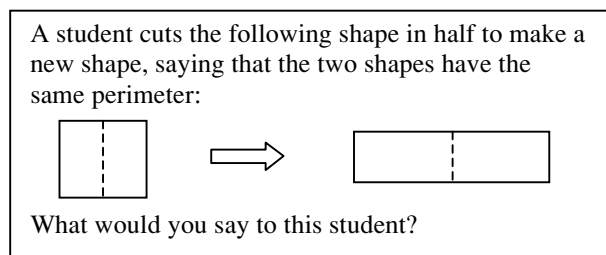
En annan viktig aspekt av areabegreppet är dess konservation. Under vissa förhållanden bevaras areor oförändrade. Om geometriska figurer sätts ihop på olika sätt, så blir den sammansatta figurens area alltid densamma, oberoende av hur figurerna sätts ihop, förutsatt att de inte överlappar. Det är mot denna bakgrund därför möjligt att konstatera, att areabegreppets additiva karaktär är en del av areans konservation. Att dela upp en figur i delar och sedan sammanfoga delarna utan överlappning till en ny figur påverkar inte heller areans storlek, som konserveras. Detta är ett förhållande, som behöver erfaras frekvent av elever för att de ska förstå areabegreppets konservation. Vad gäller längdbegreppet tycks det inte finnas samma behov av erfarenheter. De flesta elever verkar däremot förstå att, om en sträcka av en viss längd delas i flera delar och sätts ihop igen, så blir längden oförändrad. Övergår vi till tre dimensioner och till volymbegreppet, så påpekade redan Piaget, Inhelder och Sheminska (1981), att förståelsen av detta också var beroende av erfarenheter.

Elevers svårigheter att förstå areabegreppet fullt ut tycks bero på att aktiviteter i undervisningen, vilka belyser areabegreppets konservation, saknas. Man manipulerar inte olika areor genom att flytta eller sätta samman dem på nya sätt. Även den prematura användningen av formler för areor av olika figurer orsakar att alltför många barn får svårigheter inom detta område (Kordaki & Potari, 1997; Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981; Hiebert, 1981; Douady & Perrin, 1986; Patronis & Thomaidis, 2008).

Många lärare tror, att det finns ett direkt samband mellan en figurs omkrets och dess area. Om omkretsen ökar, så ökar också arean, menar de (Ball, 1988; Ball & Wilson, 1990; Baturó & Nason, 1996; Heaton, 1992; Ma, 1999). I själva verket sätter ju omkretsen bara en övre gräns för arean, medan arean kan variera från nära noll till det maximala värdet, som i fallet en fyrhörning är en kvadrat eller för andra mer godtyckliga figurer, en cirkel. Ett annat problem förenat med areabegreppet är lärares inkorrekta användning av endimensionella enheter för area (Baturó & Nason, 1996; Heaton, 1992; Simon & Blume, 1994).

Detta sätt att missförstå relationen mellan area och omkrets utmanades i en studie av Chick och Baker (2005). Australiensiska lärares förmåga att förklara begreppen area och omkrets undersöktes. Lärarna ställdes inför fiktiva elevuppfattningar och uppmanades beskriva hur de skulle hantera elevens misstag i en viss uppgift (se figur 3.15 nedan). Areabegreppets relation till omkretsen belystes av uppgiften. En av de nio undersökta lärarna förstod inte själv problemet.

Figur 3.15



De flesta av lärarna gav en sammansatt procedurell och begreppslig förklaring. Några kunde inte ge någon förklaring, medan en lärare enbart gav en procedurell förklaring. Denna studie visade, att samtliga av de undersökta lärarna inte på ett tillfredsställande sätt kunde undervisa om de båda begreppen area och omkrets. Eftersom endast nio lärare undersöktes kan självfallet inga generella slutsatser dras. Däremot bekräftade studien resultat från tidigare studier.

3.6 Variabler, ekvationer, uttryck, funktioner och formler

Först beskrivs några olika missuppfattningar av variabelbegreppet. Därefter presenteras vanliga korrekta uppfattningar av begreppet och sedan deras kontextuella beroende. Flera begreppsmodeller av ekvationer, uttryck, funktioner och formler redovisas därpå.

3.6.1 Uppfattningar av variabelbegreppet

Utgångspunkten för redogörelsen är en forskningsöversikt och resultat från Bentleys studie (2008a). Det existerar åtminstone tre vanliga missuppfattningar av variabelbegreppet icke-symbolisk representation, sifferrepresentation och objektrepresentation.

Den första missuppfattningen av variabelbegreppet är alltså den icke-symboliska representationen. Variabeln uppfattas inte ha någon symbolisk funktion och därmed ignoreras den. I exempelvis ett uttryck, $2a + 3b + 5a$, så blir resultatet av en förenkling 10. Endast koefficienterna tas hänsyn till och adderas. Detta får uppfattas som den minst utvecklade uppfattningen, vilken är mer eller mindre kontextberoende.

Nästa missuppfattning, sifferrepresentation, innebär att variabeln ses representera en siffra och inte ett tal som i exempelvis $2b$. Om b är 4 så uppfattas uttrycket $2b$ som 24 och inte som det korrekta $2 \cdot 4 = 8$. Denna missuppfattning kan undvikas genom att dröja med att introducera skrivsättet $2b$ och i stället behålla multiplikationstecknet längre.

Missuppfattningen objektsrepresentation har sina rötter i motsvarande begreppsmodell, som företrädesvis används vid additiva förenklingar. Modellen fungerar inte vid multiplikativa förenklingar. Variablerna uppfattas representera objekt. I exempelvis uttrycket $2a + 3b + 4a$ står a för apelsiner och b för bananer. Uttrycket innebär då 2 apelsiner plus 3 bananer plus 4 apelsiner, vilket förenklas till 6 apelsiner och 3 bananer. Vid multiplikativa förenklingar fås för $a \cdot a$ apelsin gånger apelsin, vilket inte har någon begreppslig innebörd och än mindre ger någon operationell vägledning för eleverna.

De korrekta uppfattningarna av variabelbegreppet är abstrakt symbolisk representation, storhetsuppfattning, generell taluppfattning samt specifikt okänt tal. Abstrakt symbolisk representation utgör den matematiskt mest utvecklade kategorin. I den representerar variabeln ett element i en mängd och inga ytterligare specifika egenskaper erfordras. Variabeln har en abstrakt symbolisk representation. Inom exempelvis topologin är denna uppfattning vanlig.

I formelkontexter kan variabeln uppfattas som en storhet. I till exempel Newtons andra lag, $F = m \cdot a$, representerar F storheten kraft.

Att variabeln representerar ett generellt tal är kanske den vanligaste uppfattningen. I funktionskontexter är variabeln en generell talbeteckning och i grafer är denna uppfattning nödvändig för att graferna överhuvudtaget ska kunna förstås. Även i uttryckskontexter kan denna uppfattning av variabeln som ett generellt tal förekomma.

I ekvationskontexter kan variabeln representera ett specifikt okänt tal. Oftast handlar det om, att detta okända tal ska beräknas. I ekvationer av högre grad kan variabeln representera flera okända tal. Antalet är kopplat till ekvationens grad.

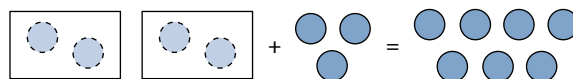
Variabelns betydelse bestäms alltså av den kontext den befinner sig i och uppfattas därefter. Flera missuppfattningar av variabelbegreppet förekommer sålunda, av vilka flera är kontextberoende.

3.6.2 Vanligt förekommande begreppsmodeller

Som förövningar till ekvationer förekommer luckövningar, som exempelvis $_ + 5 = 11$ men även övningar med lucka i höger led $5 + 6 = _ - 2$. Den strukturella validiteten kan anses god, då luckövningarna är analoga med ekvationers strukturer. Från andra sammanhang kan elever ha erfarenheter av att fylla i något som saknas och därför anses den ekologiska validiteten tillfredställande. Enkelheten är tillräcklig och den operationella validiteten hög, eftersom modellen i sig är en övning med inbyggd vägledning.

Vid introduktion av formella ekvationer används ofta ekvationsspelet (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997, ss. 64–65), som består av askar och brickor (se figur 3.16).

Figur 3.16 Ekvationsspelet, $2x + 3 = 7$

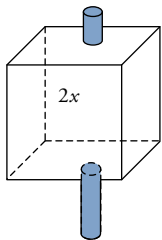


Spelet följer samma regler som i den formella algebran. Avsikten är, att elever ska träna dessa regler genom att spela spelet. Dess procedurella inriktning är därför uppenbar.

För additiva uttryck används inte sällan objektsmodellen, vilken redogjorts för ovan i samband med objektsuppfattningen av variabelbegreppet.

Funktioner kan modelleras på flera olika sätt. Nedan presenteras några av de vanligare. Maskinmodellen, som beskrivs i Storbritanniens läroplan för låg- och mellanstadiet, åskådliggörs i figur 3.17 nedan.

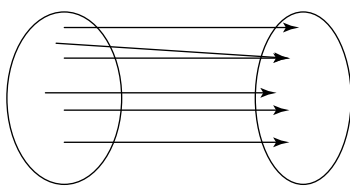
Figur 3.17 Maskinmodellen av funktionen $f(x) = 2x$



Endast ett värde på variabeln åt gången kan passera maskinen, medan en funktion kan beskriva oändligt många värden på variabeln samtidigt, vilket är nödvändigt för att funktionens graf ska kunna förstås. Att endast ett värde på variabeln kan passera maskinen åt gången sänker den strukturella validiteten. Men trots denna begränsning kan modellen bidra till en viss ökad förståelse av funktionsbegreppet (McGowen, DeMarois & Tall, 2000).

Den andra begreppsmodellen för funktioner är avbildningsmodellen, som presenteras i figur 3.18 nedan. Att den endast kan visa ett ändligt antal värden på x är en uppenbar strukturell nackdel. Enligt Tall och Bakar (1992) så har elever svårigheter att förstå modellen. Den ger dessutom liten operationell vägledning.

Figur 3.18 Avbildningsmodell, en funktion



Grafer kan bli omöjliga att förstå om modellen används på ett oreflekterat sätt.

Uttrycksmodellen, som är den tredje begreppsmodellen för funktioner, representerar en viss typ av avbildning men har inte samma nackdelar som avbildningsmodellen. I uttrycksmodellen beskrivs funktioner med hjälp av uttryck som till exempel $f(x) = 3x + 4$. Här kan variabeln x genomlöpa ett oändligt antal värden, vilka genom uttrycket är relaterade till den beroende variabeln y (Tall & Bakar, 1992). Variabeln x representerar därför ett generaliserat tal.

I samband med formler används förkortningsmodellen. Variabler i formler introduceras som förkortningar för ord. Areal av en rektangel beskrivs ofta som

basen gånger höjden. ”Med förkortningar”, säger läraren, ”blir det $A = b \cdot h$ ”. Detta uttrycksätt speglar den historiska utvecklingen, i vilken man först beskrev, hur beräkningar skulle gå till. Detta skedde utan formler och med beskrivande text, vilken i vissa fall kunde bli ganska lång. I ett senare skede introducerades bokstavs-beteckningar som förkortningar för orden, vilka beskrev storheterna men utan variabelegenskaper. Exempelvis begrep man inte att man skulle lösa ut b som beroende variabel i $A = b \cdot h$. Först när den franske matematikern Viète under 1500-talet i ”Logistica speciosa” introducerade variabler i dess nuvarande skepnad, blev denna beräkning med formler möjlig. Om variablerna i formeln uppfattas som förkortningar för ord, så kan elever förstå detta som att man multiplicerar eller dividerar med ord (Bentley 2008a).

Inom algebran används alltså flera begreppsmodeller, vilka har både för- och nackdelar. Elevernas uppfattningar om de algebraiska begreppen är färgade av de begreppsmodeller, som används i undervisningen.

3.7 En eller flera begreppsmodeller för samma begrepp

Som tidigare beskrivits i kapitlet ”Teoretiska förutsättningar”, lärs begrepp in genom att begreppsattributen erfars i relation till tidigare inlärd begrepp. Dessa attribut benämns särskiljande, då de gör, att två likartade begrepp kan skiljas åt. Genom variation av kontexten kan de särskiljande begreppsattributen lättare erfars. Vid upprepat erfande kan ett nytt begrepp läras in.

Det kan emellertid vara problematiskt för en lärande att urskilja huruvida ett attribut tillhör ett begrepp eller om det är en del av den kontext begreppet befinner sig i. Så var gränsen mellan begreppet och kontexten går kan vara svårt att avgöra. Då den lärande exponeras för flera olika kontexter, kan det vara lättare att avgöra vilka attribut, som kommer igen oberoende av sammanhanget. Sådana attribut tillhör då inte kontexten utan är en del av begreppets attribut. På detta sätt kan den lärande erfara ett begrepps egenskaper genom att problem studeras, vilka belyser samma begrepp fast i olika kontexter. Om läraren samtidigt gör eleven uppmärksam på begreppet, så ökar naturligtvis möjligheterna att det lärs in.

Om flera begreppsmodeller för ett och samma begrepp används i undervisningen mer eller mindre samtidigt, kan elever ha svårigheter med att skilja ut vilka attribut, som tillhör respektive begreppsmodell. I detta fall är det inte gränsdragningen mellan begreppet och kontexten, som är svårigheten, utan gränsdragningen mellan de olika begreppsmodellerna, som ska illustrera begreppet. Detta fenomen benämner Bentley (2008a) *interferens*. De olika modellerna kan alltså ha en störande inverkan på varandra och kan därför, om de används samtidigt, skapa en förvirrad bild av begreppet för eleverna. Användningen av olika begreppsmodeller samtidigt för att belysa ett och samma begrepp förekommer dock i undervisningen i svenska skolor (Kilborn, 1979b; Runesson, 1999).

Olika begreppsmodeller leder till olika förenklingar, vilka samtliga avser att öka begreppets tillgänglighet för eleverna. Detta gör emellertid, att den strukturella validiteten kan variera mellan modellerna och att olika modellers egenskaper kan stå i *konflikt* med varandra. Vissa egenskaper hos modellerna kan helt enkelt vara *oförenliga* och för med sig olika begreppsliga egenskaper. Exempel på detta förhållande kan vara några av modellerna för tal i bråkform. Kvadrat-

modellen går dåligt ihop med andelsmodellen. Kvadratmodellen signalerar att bråket ska uppfattas som ett tal och inte två, medan andelsmodellen framhäver att ett bråk består av två tal.

Om olika modeller används för ett och samma begrepp i olika kontexter för att illustrera olika operationella situationer, kan detta göra, att eleverna inte uppfattar, att det rör sig om ett och samma begrepp fast i olika kontexter. Det kan då bli än större risk att kunskapen uppfattas som isolerade öar. Då exempelvis de olika operationerna för tal i bråkform introduceras, förekommer det, att olika begreppsmodeller används. Operatormodellen används för multiplikation av ett bråk och ett heltal och areamodellen för multiplikation av två bråk. Dessa två skilda modeller, vilka inte har många egenskaper gemensamt, kan åstadkomma, att eleverna uppfattar de två multiplikationerna som helt åtskilda utan inbördes samband.

Användningen av flera begreppsmodeller för ett och samma begrepp kan alltså orsaka att de matematiska sammanhangen inte framträder tillräckligt tydligt för eleverna eller till och med förhindrar dem att se sammanhangen.

3.8 Övergeneraliseringar

Stavy och Tirosch (2000) fann att intuitiva regler, det vill säga erfarenhetsbaserade regler från ett innehållsområde, kunde överföras av elever till andra områden eller situationer, där regeln egentligen inte hörde hemma. Detta ledde därför till, att eleverna drog inkorrekta slutsatser. Övergeneraliseringar av sådana intuitiva regler visade sig ha stark prediktiv förmåga och kunde förklara en stor del av elevers misstag. Dessa regler kan i undervisningen ha använts mer medvetet av läraren utan att applikationsområdet har problematiserats. Alternativt kan eleverna själva ha erfarit reglerna i undervisningen.

Exempel på en övergeneraliserad regel är påståendet ”att talen sätts med rak högerkant vid addition och subtraktion”. En sådan procedurell regel fungerar endast för heltal men inte för exempelvis decimaltal med olika antal decimaler. Det korrekta är att sätta respektive talsort över varandra i kolumner.

En annan regel som övergeneraliserats är ”störst först” som används vid subtraktion av naturliga tal. Detta betyder, att det är det minsta talet, som ska subtraheras från det största. Denna regel övergeneraliseras till att ordningen av talen i en subtraktion inte betyder något, utan att det minsta talet alltid ska subtraheras från det största. Detta ställer till stora problem, då elever ska börja lära sig hur växling vid subtraktion av tvåsiffriga tal går till. Om det i algoritmen faktiskt står $2 - 7$ så ska inte två subtraheras från sju, utan sju ska subtraheras från två vilket går, bara man växlar ett tiotal till tio ental. Då fås $12 - 7$, som är 5. Som det visat sig i TIMSS 2007, kastar många elever om subtraktioner i enlighet med den övergeneraliserade regeln i stället för att utföra växlingen (Bentley, 2007c).

Ytterligare ett exempel på en övergeneraliserad regel rör multiplikation av två tal i bråkform. Då multipliceras både täljare och nämnare med varandra. Regeln skulle i detta fall vara att man opererar på både täljare och nämnare. Detta kan övergeneraliseras att gälla även för addition och subtraktion, så att både täljare och nämnare adderas respektive subtraheras. En sådan övergeneralisering tillämpad på exempelvis $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ger $\frac{2}{4}$, vilket efter förkortning blir $\frac{1}{2}$. Denna tillämpning leder alltså till ett orimligt resultat, eftersom två hälften som läggs ihop, blir

en hel. Sådana orimligheter problematiseras inte för eleverna i undervisningen i Sverige på samma medvetna sätt som i Hong Kong och Taiwan (Stigler & Hiebert, 1999). Motsvarande övergeneralisering manifesterades i misstag, som var frekventa i TIMSS 2007 (Bentley, 2008c).

Alltså, flera elevmisstag kan förklaras med en övergeneralisering av regler erfarna på ett innehållsligt område men applicerade på ett annat område eller i en annan situation.

3.9 Sammanfattning

Den matematiska kunskapens beskaffenhet kan karaktäriseras som antingen procedurell eller konceptuell. Förenklat innebär detta, att den procedurella kunskapen omfattar procedurer och den konceptuella begrepp. Relationen mellan de båda kunskapslagen implicerar, att konceptuell kunskap kan generera procedurell medan det omvända händer mer sparsamt och under speciella förhållanden. Kunskaper om begrepp kan utgöra ett slags facit vid modifiering av procedurer till obekanta kontexter.

Undervisningen kan givetvis vara inriktad på lärande av dessa två kunskaps typer. I en procedurellt inriktad undervisning har procedurer och tillämpning av dem en central plats, medan i en konceptuellt inriktad undervisning så ligger fokus på inläring av begrepp men även på tillämpning av vidhängande procedurer i obekanta kontexter. I de ostasiatiska länderna har undervisningen en konceptuell inriktning, medan inriktningen i västländerna är huvudsakligen procedurell. De läroböcker som rapporterats om i forskningen följer också detta mönster.

Transfer, som innebär, att kunskaper, som lärs i ett sammanhang, kan överföras till ett obekant sammanhang, tränas målmedvetet i de ostasiatiska länderna till skillnad från i västländerna. Där tillämpas procedurer i de sammanhang de lärts, vilket gör att transfer i undervisningen inte förekommer i någon särskild omfattning. Kärnfulla matematiska principer kan också bidra till att transfer sker.

Misstag ses inte som önskvärda och uppfattas som mer eller mindre störande moment i undervisningen i väst, medan de ostasiatiska elevernas misstag uppfattas annorlunda. De ses som ett steg i en inlärningsprocess och som ett tecken på att inläring och bearbetning av ett begrepp pågår.

Lösningssmönster på grupper av uppgifter kan vara en indikation på undervisningens inriktning. Har samtliga uppgifter i en grupp, som behandlar samma begrepp, lösts, så är det sannolikt, att undervisningen haft en konceptuell inriktning, något som stimulerat transfer. Visar mönstret, att huvudsakligen enstaka spridda uppgifter har lösts, så beror detta sannolikt på en procedurellt inriktad undervisning. Så utifrån lösningssmönstren på grupper av uppgifter är det därför möjligt att dra slutsatser om undervisningens karaktäristiska inriktning.

Begreppsmodeller med olika kvalitéer används som förenklingar av komplicerade matematiska begrepp. Fyra olika kriterier utnyttjas för att bedöma kvalitén. Den strukturella validiteten avser, hur väl modellen återger den matematiska strukturen eller om den förvrängs. Om elevernas erfarenheter tas till vara i begreppsmodellen, så kan det bidra till att deras förståelse av begreppet underlättas. Denna kvalitetsaspekt fångas av den ekologiska validiteten. Enkelhet är också en princip för kvalitetsbedömning. Modellen måste vara så pass enkel,

att det den ska illustrera inte döljs av modellens komplexitet. Det sista kriteriet benämns operationell validitet, som innebär, att modellen också ska vara operationellt vägledande för eleverna vid lösandet av matematiska problem.

Kvalitetsanalysen av de fem begreppsmodellerna för tal i bråkform, del-helhetsmodellen, andelsmodellen, tallinjen, operatormodellen samt mängdjämförelsemodellen visade, att del-helhetsmodellen hade minst nackdelar. Mest problematiska visade sig andelsmodellen och mängdjämförelsemodellen vara.

Begreppet proportionalitet kan uppfattas på huvudsakligen två skilda sätt, som andel och som förhållande. Bland lärare kunde två grupper av uppfattningar av begreppet urskiljas. En grupp kände till både andelsuppfattningen och förhållandeuppfattningen samt även elevers utvecklade uppfattningar. Den andra gruppen kände vanligtvis till förhållandeuppfattningen samt trodde, att elever uppfattade begreppet på samma sätt som de själva.

Den begreppsmodell av proportionalitet, som frekvent används i undervisningen, gör ingen åtskillnad mellan andel och förhållande.

Geometriska begrepp behandlas oftast mer konceptuellt i undervisningen än andra begrepp. Speciellt gäller detta, olika geometriska figurer. Trots detta förväxlas begreppen omkrets och area. Arean uppfattas ofta som endimensionell, vilket kan manifesteras i att längd och bredd adderas. Denna missuppfattning kan ha underlättats av att lärare använder endimensionella enheter för area, som exempelvis 1cm.

Tre vanliga uppfattningar av variabelbegreppet förekommer, icke-symbolisk representation, sifferrepresentation och objektsrepresentation. Ur normativ synpunkt är korrekta uppfattningar i en topologisk kontext abstrakt symbolisk representation, i en formelkontext en storhetsrepresentation, i en funktionskontext en generell talrepresentation och i en ekvationskontext ett specifikt okänt tal.

Begreppsmodeller för de olika algebraiska begreppen uttryck, ekvation, funktion och formel förekommer. För uttryck används ofta objektsmodellen, i vilken variabeln uppfattas som ett objekt, exempelvis banan. Luckövningar utgör en förträning för ekvationer medan ekvationsspelet kan tjäna som en introduktion. Funktionsmaskinen, avbildningsmodellen och uttrycksmodellen har alla olika kvalitéer, där uttrycksmodellen visat sig mest användbar. Att beskriva variabler i formler som förkortningar visade sig ur historisk synvinkel vara olyckligt, då fullt utvecklad förståelse av variabelbegreppet kan påverkas negativt.

Flera begreppsmodeller för ett och samma begrepp måste tillämpas med stor försiktighet för att inte interferens eller konflikt mellan begreppsattributen ska uppstå. Det har också visat sig, att elevmisstag kan förklaras som en övergeneralisering av regler, erfarna på ett innehållsligt område men applicerade på ett annat. En sådan olycklig transfer kan undvikas i de ostasiatiska länderna, där elevmisstag och transfer behandlas systematiskt i undervisningen.

Del 2

**Undersökningens
genomförande
och resultat**

Del 2 • Undersökningens genomförande och resultat

Del 2 inleds med kapitel 4, som avhandlar studiens problemformulering och syfte. I kapitel 5 beskrivs metodens tillämpning. I de tre på varandra följande kapitlen redogörs för studiens resultat.

I kapitel 4 redovisas syftet med den fördjupade analysen av elevernas kunskaper och jämförelsen med elevernas kunskaper i Hong Kong och Taiwan, samt möjligheten att se vilka konsekvenser en begreppsligt inriktad undervisning där, till skillnad från en procedurinriktad undervisning i Sverige, kan få.

I det femte kapitlet beskrivs först grunderna för hur analysen av uppgifter gått till. Därefter tas bland annat lösningsmönster och hur den matematiska kunskapens beskaffenhet speglas i dessa upp. Sist redovisas de olika urvalens storlekar, TIMSS 2007 och 2003 i Sverige årskurs 8, TIMSS 2007 årskurs 4 i Sverige, TIMSS 2007 i Hong Kong och Taiwan samt det nationella ämnesprovet i årskurs 9.

Kapitel 6 innehåller en redovisning av resultatet inom området taluppfattning och aritmetik. Fokus ligger främst på tal i bråkform och proportionalitet då de flesta uppgifterna avser detta innehåll. Svenska elever gör frekvent det klassiska misstaget att addera både täljare och nämnare då två bråk ska adderas, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Så fort inte proportionalitetsformeln $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ direkt kan tillämpas så sjunker lösningsfrekvensen dramatiskt för svenska elever. Den begreppsligt inriktade undervisningen i Hong Kong och Taiwan ger eleverna uppenbara fördelar att döma av lösningsmönstren och det jämförande resultatet. Det finns emellertid uppgifter på vilka en procedur direkt kunde tillämpas, då lyckades svenska elever bättre än eleverna i Hong Kong och Taiwan.

Kapitel 7 rör geometri-kunskaper med fokus på areabegreppet. Areabegreppets additiva egenskaper samt dess konservation var områden vilka var problematiska för svenska elever. Dock kan konstateras att skillnaden i lösningsmönster mellan svenska elever och elever i Hong-Kong och Taiwan inom området geometri inte var så påtaglig.

I kapitel 8 redovisas elevernas algebraiska kunskaper. En påtaglig del av resultatet rör förståelsen av variabelbegreppet. De svenska eleverna uppvisade frekvent ett antal olika sätt att missförstå begreppet till skillnad från eleverna i Hong Kong och Taiwan. Om variabeln $b = -1$, så visste inte de flesta svenska eleverna att $-b = +1$, vilket eleverna i de två ostasiatiska länderna i betydligt större omfattning hade kunskap om. Analysen av lösningsmönstren visar att nästan inga svenska elever hade löst samtliga av de begreppsligt sammanhängande uppgifterna medan upp mot hälften av eleverna i Hong Kong och Taiwan hade gjort det.

Läsanvisning

Lärare och lärarutbildare rekommenderas att läsa kapitlen 4 och 5 kursivt medan stor möda bör läggas på resultatkapitlen 6, 7 och 8, där elevers frekventa misstag redovisas. Det är oftast möjligt med relativt enkla medel motverka att dessa misstag uppstår.

4 Problemformulering och syfte

Den tidigare djupanalysen av TIMSS 2007 visade att elevers kunskaper i matematik inte ha den beskaffenhet, som man tidigare trott. Den innehåller inte primärt slumpmässiga räknepel eller brist på traditionella förkunskaper, pusselbitar, som saknas i en hierarkisk kunskapsstruktur, utan bilden är full av kunskaper, vilka behöver förädlas och utvecklas. En hierarkisk struktur innebär att olika kunskapsområden är relaterade till varandra via begrepp och principer. Vägen till denna kunskap behöver i sig inte vara hierarkisk, utan tillägnet kan ske med successivt djupare insikt där användningen av beräkningsstrategier och begreppsförståelse kan förfinas över tid (Bentley, 2008c; Niss, 2000).

En sådan matematisk kunskap är inte enbart hierarkiskt strukturerad, utan består av nät av interrelaterade kunskapsdelar där begrepp, principer och meta-kognitiva procedurer utgör de sammanbindande länkarna. Kunskapen har en mer förståelseinriktad karaktär och den konceptuella och procedurella inriktningen av undervisningen har olika roller. I en procedurell inriktning fokuseras mycket på beräkningar utan begreppslig förankring. Den procedurella inriktningen belyser därför inte i någon högre grad, hur olika moment i matematiken förståelsemässigt bygger på varandra eller är sammanlänkade med begrepp. En konceptuell undervisning däremot inriktas mer på förståelse av begrepp och generella matematiska principer, så att olika moment på detta sätt sammanlänkas.

I denna studie är avsikten att ytterligare belysa de svenska elevernas kunskapsuppbyggnad utifrån en procedurell och en konceptuell struktur. Därför görs en jämförelse med elevers resultat i Hong Kong och Taiwan. Dessa länder ligger bland de högst presterande i TIMSS 2007. Flera internationella studier har visat att undervisningen där huvudsakligen har en konceptuell inriktning (Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 2000). På vad sätt skiljer sig då svenska elevers resultat på de frisläppta TIMSS-uppgifterna och sekvenser av dessa uppgifter från elevernas i dessa två länder? Finns det några typiska lösningsmönster som kan förklara eller belysa skillnaderna i resultaten?

Mot ovanstående bakgrund är avsikten att analysera områdena taluppfattning och aritmetik, geometri och algebra i TIMSS 2007. Svenska elevers kunskaper i årskurs 8 jämförs med motsvarande åldersgrupp i Hong Kong och Taiwan. För att vidga urvalet av elever i Sverige har även resultaten från TIMSS 2003 ingått i analysen. Dessutom sker jämförelser med svenska elevers resultat i årskurs 4 i TIMSS 2007 samt med de insamlade resultaten från nationella ämnesprovet i årskurs 9 i Sverige.

4.1 Syfte

I denna studie är alltså avsikten att ytterligare belysa svenska elevers kunskapsuppbyggnad. På vad sätt skiljer sig resultaten på uppgifter och sekvenser av uppgifter mellan svenska elever och elever från Hong Kong och Taiwan? Finns det några typiska lösningsmönster, som kan förklara eller belysa skillnaderna i resultaten?

Syftet är

- att ingående beskriva svenska elevers matematikkunskaper med inriktning på procedurer och begrepp
- att studera hur kunskapens beskaffenhet skiljer sig mellan elever i Sverige och i Hong Kong och Taiwan
- att utifrån kunskapens beskaffenhet samt tidigare forskning dra slutsatser om undervisningens inriktning

5 Metod

I första avsnittet beskrivs hur analysen av uppgifterna har genomförts. Därefter ges en redovisning av de vetenskapliga metoderna som använts i denna studie. Slutligen presenteras det antal elever som ingått i de olika urvalen.

5.1 Analys av TIMSS-uppgifter

I TIMSS 2007 finns ett antal frisläppta uppgifter, vilka också ingått i TIMSS 2003. Dessa uppgifter utgör ungefär 40 procent av alla TIMSS 2007-uppgifterna. Detta är samma uppgifter, som eleverna i Hong Kong och Taiwan har svarat på. Samtliga uppgifter för både de svenska och de ostasiatiska eleverna har översatts från engelska och anpassats kulturellt, för att eleverna inte ska utsättas för några oplanerade extra svårigheter. Resultaten i de olika länderna blir på detta sätt jämförbara.

De tre olika uppgiftstyperna är klassificerade efter hur lösningarna ska redovisas. Den första typen består av multiple-choice uppgifter. I den andra ska eleverna endast redovisa ett svar, medan i den tredje typen av uppgifter ska även lösningarna redovisas. Speciellt enkelt är det att analysera multiple-choice uppgifterna, då detta kan göras med dataprogram. Distraktorerna representerar oftast inte slumpmässiga fel vilka som helst utan har sina rötter i missuppfattningar av begrepp eller inkorrekta tillämpningar av procedurer. Missuppfattningarna och de inkorrekta tillämpningarna är oftast kända från tidigare forskning och kan därför utan svårighet identifieras. Hänsyn har tagits till gissningar och därför har deras påverkan på frekvensfördelningen studerats med Chi^2 -test.

Bedömning av uppgifter, som endast kräver svar, har skett efter TIMSS-projektets internationella bedömningsmall. Alla elevsvar har inte kunnat förutses och finns därför inte med i mallen. Elevlösningar av ett stort antal uppgifter har därför analyserats på nytt för att avgöra karaktären på misstagen, vilka kan ha sina rötter i en missuppfattning av ett begrepp eller i en tillämpning av en procedur i en inkorrekt kontext.

Den tredje typen av uppgifter har erbjudit en rikare beskrivning av elevernas lösningsstrategier. Också ett antal elevlösningar av dessa uppgifter har analyserats på nytt. I dessa dokumenterade elevlösningar har det då varit möjligt att med hög precision se olika tillämpningar av beräkningsprocedurer och det har även varit möjligt att se hur olika uppfattningar av begrepp kommit till uttryck.

Även insamlade elevlösningar till det nationella ämnesprovet har på motsvarande sätt djupanalyserats och jämförts med motsvarande uppgifter inom TIMSS-projektet.

Precisionen i dokumentationen av elevlösningar varierar givetvis och därmed kan också tolkningen vara mer eller mindre precis. Även om en lösning är väl dokumenterad, kan det ibland vara svårt att kausalt binda den till en speciell begreppsuppfattning eller till en speciell tillämpning av en procedur. Om begreppsuppfattningen eller proceduren tidigare är känd, kan detta avsevärt underlätta en sådan kausal analys. Samma svar och lösningar kan sannolikt inte hela grupper av elever prestera slumpmässigt och därför har slutsatser alltid baserats på större grupper av elever. Inte desto mindre är det viktigt att konstatera,

att denna studie grundar sig på antagandet, att elevers lösningar speglar deras uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer.

5.2 Kvalitativ innehållsanalys och statistiska metoder

Den kvalitativa innehållsanalysen i denna studie har sina rötter i den internationella forskningen om skolmatematiken. Tidigare djupanalys inom området har visat att forskning, kan ligga till grund för slutsatser utifrån analyser av enskilda uppgifter. De flesta av slutsatserna utgår ifrån kända förhållanden, vilka tidigare redovisats i den internationella forskningen. Detta rör framför allt undervisningsförhållandena i de två ostasiatiska länderna Hong Kong och Taiwan, vars elever deltar i denna komparativa studie. En viktig utgångspunkt vid analysen har varit de två kunskapslagen, procedurell och konceptuell kunskap. Som redovisats i kapitlet "Teoretiska förutsättningar" så har en kombination av kvalitativa och statistiska analyser använts. Efter det att typiska misstag identifierats, så sker en statistisk analys där frekvenser och relativa frekvenser av lösningskategorier bestäms. Relativa frekvenser har använts för att jämföra elevprestationerna och misstagen i de tre länderna.

Analys av hela lösningsmönster på grupper av uppgifter som rör ett och samma begrepp har gjorts. En sådan grupp av uppgifter måste ha gjorts av samma elever och därför komma från samma block eller häfte. Denna analys visar frekvensen och den relativa frekvensen för varje enskilt lösningsmönster, såsom alla uppgifter lösta, alla utom en lösta eller enstaka uppgifter lösta. Har elever frekvent löst alla uppgifter eller alla utom en, är det sannolik att de besitter konceptuell kunskap och att deras undervisning haft den inriktningen. Har de däremot löst enstaka spridda uppgifter, är det sannolikt, att de har procedurell kunskap, som inte transfererats till olika kontexter och att de har haft en procedurell undervisning.

För att bestämma beskaffenheten hos elevers kunskaper i matematik kan inte annat än denna form av kvalitativ analys användas. Den utvidgade fenomenografiska teoriramen erbjuder en sådan ram inom det postpositivistiska paradigmet, vilket i sin tur tillåter en kombination av kvalitativa och kvantitativa analyser, vilka är nödvändiga för denna typ av djupanalys. Utan en sådan kombination skulle troligen inte lösningsmönstren kunnat studeras utan oproportionerligt stora forskningsinsatser.

5.3 Antal elever i de olika urvalen

Beroende på den rotationsdesign som används i TIMSS, så kan antalet elever som gör uppgifterna i ett av de 14 blocken variera. Antalet svenska elever i TIMSS 2007 årskurs 8 rör sig normalt mellan 500 och drygt 700. Vilket specifikt antal det är fråga om framgår av respektive tabell. I årskurs 4 är det runt 350 elever i urvalet. I några korstabuleringar som rör årskurs 8 är antalet elever drygt 200. Detta beror på att uppgifter från två block, men i samma häfte, korstabulerats. I djupanalyserna av uppgifterna, som krävde elevsvar eller beräkningar, förekommer ibland urval under 500, vilket beror på att endast lösningar från hälften av eleverna i urvalet har hunnit analyserats, mestadels beroende på tidspress.

När det gäller TIMSS 2003 årskurs 8, så varierar urvalen mellan 650 och drygt 1 000 elever. Beträffande de djupanalyser av insamlade elevlösningar avseende det nationella ämnesprovet för årskurs 9 så rör sig elevantalet i allmänhet runt 370.

Rörande samplen av elevlösningar i Hong Kong, så har TIMSS internationella databas utnyttjats och där varierar samplen för de olika blocken mellan 420 och 500 elever. Vad gäller Taiwan så är det fler elever i samplen där. Även i detta fall har TIMSS internationella databas utnyttjats. Antalet elever i samplen varierar från 530 till 1219.

Då skolor varit grunden för samplingen och två klasser med lärare per skola valts ut slumpmässigt och då en eventuellt två elever per klass haft samma testuppgifter, blir eleverna i princip slumpmässigt valda.

6 Aritmetik och taluppfattning

Inom området taluppfattning och aritmetik analyseras först resultatet på uppgifter som rör grundläggande taluppfattning och därefter på uppgifter som berör olika slags talområden. Proportionalitetsbegreppet har testats på ett omfattande sätt i TIMSS 2007 och i TIMSS 2003 och flera delbegrepp är berörda. Resultatet redovisas i motsvarande avsnitt. Därefter kommer avsnittet, som handlar om funktionella samband och näst sist ges en beskrivning av kunskapens struktur rörande proportionalitetsbegreppet. I samtliga avsnitt görs jämförelser med lösningsfrekvenserna, som elever i Hong Kong och Taiwan hade i TIMSS 2007. För svenska elever redovisas resultatet för både TIMSS 2007 och 2003. Detta gör elevgrupperna ungefär dubbelt så stora. TIMSS-resultaten för vissa uppgifter jämförs med motsvarande uppgifter på det nationella ämnesprovet för årskurs 9. Några uppgifter i TIMSS 2007 har dessutom analyserats ytterligare för att på så sätt tränga djupare in i elevernas lösningsstrategier. Kapitlet avslutas med en sammanfattning, vilken kombineras med slutsatser.

6.1 Grundläggande taluppfattning

Den första uppgiften (M04_01) för årskurs 8 i TIMSS 2007 handlar om relationen mellan språklig kod och sifferkod.

M04_01

Vilket av talen nedan är tio miljoner tjugotusen trettio?

- (A) 102 030
- (B) 10 020 030
- (C) 10 200 030
- (D) 102 000 030

M042001

Det mest frekventa alternativet 10 020 030 var det korrekta (76,9 %) och den mest frekventa distraktorn (14,1 %) var 10 200 030, vilken har drag av sammanlänkad struktur över sig, eftersom nollan mellan tiomiljoner och tjugotusen är utelämnad. Eleverna i Hong Kong och Taiwan löste uppgiften ungefär lika frekvent (74,1 %; 84,1 %) som de svenska eleverna. Det är en uppenbar svårighet att gå från språklig kod till sifferkod. Denna svårighet varierar också beroende på det aktuella språkets sätt att uttrycka räkneorden (Johansson, 2005; Bentley, 2008c).

En delvis något enklare uppgift (M04_01) användes i årskurs 4.

Även här behandlades övergången mellan språklig kod och sifferkod. Alternativet 432 valdes av en ungefär lika stor andel (79,5 %), men reversering av talet till 324 var den mest frekventa distraktorn (14,7 %).

Vilket tal motsvarar 3 ental + 2 tiotal + 4 hundratal?

- (A) 432
- (B) 423
- (C) 324
- (D) 234

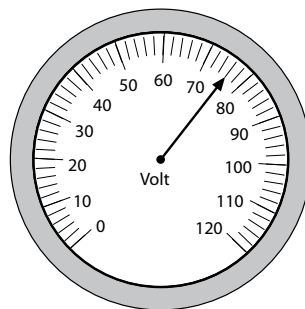
M041052

Reversering brukar i och för sig vara ett fenomen som tenderar att försvinna med stigande ålder (Johansson, 2005; Bentley, 2008c). Eftersom uppgiften ovan för årskurs 8 inte tillåter exponering av reversering, då inget sådant alternativ fanns, så kunde det misstaget inte exponeras. Därför är det inte konstigt, att sammanlänkad struktur är den mest frekventa distraktorn i årskurs 8. Eftersom det är olika talområden, är slutsatser beträffande tendenser svåra att dra.

Den andra uppgiften (M03_01) för årskurs 8 handlar om en skala, som ska avläsas. Graderingen mellan tiotalen är sådan, att varje ental inte är markerat utan endast varje jämmt tal.

Hur många volt visar mätaren?

- (A) 73
- (B) 74
- (C) 76
- (D) 78



M022097

Ungefär fyra femtedelar (80,3 %) av eleverna i årskurs 8, TIMSS 2007 löste uppgiften korrekt och valde alternativet 76. Ungefär samma andel (79,2 %) gällde för TIMSS 2003. Eleverna i Taiwan låg på ungefär samma lösningsfrekvens (82,9 %) och eleverna i Hong Kong på något högre (88,6 %).

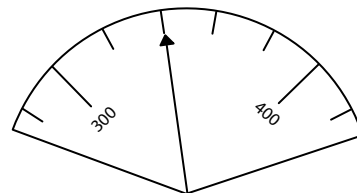
För de svenska eleverna var den mest frekventa distraktorn 73 (15,4 %), vilket innebär, att eleverna troligen hade misstagit sig på graderingen och trott, att varje ental var utsatt på skalan. Visaren pekar ju på det tredje skalstrecket. Den-

na, den mest frekventa distraktorn i TIMSS 2003, hade valts i ungefär samma omfattning (16,7 %).

Samma typ av misstag var ännu mer frekvent (30,0 %) i årskurs 4. På denna skala var inte annat än multipler av tjuugo markerade, vilket illustreras i figuren nedan (M07_07). Visaren pekade på det andra skalstrecket efter 300. Eleverna verkar ha trott, att det var 320, som den pekade på och att det var tiotal, som var markerade. Det kan konstateras, att misstaget dock reflekterar en viss logisk konsekvens i tänkandet och att eleverna inte tycks sakna kunskaper. Snarare behöver deras kunskaper utvecklas.

Det korrekta alternativet 340 fastnade knappt tre femtedelar av eleverna för (57,1 %). Eftersom de jämförda elevgrupperna är av storleksordningen 500 elever, måste relativt stora förändringar ha inträffat i urvalen för att förändringarna ska kunna extrapoleras till populationerna. Då skillnaden i lösningsfrekvens är drygt 20 procent kan ändå konstateras, att en viss positiv utveckling måste ha skett.

M07_07



Vilket tal pekar visaren på i skalan?

- (A) 302
- (B) 310
- (C) 320
- (D) 340

M031276

I uppgiften nedan (M02_01) ska väljas ut vilken grupp av tal som är ordnade från det största till det minsta. Knappt tre fjärdedelar av eleverna (71,6 %) i årskurs 8 i TIMSS 2007 löste uppgiften och valde alternativ d).

M02_01

I vilken grupp är talen ordnade från det STÖRSTA till det MINSTA?

- (A) 10 011; 10 110; 11 001; 11 100
- (B) 10 110; 10 011; 11 100; 11 001
- (C) 11 001; 11 100; 10 110; 10 011
- (D) 11 100; 11 001; 10 110; 10 011

M042003

I Hong Kong och Taiwan var det en större andel elever (82,7 %; 85,3 %), som löste uppgiften korrekt. För svenska elever var den mest frekventa distraktorn a) (10,9 %), vilken i stället representerade ett storleksordnande från den minsta till den största. De övriga distraktorerna hade lägre frekvenser.

I årskurs 4 skulle också talen ordnas från det största till det minsta (M02_01). Alternativ d) representerar denna ordning och valdes av drygt tre fjärdedelar av eleverna (77,4 %).

M02_01

I vilket alternativ är talen ordnade från det STÖRSTA till det MINSTA?

- (A) 36, 43, 66, 87
- (B) 66, 43, 36, 87
- (C) 87, 66, 36, 43
- (D) 87, 66, 43, 36

M041014

Även i detta fall var den mest frekventa distraktorn a) (12,3 %) ett storleksordnande från minsta till största.

Trots att det är olika talområden, så är samma principiella misstag ungefär lika frekvent. Någon direkt förbättring i detta avseende tycks alltså inte ha skett mellan åren.

I följande tre uppgifter testas multiplikativt tänkande. Primfaktorer är ett centralt begrepp inom detta område. Det vilar på begreppet primtal, som är ett tal, som inte kan skrivas som en produkt av andra tal än talet ett och talet självt. Därför är ett primtal bara delbart med ett och sig självt. En produkt består ju av faktorer, men för att de ska vara primfaktorer, så ska faktorerna vara primtal. Följande uppgift (M04_02) i årskurs 8 testar huvudsakligen elevens förmåga att identifiera primtalsfaktorer.

M04_02

Vilket alternativ visar 1 080 som produkten av primfaktorer?

- (A) $1\ 080 = 8 \cdot 27 \cdot 5$
- (B) $1\ 080 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5$
- (C) $1\ 080 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
- (D) $1\ 080 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 6 \cdot 5$

M042022

Det korrekta alternativet c) lyckades endast en knapp fjärdedel av de svenska eleverna (23,1 %) pricka in. I Hong Kong och Taiwan uppvisade eleverna en väsentligen högre lösningsfrekvens (74,8 %; 71,0 %), vilket måste bero på en

kännedom om begreppet primtal. Eftersom uppgiften kan lösas relativt enkelt om man vet vad primtalsfaktorer är, så beror troligen svenska elevers låga lösningsfrekvens på begränsade erfarenheter av primtalsbegreppet. Den mest frekventa distraktorn var a) (31,5 %).

Förmåga att tänka multiplikativt anses ofta vara en förutsättning för framgångsrikt proportionalitetstänkande. Därför borde de elever som löst uppgiften också ha löst flera av de kommande uppgifterna om proportionalitet.

Denna förhållandevis enkla uppgift (M07_01) är en multiplikation i en kontext, vilken eleverna i årskurs 8 antagligen är ovana vid. Ungefär hälften av eleverna (50,5 %) löste 2007 uppgiften korrekt, medan en något större andel (56,3 %) 2003. Eleverna i Hong Kong och Taiwan exponerade förhållandevis högre lösningsfrekvenser (70,4 %; 79,8 %). Tabell 6.1 visar de svenska elevernas olika Lösningstrategier 2007 utan viktade frekvenser.

M07_01

Antalet barn på en resa var större än 55, men mindre än 65.
Barnen kunde delas i grupper om 7, men inte i grupper om 8.
Hur många barn var det på resan?

Svar: _____

M032381

Stötestenen tycks vara att tolka ”att kunna delas i grupper om 7, men inte i grupper om 8”. Det mest frekventa misstaget 56 (20,5 %) innebär, att barnen faktiskt kan delas in i grupper om 7 men också i grupper om 8, eftersom $\frac{56}{8} = 7$.

Tabell 6.1 Kategorier som representerar elevernas olika Lösningstrategier, årskurs 8, n = 542

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt antal barn, 63 delbart med 7 men inte med 8	259	47,8	63
Inkorrekt antal, 56 delbart både med 7 och 8	111	20,5	56
Inkorrekt antal, 60 inte delbart med vare sig 7 eller 8	27	5,0	60
Inkorrekt antal, 64 inte delbart med 7 men med 8	6	1,1	64
Andra typer av inkorrekta beräkningar	72	13,3	-
Ingen beräkning utförd	67	12,3	-
Totalt	542	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Problemsituationen representerar en lika-grupper-situation, som modelleras med en innehållsdivision. Detta torde också kasta ljus över skillnaderna i lösningsfrekvenserna mellan de svenska eleverna och eleverna i Hong Kong och Taiwan (Fischbein et al., 1985; Greer, 1992). I en mer begreppsligt inriktad

undervisning har troligen innehållsdivision en mer central plats. Observera dock att de svenska eleverna inte exponerades avsaknad av kunskaper, utan att deras kunskaper snarare behöver utvecklas.

I årskurs 4 ser uppgiften (M03_01) i princip likadan ut. Multiplikationen innebär en förhållandevis enkel beräkning $8 \cdot 10 = 80$. Då får alla barnen 10 godisbitar var och eftersom det finns 74 så saknas det alltså 6 godisbitar. Men även 14 godisbitar är ett korrekt svar, som innebär, att barnen får 11 godisbitar var. Ytterligare multipler av 8, ex. 96, ger korrekta svar. Även denna problemsituation representerar en multiplikativ lika-grupper-situation och en subtraktiv jämförelse situation, en kontext, som visade sig ovan för de svenska eleverna. Knappt två femtedelar av eleverna (38,8 %) löste uppgiften korrekt.

En grupp om 8 barn äter sammanlagt 74 godisbitar. Hur många fler godisbitar behövs för att barnen ska få lika många var?

Svar: _____

M031235

M03_01

I årskurs 8 för TIMSS 2007 och 2003 löste alltså en betydligt större andel elever uppgiften än i årskurs 4.

Inom de naturvetenskapliga ämnena används en så kallad vetenskaplig form, ett skrivsätt vars innebörd testas i uppgiften (M02_02) nedan för årskurs 8 i TIMSS 2007. Drygt två tredjedelar av de svenska eleverna (67,6 %) löste uppgiften korrekt. Som tidigare konstaterats så har eleverna i Hong Kong och Taiwan ofta bättre kännedom om korrekt matematisk terminologi, vilket gör, att lösningsfrekvenserna blir högre i uppgifter, som huvudsakligen bygger på sådan kunskap. Så blev också resultatet i denna uppgift (92,2 %; 89,1 %).

Vad blir $3,4 \cdot 10^2$?

- (A) 3,4
- (B) 34
- (C) 340
- (D) 3400

M042079

M02_02

Den mest högfrekventa distraktorn var 3,4 vilken valdes av drygt en femtedel av de svenska eleverna (21,5 %).

6.2 Negativa och positiva heltal

Operationer med heltal såväl negativa som positiva testades i de två följande uppgifterna i årskurs 8. I den första uppgiften (M02_03) skulle eleverna välja mellan addition och subtraktion, så att resultatet av operationerna skulle bli så stort som möjligt.

M02_03

Sätt antingen + eller - i rutorna för att det här uttrycket ska bli så stort som möjligt.

$$-5 \square -6 \square 3 \square -9$$

M042018

Principen för att lösa uppgiften är att få så många positiva tillskott som möjligt genom att placera minustecken så, att så många subtraktioner av negativa heltal som möjligt erhålls. Subtraktion av negativa heltal utgör ju positiva tillskott. Sådana subtraktioner kan erhållas genom att placera minustecken i rutorna framför -6 och -9 . Plustecken placeras i rutorna framför det övriga talet, 3 . Då erhålls summan 13 . I tabell 6.2 nedan framgår vilka misstag, som gjordes, samt deras frekvenser. Åtta olika kombinationer av tecken är möjliga, eftersom två olika tecken kan placeras i var och en av de tre rutorna. Enligt multiplikationsprincipen blir då antalet kombinationer 2^3 , vilket är 8 .

Tabell 6.2 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, årskurs 8, $n = 255$

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
$-5 -- 6 + 3 -- 9$, korrekt	95	37,3	- + -
$-5 -- 6 - 3 -- 9$	7	2,7	---
$-5 -- 6 - 3 + 9$	4	1,6	-- +
$-5 -- 6 + 3 + 9$	20	7,8	- + +
$-5 + - 6 - 3 + 9$	38	14,9	+ - +
$-5 + - 6 - 3 -- 9$	3	1,2	+ - -
$-5 + - 6 + 3 -- 9$	21	8,2	+ + -
$-5 + - 6 + 3 + 9$	34	13,3	+ + +
Andra typer av inkorrekta beräkningar	10	3,9	
Ingen beräkning utförd	23	9,0	
Totalt	255	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Endast en dryg tredjedel av de svenska eleverna (37,3 %) löste uppgiften korrekt. Det mest iögonfallande misstaget var placeringen av tecknen $+ - +$ och $+ + +$. I båda alternativen adderas samtliga negativa tillskott. Detta visar, att eleverna

(28,2 %) inte förstått innebörden av subtraktion av ett negativt tal. Förhållandevis många elever (9,0 %) besvarade inte uppgiften. Detta skulle kunna bero på, att undervisningen av negativa hela tal får begränsad uppmärksamhet i svenska skolor. Men av TIMSS lärarenkät framgår, att en majoritet av de svenska lärarna (99 %) uppger, att representation, storleksordnade och beräkningar med negativa hela tal behandlas i undervisningen.

I Hong Kong och Taiwan var lösningsfrekvensen avsevärt högre (77,0 %; 81,9 %). Är den begreppsliga innebörden av subtraktion av ett negativt tal klar så är ju uppgiften enkel att lösa.

I den andra uppgiften (M03_13) testades division av heltal med både negativa och positiva tal inblandade.

Vilket tal dividerat med -6 ger resultatet 12?

- (A) -72
- (B) -2
- (C) 2
- (D) 72

M03_13

M032525

Bara en dryg fjärdedel av de svenska eleverna (26,3 %) lyckades lösa uppgiften korrekt i TIMSS 2007 och valde -72 , medan en ännu mindre andel (21,7 %) lyckades 2003. Eleverna i Hong Kong och Taiwan hade betydligt högre lösningsfrekvenser (83,0 %; 85,7 %).

Ingen av distraktorerna var direkt lågfrekvent, utan samtliga låg runt en femtedel (20 %) vid båda tillfällena, då de svenska eleverna testades. Man skulle därför kunna misstänka, att många elever gissat, men enligt ett Chi2-test, så är troligen detta inte fallet med de ca 700 svenska eleverna, som vid båda tillfällena försökte lösa uppgiften.

Sammantaget så visar båda uppgifterna, som testar beräkningar med negativa heltal, att en alltför stor andel svenska elever inte behärskar detta.

6.3 Tal i bråkform

Olika kunskaper om tal i bråkform testades. I årskurs 8 testades först storleksordnande och i årskurs 4 ekvivalenta bråk. Därefter kom addition av oliknämninga bråk i årskurs 8 och av liknämninga bråk i årskurs 4. På liknande sätt testades subtraktion av bråk.

Storleksordnande av tal i bråkform (M03_03) testades alltså i årskurs 8. Lösningsfrekvenserna, som de svenska eleverna uppvisade, var en av de högsta (89,2 %) i TIMSS 2007 och även (84,4 %) i TIMSS 2003. Häpnadsväckande nog så var lösningsfrekvenserna i Hong Kong och Taiwan (86,7 %; 84,8 %), d.v.s. något lägre än i Sverige i TIMSS 2007.

Eftersom täljarna i tre av svarsalternativen var desamma och en halv får förutsättas vara bekant för de flesta elever, så räcker det med att veta, att talet med störst nämnare är det minsta, det vill säga $\frac{5}{12}$. Under sådana förutsättningar kan en procedurell regel tillämpas, nämligen att det minsta talet har störst nämnare. Dessutom är täljarna i svarsalternativen b) och c) större än hälften av nämnarna, $5 > 4$ och $5 > 3$. Eftersom $\frac{4}{8}$ respektive $\frac{3}{6}$ båda är lika med $\frac{1}{2}$, så är $\frac{5}{8}$ och $\frac{5}{6}$ båda större än en halv. Det enda bråk vars täljare är mindre än hälften av nämnaren är alternativ d), det vill säga $\frac{5}{12}$.

M03_03

Vilket av följande tal är MINST?

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{5}{8}$
- (C) $\frac{5}{6}$
- (D) $\frac{5}{12}$

Ett annat känt misstag vid användning av begreppsmodeller är, att referenterna till bråken inte alltid konstanthålls (Se forskningsgenomgången avsnitt 3.3). Detta gör, att elever kan få intrycket, att en halv kan vara mindre än en tredjedel. Om referenten för en tredjedel är väsentligt större än referenten för en halv, så kan en tredjedel framstå som större. Detta missförstånd är också kopplat till andelsbegreppets relativa karaktär. Om samma andel appliceras på två olika stora referenter, så blir delarna olika stora (Bentley, 2008a). I årskurs 8 uppger nästan alla lärare (96 %), att de undervisar om beräkningar med tal i bråkform.

I årskurs 4 däremot var lösningsfrekvensen (10,3 %) på en liknande uppgift (M04_03) markant mindre. Det gällde att avgöra vilket bråk, som var lika med $\frac{2}{3}$. Istället för det korrekta alternativet $\frac{4}{6}$, så valde de flesta elever (64,4 %) alternativet $\frac{3}{2}$, som är det inverterade talet till $\frac{2}{3}$.

M04_03

Vilket av bråken är lika med $\frac{2}{3}$?

- (A) $\frac{3}{4}$
- (B) $\frac{4}{9}$
- (C) $\frac{4}{6}$
- (D) $\frac{3}{2}$

M041069

Den enda rimliga slutsatsen är, att eleverna i årskurs 4 inte fått någon undervisning om bråk, men att eleverna i årskurs 8 har fått det. Detta är också ett resultat av lärarenkäten, där en mindre andel av lärarna (13 %) uppgav, att de undervisat om beräkningar med tal i bråkform fram till och med årskurs 4. Om del-helhetsmodellen tillämpats i årskurs 4, hade det varit möjligt att konstatera, att tredjedelar är en enhet, som är dubbelt så stor som enheten sjättedelar. För att då få två tredjedelar, måste vi ta dubbelt så många sjättedelar, nämligen fyra sjättedelar.

I nästa uppgift (M01_09) i årskurs 8 testades addition av tre tal i bråkform med olika nämnare. Det vanligaste kända misstaget, att talen i täljarna och nämnarna adderas var för sig, uppvisades högfrekvent (54,4 %; 55,0 %) av svenska elever både i TIMSS 2007 och 2003. Detta motsvarar alternativ a). Misstaget kan härledas bland annat till användningen av andelsmodellen i undervisningen (Siegler, 2003; Silver, 1986; Davis, 1997; Bentley, 2008a). Om modellen felaktigt appliceras på uppgiften, får vi problemet med fem av fyra samt nio av åtta. Fem av fyra går inte, eftersom det bara finns fyra, på samma sätt med nio av åtta. Misstaget kan även komma från en övergeneralisering av multiplikation av bråk, i vilken både nämnare och täljare opereras på (Se avsnitt 3.8).

Endast en dryg femtedel av de svenska eleverna (21,0 %; 22,2 %) löste uppgiften korrekt både 2007 och 2003 genom att välja alternativ d). I Hong Kong och Taiwan uppvisade däremot eleverna lösningsfrekvenser, som var betydligt högre (84,7 %; 88,6 %). Som nämnts tidigare, så skulle troligen lösningsfrekvensen för svenska elever ha förbättrats betydligt, om del-helhetsmodellen introducerats i undervisningen. Detta kända misstag används som ett naturligt inslag i undervisningen i de ostasiatiska länderna, där eleverna får erfara konsekvenserna av sådana misstag och får träning i att undvika dem.

Dock får konstateras att uppgiften kan anses som extra svår, eftersom två av bråken är större än ett.

M01_09

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} =$$

(A) $\frac{16}{17}$

(B) $\frac{41}{40}$

(C) $\frac{81}{40}$

(D) $\frac{111}{40}$

M022066

Inte heller i subtraktion av tal i bråkform uppvisade svenska elever något tillfredställande resultat i årskurs 8. Den följande uppgiften (M07_02) handlar om subtraktion av två tal i bråkform med olika nämnare.

M07_02

Vilket av följande alternativ är en korrekt metod för att bestämma $\frac{1}{5} - \frac{1}{3}$?

Ⓐ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1-1}{5-3}$

Ⓑ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{5-3}$

Ⓒ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{5-3}{5 \cdot 3}$

Ⓓ $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{5 \cdot 3}$

Endast en liten andel svenska elever (7,6 %) valde det korrekta alternativet d) i TIMSS 2007. Även i TIMSS 2003 var lösningsfrekvensen låg (9,3 %). Både alternativ a) och b) representerar det kända misstaget, vilket innebär, att eleverna opererar med både täljarna och nämnarna (Davis, 1997; Silver, 1986; Siegler, 2003). Dryga tredjedelen av eleverna (37,7 %; 36,7 %) valde 2007 dessa alternativ och i princip samma 2003 (35,8 %; 39,3 %). Alternativ c), som representerar en omkastad subtraktion men i övrigt en korrekt beräkning, var mer lågfrekvent båda åren (12,7 %; 11,4 %). En mindre andel elever (5,3 %; 4,2 %) försökte inte lösa uppgiften.

I Hong Kong och Taiwan löste en betydligt större andel elever (68,2 %; 80,0 %) uppgiften.

Värt att betänka emellertid är, att metoden, som beskrivs i uppgiften, kanske inte används så högfrekvent i Sverige, där ett vanligt steg är att först göra bråken liknämninga.

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3}{15} - \frac{5}{15} = -\frac{2}{15}$$

Detta kan göra, att flera elever inte känt igen beräkningsproceduren. Eleverna skulle kanske i större utsträckning ha kunnat klara beräkningen däremot inte att identifiera vilken av dessa metoder, som var den korrekta.

I årskurs 4 finns en liknande uppgift (M07_01) men med liknämninga bråk.

Det första alternativet $\frac{3}{5}$, som var det korrekta, valdes av en dryg tredjedel av de svenska eleverna (37,1 %). Distraktorerna var relativt frekvent valda, vilket kan tyda på att gissningar skulle kunna vara högfrekventa i denna uppgift. Emellertid attraherade alternativ d), 3 störst andel elever (23,7 %). Det representerar det kända misstaget att operera med både täljare och nämnare (Davis, 1997; Silver, 1986; Siegler, 2003).

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-1}{\text{ingenting}} = 3$$

Svarsalternativet $\frac{3}{10}$ är en variant av alternativ d) 3, där nämnarna adderats istället för subtraherats (18,4 %). Även $\frac{3}{25}$ är en variant, i vilken nämnarna istället multiplicerats (18,4 %). Detta alternativ har en begreppslik förankring i en motsvarande subtraktion av oliknämniga bråk som i föregående uppgift. En förhållandevis stor andel elever försökte inte lösa uppgiften (20,8 %).

Vid jämförelse med årskurs 8 är det viktigt att komma ihåg, att en subtraktion av oliknämniga bråk är betydligt mer komplicerad än av liknämniga bråk. Därför är det naturligt att lösningsfrekvensen är lägre i årskurs 8.

6.4 Tal i decimalform

Addition och multiplikation av tal i decimalform testades. I den första uppgiften (M01_02) för årskurs 8 representerar problemsituationen en additiv förändring. Det är värt att lägga märke till, att de givna talen har olika antal decimaler. Detta för att testa huruvida eleverna vet, att decimaltecknet avgör platsvärdet och inte den raka högerkanten, som de kan ha lärt sig vid addition av naturliga tal. Tillämpning av rak högerkant för decimaltal är en övergeneralisering, som då och då förekommer i undervisningen.

En trädgårdsmästare blandar 4,45 kg rajgräsfrö med 2,735 kg klöverfrö för att så en gräsmatta. Hur många kilogram fröblandning har han därefter?

Svar: _____

M022046

M01_02

Ungefär två tredjedelar av de svenska eleverna (67,2 %) löste uppgiften korrekt och fick 7,185 kg i TIMSS 2007, medan drygt hälften av eleverna (55,1 %) löste den i TIMSS 2003. I Hong Kong och Taiwan lösningsfrekvensen högre (84,8 %; 90,9 %).

Ett annat typiskt svar var 3,18, vilket kunde erhållas, om talen adderades med rak högerkant. En större andel av de svenska eleverna (12,5 %; 8,4 %) försökte inte lösa uppgiften.

I den andra uppgiften (M03_07) för årskurs 8 så skulle två decimaltal, som var mindre än ett, multipliceras.

Beräkna: $0,402 \cdot 0,53 =$

Svar: _____

M03_07

Nästan exakt två tredjedelar av de svenska eleverna (66,7 %) lyckades lösa uppgiften korrekt, 0,21306 i TIMSS 2007. En obetydligt högre lösningsfrekvens (71,4 %) hade uppgiften i Taiwan, medan den var betydligt högre (84,1 %) i Hong Kong.

Förutom att placera decimaltecknet inkorrekt, vilket var det vanligaste misstaget (6,6 %), som svenska elever gjorde, så förekom också avrundning av svaret till två eller tre decimaler. Även smärre räknefel förekom. Inte så stor andel (5,7 %) som i förra uppgiften avstod från att försöka lösa uppgiften.

Nedanstående uppgift, vilken ingick i det nationella ämnesprovet för årskurs 9, behandlade division med tal i decimalform. Uppgiften förekom i två versioner.

ÄP 9 2008 Del B1

$$3. \quad \frac{45}{0,1} = 45 \cdot \underline{\quad} \quad \frac{35}{0,1} = 35 \cdot \underline{\quad}$$

De två versionerna av uppgiften får anses ha en likvärdig svårighetsgrad. I tabell 6.3 nedan visas elevernas olika lösningsstrategier. Uppgiften testar vad en division med ett tal mindre än ett ger för resultat. Begreppsligt sett är det viktigt, att eleven inser, att produkten blir större och inte mindre. En majoritet av eleverna (57,7 %) löste uppgiften korrekt och hade insett att 10 skulle sättas i rutan. Då kunskapsområdet ingår i uppnåendemålen för årskurs 9, kan det inte anses tillfredställande, att ett så stort antal elever inte kunde lösa uppgiften. Det mest frekventa misstaget (15,7 %) innebar, att produkten blev mindre och att 0,10 sattes i rutan. Några elever exponerade den dynamiska förståelsen av likhetstecknet och skrev resultatet av beräkningen i rutan på höger sida. Detta misstag återfinns i kategorin ”andra typer av inkorrekt beräkningar”.

Tabell 6.3 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, Nationella ämnesprovet, årskurs 9, n = 370

Kategorier	Frekvens	Relativ frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt, förstoring med faktorn 10	214	57,8	10
Inkorrekt, förminskning med faktor mindre än 1	58	15,7	0,10
Inkorrekt, faktor lika med 1	29	7,8	1
Inkorrekt, förstoring med faktor större än 10	4	1,1	100
Andra typer av inkorrekt beräkningar, inklusive mindre räknefel, inklusive dynamisk uppfattning av likhetstecknet	25	6,8	-
Ingen beräkning utförd	40	10,8	-
Totalt	370	100,0	

Några elever (1,1 %) menade, att resultat skulle vara ännu större än 10 gånger. Avgörande för resultatet tycks vara elevernas förståelse för produktens storlek. En förhållandevis stor andel elever (10,8 %) avstod från att försöka lösa uppgiften.

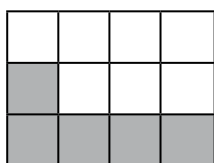
6.5 Begreppet proportionalitet

Delbegreppen andel, procent och förhållande testades i relativt många uppgifter i årskurs 8. I årskurs 4 var det inte alls lika många sådana uppgifter och inga uppgifter angående procent förekom, vilket har med kursplanemålen i de olika länderna att göra. Några av uppgifterna i årskurs 4 måste bedömas som svårare än motsvarande uppgifter i årskurs 8. Vissa jämförelser är trots detta möjliga att göra mellan årskurserna. Den begreppsligt inriktade undervisningen i Hong Kong och Taiwan kan ge eleverna vissa fördelar speciellt när det gäller begrepp som proportionalitet. En fortsatt jämförelse kommer därför att göras om detta begrepp.

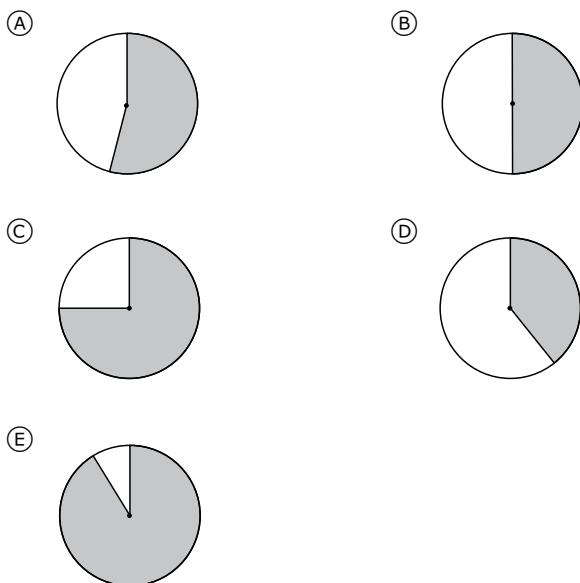
6.5.1 Andel

Den första uppgiften (M01_01) inom detta område för årskurs 8 handlar om andelsbegreppet. I rektangeln är fem tolfedelar skuggade och de fem alternativa cirkeldiagrammen är skuggade på olika sätt. Eleverna behövde veta, att fem tolfedelar är något mindre än en halv. Bara ett av alternativen d) var skuggat till något mindre än hälften. Detta korrekta alternativ valdes också högst frekvent (77,1 %) i TIMSS 2007 och till och med något mer frekvent (80,1 %) i TIMSS 2003. I Hong Kong och Taiwan var de relativa frekvenserna ungefär desamma (82,1 %; 81,3 %).

M01_01



Vilken cirkel har ungefär lika stor del av sin area skuggad som rektangeln ovan?



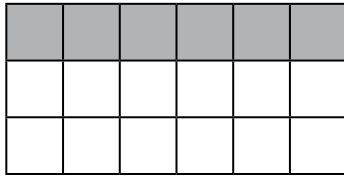
Det näst frekventa alternativet a), som svenska elever valde, var skuggat till lite mer än hälften (12,5 %; 10,7 %). Ett möjligt misstag var att förväxla de skuggade och icke skuggade områdena av cirkeln.

Det är viktigt att notera, att i uppgiften görs det faktiskt åtskillnad mellan de båda begreppen andel och motsvarighet, eftersom det talas om "lika stor del av sin area", vilket refererar till, att delen relateras till helheten. En sådan situation modelleras med andelsbegreppet och motsvarande tal i bråkform. Om en elev emellertid felaktigt modellerar situationen med en motsvarighet, det vill säga en del motsvarar den andra delen, så kan uppgiften lösas ändå. Rektangelns skuggade del motsvarar då den icke skuggade delen. Detta representeras av bråket $\frac{5}{7}$. På samma sätt kan man betrakta cirkeln i alternativ d), vars skuggade sektor motsvarar den icke skuggade sektorn. Detta förhållande kan representeras av samma bråk. Så det är alltså möjligt, att uppfatta uppgiften på ett icke avsett sätt och ändå komma fram till en korrekt lösning. Att en sådan begreppslig distinktion inte behöver göras kan förklara likheten i lösningsfrekvenserna mellan länderna.

I årskurs 4 däremot är det inte möjligt att lösa motsvarande uppgift (M02_04) på icke avsett sätt. Alternativet $\frac{6}{12}$ representerar ett misstag (30,0 %), då uppgiften löses med en motsvarighetsrelation. Då modelleras problemet med en motsvarighet, de 6 delarna motsvarar de 12 delarna. Mängdjämförelsemodellen kan också ha förvillat eleverna.

M02_04

Hur stor del av rektangeln är skuggad?



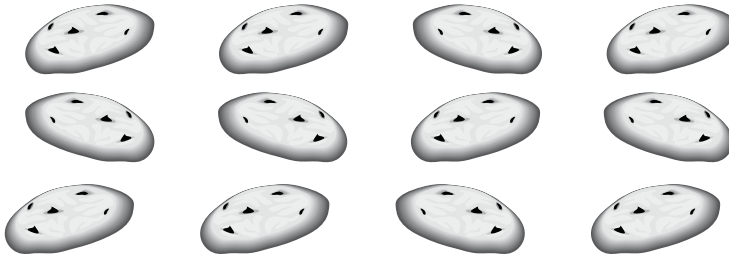
A $\frac{1}{4}$
 B $\frac{1}{3}$
 C $\frac{6}{12}$
 D $\frac{2}{3}$

M041006

Det korrekta alternativet $\frac{1}{3}$ kunde ses som om den översta raden uppfattades som en del av de tre raderna. Knappt två tredjedelar av eleverna (61,2 %) löste uppgiften korrekt. Alternativen a) och d) var lågfrekventa.

Den skenbara förbättring, som kan synas vid en jämförelse mellan årskurserna, kan snarare ses som en konsekvens av, att det var möjligt att lösa uppgiften i årskurs 8 med en icke avsedd modellering.

Följande uppgift (M04_02) i årskurs 4, som också testar andelsbegreppet, innebär, att en matematisk modell ska tolkas mot en verklig situation.



Det finns 12 kakor. Ringa in $\frac{1}{3}$ av kakorna.

M041056

Det korrekta svaret utifrån en tolkning med andelsbegreppet angav knappt hälften av eleverna (46,5 %) medan knappt en tredjedel (29,3 %) felaktigt tolkade situationen som en motsvarighet, tre kakor per nio kakor.

Ett annat sätt att testa andelsbegreppet handlade om köp av biljetter i uppgift (M03_09) för årskurs 8. En liten andel av de svenska eleverna (16,9 %) löste uppgiften korrekt i TIMSS 2007 och en ungefär lika stor andel (16,0 %) löste den i TIMSS 2003. Båda grupperna fick svaret $\frac{2}{15}$. Eleverna i Hong Kong och Taiwan löste uppgiften i avsevärt större utsträckning (57,4 %; 70,0 %). Eftersom en begreppslig distinktion är avgörande för uppgiftens lösning, är det möjligt, att en sådan inriktning av undervisningen har förbättrat dessa elevers möjligheter till att lösa uppgiften korrekt.

Biljetterna till en konsert kostar antingen 10 zed, 15 zed eller 30 zed.

Av de 900 sålda biljetterna kostade $\frac{1}{5}$ av biljetterna 30 zed styck och $\frac{2}{3}$ kostade 15 zed styck.

Hur stor ANDEL av biljetterna såldes för 10 zed styck?

Svar: _____

M032307

Flera angivna tal i uppgiften ska inte opereras på, utan de bidrar endast till den nödvändiga kringinformation för att uppgiften ska kunna lösas. Först måste andelen biljetter, vilka kostade 30 zed styck alternativt 15 zed styck, beräknas tillsammans. Detta blir $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{15} + \frac{10}{15} = \frac{13}{15}$. För att få den andel som efterfrågas ska $\frac{13}{15}$ subtraheras från helheten $1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$. Då erhålls den andel biljetter, som kostar 10 zed.

I tabell 6.4 framgår de olika kategorierna av lösningsstrategier, som de svenska eleverna tillämpade. En mindre grupp elever (2,3 %) gjorde beräkningen via antalet biljetter och inte direkt via andelarna som ovan. En icke försumbar grupp (7,9 %) enkodade uppgiften korrekt men klarade inte ut beräkningarna. Ett frekvent misstag var att inte utföra addition av tal i bråkform korrekt, ibland blev $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$. Ett mer vanligt misstag (29,7 %) var att inte svara med andelar överhuvudtaget utan istället med antalet biljetter, exempelvis 120. Detta tyder på, att eleverna inte visste vad andelar betyder begreppsligt sett.

Tabell 6.4 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, TIMSS 2007, årskurs 8, n = 263

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt, via andelar	47	17,9	2/15, 13,3...%
Korrekt via antal	6	2,3	2/15
Korrekt enkodat med andelar men inkorrekt beräkning	13	4,9	-
Korrekt enkodat med antal men inkorrekt beräkning	8	3,0	-
Inkorrekt, andelar	67	25,5	1/5
Inkorrekt, antal	78	29,7	120 biljetter
Ingen beräkning utförd	44	16,7	
Totalt	263	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Även misstagen, som döljer sig bakom ”inkorrekt, andelar” (25,5 %), hade med beräkningsproblem att göra. Vanligtvis visste eleverna inte, hur man adderar två tal i bråkform med olika nämnare. En relativt stor andel elever (16,7 %) försökte inte lösa uppgiften.

I årskurs 4 förekom en liknande uppgift (M04_04) men med den skillnaden, att bråken, som representerade andelarna, var liknämninga. Trots detta svarade endast en knapp femtedel av eleverna (18,8 %) korrekt, $\frac{8}{10}$, på uppgiften.

M04_04

Jonas använde $\frac{3}{10}$ av sina pengar på en penna och $\frac{5}{10}$ av dem på en bok.

Hur stor andel av pengarna använde han?

Svar: _____

M041076

Resultatet av djupanalysen visas i tabell 6.5 nedan. Av den framgår att svårigheten mestadels inte handlar om addition av tal i bråkform utan om enkodningen av problemsituationen. Eleverna tycks sakna erfarenhet av andelsbegreppet

liksom av att modellera benämnda problem med tal i bråkform. Bara några procent av eleverna utförde inkorrekta beräkningar med tal i bråkform.

Tabell 6.5 Kategorier som representerar elevernas olika Lösingsstrategier, M04_04 TIMSS 2007, årskurs 4, n = 453

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt andel använda pengar	73	16,1	8/10
Korrekt utan andelsmarkering	72	15,9	8 kr
Inkorrekt utan andelsmarkering	28	6,2	80 kr
Andel pengar kvar	3	0,6	2/10
Andel pengar kvar utan andelsmarkering	6	1,3	2, kr
Korrekt enkodning men fel beräkning	7	1,5	8/20
Additiv ansats 3+5+10+10	11	2,4	28 kr
Avskrift av andelar	3	0,6	3 kr
Avskrift av andelar	17	3,8	5 kr
Övriga	105	23,2	-
Ej gjord	128	28,3	-
Totalt	453	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Svårigheten för eleverna bestod alltså inte primärt i att utföra en addition av tal i bråkform utan snarare i att modellera problemsituationen korrekt.

6.5.2 Procentbegreppet

Procentbegreppet är i princip att betrakta som ett andelsbegrepp. Skrivsättet att ange andelen i hundradelar är specifikt för procent, eftersom det betyder hundradelar. Tre uppgifter användes för att testa procentbegreppet. I den första uppgiften (M01_06) för årskurs 8 var procentsatsen given.

Ett år rapporterade ett företag att de sålt 1426 ton gödningsmedel. Året därpå sålde företaget 15 procent mindre gödningsmedel. Vilket av följande värden anger närmast det antal ton gödningsmedel som såldes det andra året?

- (A) 200
- (B) 300
- (C) 1200
- (D) 1600
- (E) 1700

M01_06

I TIMSS 2007 löste nästan tre fjärdedelar av de svenska eleverna (72,8 %) uppgiften korrekt och valde alternativ c) medan i TIMSS 2003 en något större andel (79,8 %) löste den. Dessa båda lösningsfrekvenser är bättre än den lösningsfrekvens, som eleverna i Taiwan (64,8 %) presterade 2007. I Hong Kong däremot var lösningsfrekvensen (73,4 %) ungefär lika stor som i Sverige 2007 men mindre än i Sverige 2003. I uppgiften slår begreppsliga kunskaper inte igenom, eftersom en procedurell modell direkt kan appliceras nämligen procentsatsen i decimalform multiplicerad med mängden gödningsmedel. Därefter subtraheras den erhållna minskningen från första årets försäljning.

Distraktorerna a) och b) ligger båda nära minskningen och långt ifrån antalet sålda ton gödningsmedel. De två andra distraktorerna d) och e) kan representera misstaget att addera minskningen istället för att subtrahera den. Samtliga distraktorer kan sägas vara lågfrekvent valda.

Nästa uppgift (M02_05) för årskurs 8 representerar principiellt samma situation som i föregående uppgift. Procentsatsen eller rabattsatsen är också i detta fall given.

M02_05

En rock kostar i vanliga fall 60 zed. Allan köpte rocken när priset hade sänkts med 30%. Hur mycket sparade Allan?

- (A) 18 zed
- (B) 24 zed
- (C) 30 zed
- (D) 42 zed

M042039

I denna uppgift efterfrågas rabatten, det vill säga hur mycket priset sänkts. Alternativ a) var det korrekta, 18 zed, vilket valdes av en majoritet av de svenska eleverna (64,7 %). Eleverna i Hong Kong (64,3 %) och Taiwan (60,0 %) löste uppgiften i samma utsträckning som de svenska eleverna. Detta tillsammans med resultatet på föregående uppgift visar, att då en procedurell modell, som de svenska eleverna undervisats om, kan tillämpas direkt, så löser de uppgiften lika bra som eleverna i Hong-Kong och Taiwan, eftersom dessa inte har någon direkt fördel av sin begreppsligt inriktade undervisning i en sådan typ av uppgift.

Alternativ d), som var den mest frekventa (17,4 %) distraktorn, 42 zed, representerar vad Allan fick betala och inte vad han "sparade". Distraktorn c) är troligen en ren överföring av procentsatsen 30 procent till 30 zed (5,0 %) medan b) endast representerar ett rimligt belopp, 24 zed, som inte kan erhållas genom någon elementär beräkning (11,0 %).

I nästa uppgift (M07_12) för årskurs 8 efterfrågas procentsatsen, vilken till skillnad från i de två föregående uppgifterna inte var given.

Det ursprungliga priset är givet men även priset efter sänkningen. Genom att subtrahera dessa båda priser erhålls sänkningen. En sådan problemsituation är en subtraktiv jämförelse. Priset hade alltså sänkts med 36 zed. Andelen blir då $\frac{36}{120}$ som kan förkortas till $\frac{3}{10}$ vilket motsvarar 30 procent som i alternativ b).

I Zedland var ursprungspriset på en rock 120 zed. På rea kostade rocken 84 zed. Med hur många procent var priset på rocken sänkt?

- (A) 25
- (B) 30
- (C) 35
- (D) 36

M032529

I TIMSS 2007 valdes detta av knappt hälften av de svenska eleverna (45,2 %) medan i TIMSS 2003 av en betydligt större andel elever (55,5 %). I Taiwan valdes det korrekta alternativet av ungefär samma andel elever (49,2 %) 2007 men av fler elever (67,0 %) i Hong Kong. I denna uppgift är den procedurrella modellen inte lika lätt applicerbar. Med en ekvation är problemet emellertid möjligt att lösa, $x \cdot 120 = 36$. Här kan en begreppsligt inriktad undervisning emellertid visa sig vara fördelaktig, eftersom andelsbegreppet är möjligt att tillämpa direkt.

Alternativ d), 36, var den mest frekventa distraktorn (24,1 %; 21,8 %). Den representerar en omvandling av prissänkningen från zed till en procentsats. Båda åren hade de övriga två distraktorerna en låg frekvens. Orsaken kan vara, att de endast representerade rimliga svar. En mindre andel svenska elever (5,9 %; 1,0 %) försökte inte lösa uppgiften.

Trots att procentbegreppet är en variant av andelsbegreppet, så uppvisar de svenska eleverna högre lösningsfrekvenser på uppgifter, som rör procentbegreppet än på uppgifter om andelsbegreppet.

6.5.3 Förhållande

I uppgift (M07_03) för årskurs 8 uttrycks ett förhållande eller en motsvarighet mellan mängden guld och silver, 1 gram guld till 4 gram silver. Detta kan sägas representera den första situationen, i vilken motsvarigheten till fullo är bestämd.

En legering av guld och silver är gjord i förhållandet 1 gram guld till 4 gram silver. Hur många gram silver är det i 40 gram av denna legering?

- (A) 8
- (B) 10
- (C) 30
- (D) 32

M032160

Eftersom relationen mellan guld och silver getts som en motsvarighet, 1 gram guld till 4 gram silver, och eftersom helheten, som de båda delarna guld och

silver ingår i, har angetts till 40 gram, så ska motsvarighetsrelationen transformeras till en andelsrelation, vilket innebär, att samtliga delar i motsvarighetsrelationen adderas och då fås helheten 5 gram. Silvret utgör då 4 gram av 5 gram eller modellerat med ett tal i bråkform $\frac{4}{5}$. Andelen blir $\frac{4}{5}$ av 40 gram, vilket ju är 32 gram.

Ungefär en fjärdedel av de svenska eleverna (25,6 %) löste uppgiften korrekt i TIMSS 2007, medan en majoritet av eleverna (39,8 %) valde alternativet 10 gram som representerar en begreppslig missuppfattning. I TIMSS 2003 löste också färre elever (30,6 %) uppgiften än de som gjorde (35,0 %) detta begreppsliga misstag. Misstaget bestod i att uppgiften modellerades med en motsvarighetsrelation, som uttrycker mängden guld i relation till mängden silver, vilket svarar mot bråket $\frac{1}{4}$. Andelen blir $\frac{1}{4}$ av 40, som är 10 gram och motsvarar distraktorn b).

Slår man ihop lösningsfrekvenserna för det korrekta svarsalternativet och det begreppsliga misstaget, så motsvarar detta ungefär lösningsfrekvenserna för det korrekta alternativet i Hong Kong och Taiwan (50,9 %; 68,6 %). Det begreppsliga misstaget var betydligt mindre frekvent i Hong Kong (28,0 %) och Taiwan (16,5 %) än i Sverige (39,8 %). Det finns därför anledning att misstänka, att den begreppsliga inriktningen av undervisningen där var utslagsgivande i denna uppgift.

Alternativ c), som svarar mot 30 gram, kan fås genom att subtrahera 10 gram från 40 gram. De elever (21,6 %; 26,2 %), som valde detta alternativ tyckte tro, att det var mängden guld de fått fram, då resultatet blev 10 gram. Genom att subtrahera 40 gram med 10 gram kan då mängden silver fås, som då blir 30 gram.

Alternativ a), som svarar mot 8 gram, representerar den korrekta mängden guld i legeringen. Den mängden fås genom att subtrahera 40 gram med 32 gram, vilket blir 8 gram. En relativt mindre andel elever (9,2 %; 6,5 %) valde detta alternativ. Endast några få procent av eleverna (3,8 %; 1,7 %) försökte inte lösa uppgiften.

Den andra uppgiften (M02_04) för årskurs 8 testar också skillnaden mellan andelsbegreppet och förhållandebegreppet. Förhållandet mellan pojkar och flickor anges som en motsvarighet, 2 pojkar till 3 flickor. Medan det totala antalet elever i klassen har angetts till 30, vilket alltså utgör helheten.

M02_04

Det finns 30 elever i en klass. Förhållandet mellan antalet pojkar och flickor i klassen är 2 till 3. Hur många pojkar finns det i klassen?

- (A) 6
- (B) 12
- (C) 18
- (D) 20

M042055

Motsvarighetsrelationen måste därför transformeras till en andelsrelation, där helheten blir $2 + 3 = 5$. Andelen pojkar blir då 2 pojkar av 5 elever eller model-

lerat med tal i bråkform $\frac{2}{5}$. Det totala antalet pojkar blir då $\frac{2}{5}$ av 30, vilket är 12 och motsvarar alternativ b), som hade valts av knappt två femtedelar av de svenska eleverna (39,9 %).

Om man missuppfattar och tror att andelssituationen är 2 av 3, så blir den matematiska modellen $\frac{2}{3}$ av 30, vilket är 20, alternativ d). Detta valdes av nästan en tredjedel av de svenska eleverna (29,5 %). Eftersom distinktionen mellan begreppen, förhållande och andel, har en avgörande betydelse för en korrekt lösning av uppgiften, så var lösningsfrekvenserna i Hong Kong och Taiwan betydligt högre (70,3 %; 82,7 %). Den andel elever, som där valt det begreppsligt felaktiga alternativet, 20 pojkar, var betydligt mindre (15,2 %; 4,7 %).

Alternativ c), 18, utgör antalet flickor i klassen och kan fås genom subtraktionen $30 - 12$. En fjärdedel av de svenska eleverna (24,7 %) valde detta. Även detta misstag var lågfrekvent i Hong Kong (11,5 %) och Taiwan (10,2 %).

Alternativ a) valdes lågfrekvent (2,7 %) av de svenska eleverna troligen beroende på en svag begreppslig anknytning. Endast några procent (3,2 %) försökte inte lösa uppgiften.

Om de svenska elevernas lösningsfrekvenser adderas för det korrekta svarsalternativet, som representerar en andelssituation, och för distraktorn, som representerar en motsvarighetssituation, så fås frekvenser, som ligger i paritet med det korrekta alternativet i Hong Kong och Taiwan. Frekvenserna för det begreppsligt felaktiga alternativet är där också avsevärt lägre.

Nedanstående uppgift (M03_05) benämns bussproblemet. Likheten med föregående uppgift är slående. Helheten är angiven till 36 och motsvarigheten beskrivs i relationen mellan barn och vuxna, det vill säga del till del.

Det finns 36 passagerare i en buss. Förhållandet mellan antalet barn och antalet vuxna är 5:4. Hur många barn finns i bussen?

Svar: _____

M03_05

M022106

Uppgiften ska till skillnad från föregående multiple-choice-uppgift beräknas och svaret ska anges. Eftersom helheten 36 passagerare har angivits, så måste andelen barn uttryckas på motsvarande sätt. Detta görs genom att motsvarighetsrelationen 5:4 transformeras till en andelsrelation. Helheten fås då genom att beräkna $5 + 4$, vilket är 9. Andelen barn blir då $\frac{5}{9}$. Därefter beräknas $\frac{5}{9} \cdot 36 = 20$. Så 20 barn fanns på bussen. En liten andel svenska elever (13,4 %) löste uppgiften i TIMSS 2007, medan en något större andel (15,1 %) gjorde det i TIMSS 2003. I Hong Kong och Taiwan var det betydligt större andelar av elever (62,4 %; 74,1 %), som löste uppgiften korrekt.

I tabell 6.6 anges icke viktade frekvenser och den relativa frekvensen är baserad på de 263 svenska eleverna i TIMSS 2007.

Tabell 6.6 Kategorier som representerar de svenska elevernas olika begreppsliga lösningsstrategier, årskurs 8 i TIMSS 2007, n = 263

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Transformation av motsvarighet till andel Antal barn, korrekt	42	16,0	20
Transformation av motsvarighet till andel Antal vuxna	20	7,6	16
Ingen transformation 1/4 tas av 36	18	6,8	9
Ingen transformation 3/4 tas av 36	4	1,5	27
Ingen transformation 1/5 tas av 36	13	4,9	7
Ingen transformation 4/5 tas av 36	15	5,7	28/29/30
Ingen transformation 5/4 tas av 36	2	0,8	45
Andra typer av inkorrekta beräkningar	65	24,7	-
Ingen beräkning utförd	84	31,9	-
Totalt	263	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Det mest frekventa begreppsliga misstagen (19,8 %), som de svenska eleverna gjorde, var att inte utföra någon transformation av motsvarighetsrelationen. En mindre grupp elever (7,6 %) utförde beräkningen för vuxna i stället. Ganska många elever (31,9 %) hade inte utfört någon beräkning. I andra typer av inkorrekta beräkningar (24,7 %) ingår en större grupp ej redovisade beräkningar samt sådana, som rimligen måste betraktas som gissningar. Den begreppsligt inriktade undervisningen i Hong Kong och Taiwan ger eleverna en fördel vid lösning av denna typ av uppgifter. Eftersom motsvarighetsrelationen måste transformeras till en andelsrelation.

Problemet kan emellertid lösas med en ekvation utan särskilt mycket kunskaper om proportionalitet med användning av en procedurell modell. Om x är antalet barn i bussen så blir $36 - x$ antalet vuxna. En ekvation kan då skrivas $\frac{x}{36-x} = \frac{5}{4}$, vilket ger $x = 20$.

Detta är en mer eller mindre direkt tillämpning av den i undervisningen använda procedurella modellen för förhållande och andel $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Det är dock tveksamt om särskilt många svenska elever i årskurs 8 är bekanta med den typ av ekvationer, som formeln leder till.

Nästa uppgift (M03_12) för årskurs 8 handlar om hur långt en buss kör. Som alltid vid proportionalitet så beskrivs två situationer i problemtexten. I den första anges att bussen hinner 120 km på 5 timmar. Det sägs också, att det rör sig om ett direkt proportionellt förhållande. Detta gör att motsvarigheten mellan de två storheterna längd och tid är kända. I den andra situation är endast tiden, 8 timmar, känd och inte den sträcka, som efterfrågas.

För att hitta en lösning kan man först beräkna hur långt bussen kör på en timma, $\frac{120}{5} = 24$. Så bussen kör 24 km på 1 timma, vilket då representerar hastigheten. På 8 timmar kör bussen då $8 \cdot 24 = 192$. Så alternativ b) är det korrekta, vilket valdes av en majoritet av de svenska eleverna (73,3 %) i TIMSS 2007. En betydligt mindre andel elever (59,3 %) löste uppgiften i TIMSS 2003. Lösningfrekvenserna i Hong Kong och Taiwan var något högre (87,8 %; 90,2 %). Att skillnaden i förmåga att lösa uppgiften ändå är så förhållandevis liten, torde bero på att den procedurella modellen, vilken beskriver relationen

En buss körs med konstant fart, så att den tillryggalagda sträckan är direkt proportionell mot restiden. Om bussen hinner 120 km på 5 timmar, hur många kilometer hinner den då på 8 timmar?

- (A) 168
- (B) 192
- (C) 200
- (D) 245

M032704

mellan sträckan, tiden och hastigheten ($s = t \cdot v$) är mer eller mindre direkt tillämpbar i båda situationerna.

Det första alternativet 168 km representerar $7 \cdot 24$ och var lågfrekvent (6,4 %; 12,8 %) valt av de svenska eleverna. Ingen av distraktorerna representerar något sätt att missförstå proportionalitet på men kan dock verka rimliga. Samtliga var lågfrekventa. En mindre andel svenska elever (2,6 %; 6,0 %) försökte inte lösa uppgiften. Den förändrade lösningsfrekvensen i Sverige mellan 2003 och 2007 representerar en relativt kraftig förbättring (14 %).

Även nästa uppgift (M03_11) behandlar en motsvarighet, vilken anges som del per del, 1 lärare per 12 elever. Dessutom är en del av delarna angiven, nämligen 108 elever, vilket gör uppgiften relativt enkel.

På en skolresa fanns det 1 lärare per 12 elever. Om 108 elever åkte på resan, hur många lärare var det med på resan?

- (A) 7
- (B) 8
- (C) 9
- (D) 10

M032701

Enkelheten framgår också av lösningsfrekvensen, då en stor majoritet av de svenska eleverna (86,5 %) i TIMSS 2007 löste uppgiften korrekt och valde alternativ c) dvs. 9 lärare. Trots uppgiftens relativa enkelhet löste betydligt färre elever (72,2 %) den i TIMSS 2003. För år 2007 låg de svenska elevernas lösningsfrekvens inte så långt efter elevernas i Hong Kong och Taiwan (95,2 %; 95,5 %).

Problemet kan modelleras som en lika-grupper-situation och svarar mot, hur många grupper av 12, som innehålls i 108. Uppgiften modelleras med en innehållsdivision och innebär, att 9 sådana grupper finns. Detta motsvarar en lärare per grupp om 12 elever, alltså 9 lärare, alternativ c). I denna uppgift behövs ingen transformation från en motsvarighetsrelation till en andelsrelation, vilket gör uppgiften betydligt lättare begreppsligt sett.

De övriga distraktorerna verkar omöjliga att få fram genom begreppsliga misstag eller genom elementära operationer. Med andra ord, distraktorerna var inte begreppsligt attraktiva. Lösningensfrekvensen för de svenska eleverna var också ovanligt hög i TIMSS 2007.

I den uppgift (M03_02), som gavs i årskurs 4, behövdes inte heller någon transformation från en motsvarighetsrelation till en andelsrelation, vilket också gjorde denna uppgift mindre svår.

M03_02

Två pojkar var ute och sprang. För varje sträcka på 2 km som Fredrik sprang, sprang Allan en sträcka på 3 km. Fredrik sprang 6 km. Hur långt sprang Allan?

Svar: _____ km

M031285

Drygt hälften av eleverna (55,3 %) löste problemet och presenterade det korrekta svaret 9 km. Motsvarigheten mellan hur långt Fred sprang och Allan sprang innebar, att Allan sprang 1,5 gånger längre än Fred. Detta är en multiplikativ jämförelse. Då denna appliceras på den andra situationen, i vilken Fred sprang 6 km, så sprang Allan $1,5 \cdot 6$ km, som är 9 km.

En additiv ansats förekom också. Allan sprang ju 1 km längre, då han sprang 3 km och Fred 2 km. Detta representerar en additiv ökning. Därför adderade en grupp elever (12,4 %) inkorrekt 1 km till 6 km och fick resultatet 7 km.

Då den förra uppgiften för årskurs 8 och den senare för årskurs 4 är av samma principiella uppbyggnad, så kan med fördel lösningensfrekvenserna jämföras. Det tycks som en relativt kraftig förbättring (31,2 %) skett i årskurs 8 sedan 2003.

I nästa uppgift (M03_10) blandar Doris ihop en deg. Motsvarigheten anges som $1\frac{1}{2}$ gånger originalreceptet och därmed ska uppgiften modelleras som en proportionalitet. Eftersom sockret i originalreceptet utgjordes av $\frac{3}{4}$ deciliter ska denna mängd förmeras $1\frac{1}{2}$ gång eller $\frac{3}{2}$ gånger, vilket modelleras som en multiplikation av två tal i bråkform $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$. Detta skrivs i blandad form som $1\frac{1}{8}$, vilket motsvarar det korrekta alternativet b), som valdes av knappt en tredjedel av de svenska eleverna (30,0 %; 28,8 %) i TIMSS 2007 och 2003. I Hong Kong och Taiwan valde eleverna alternativ b) med betydligt högre frekvenser (68,8 %; 70,8 %).

Den mest högfrekventa distraktorn för de svenska eleverna (35,1 %; 33,4 %) var emellertid c) $1\frac{1}{4}$. Motsvarande frekvenser för eleverna i Hong Kong (18,4 %) och Taiwan (15,8 %) var ungefär hälften så höga. I detta alternativ adderas alltså $\frac{1}{2}$ eller $\frac{2}{4}$ till $\frac{3}{4}$, vilket blir $\frac{5}{4}$ eller i blandad form $1\frac{1}{4}$. Förändringen ses alltså i detta alternativ som additiv och inte multiplikativ.

Doris gör en stor bröddeg som är en och en halv gånger originalreceptet.

Om det står $\frac{3}{4}$ deciliter socker i originalreceptet, hur många deciliter socker behöver Doris till sin deg?

- (A) $\frac{3}{8}$
- (B) $1\frac{1}{8}$
- (C) $1\frac{1}{4}$
- (D) $1\frac{3}{8}$

M032523

En annan frekvent distraktor var d), som attraherade en dryg femtedel av eleverna (23,5 %; 23,8 %) båda åren. Även detta alternativ valdes lågfrekvent av eleverna i Hong Kong (6,5 %) och Taiwan (7,0 %). Denna distraktor $1\frac{3}{8}$ kan fås genom att $1\frac{1}{2}$ tolkas som, att det först blir en hel. Därefter tas hälften av $\frac{3}{4}$ vilket blir $\frac{3}{8}$. Tillsammans blir detta $1\frac{3}{8}$. Misstaget innebär en oförmåga att kalkylera med tal i bråkform och behöver inte primärt vara något begreppsligt misstag relaterat till proportionalitet.

Den minst frekventa distraktorn a) $\frac{3}{8}$ valdes av en liten andel elever (8,1 %; 8,8 %). Det nya receptets mängder skulle vara $1\frac{1}{2}$ gånger det ursprungliga, men $\frac{3}{8}$ utgör hälften av det ursprungliga receptets mängd. Den är därför begreppsligt sett bara själva ökningen. En liten andel elever (3,3 %; 5,2 %) försökte inte lösa uppgiften.

Den begreppsliga undervisningen i de två ostasiatiska länderna gör sig åter gällande. Eftersom eleverna i Hong Kong och Taiwan behärskade tal i bråkform betydligt bättre än de svenska eleverna, så ger det också utslag i denna uppgift. Valen av distraktorerna var mindre frekvent i dessa länder. Troligen beror detta på, att begreppen och misstagen problematiserats systematiskt i undervisningen där.

Uppgiften (M05_01) behandlar en jämförelse av motsvarighetsrelationer, vilka visas i tabellen. De olika tänkbara kombinationerna anges i alternativen. Det korrekta alternativet var b), som innebär, att relationerna är lika i klasserna 1 och 3. Ungefär en tredjedel av de svenska eleverna (33,4 %; 34,2 %) valde detta både i TIMSS 2007 och 2003. Eleverna i Hong Kong och Taiwan lyckades betydligt bättre (69,7 %; 80,9 %).

Distraktorn a) innebär, att jämförelsen mellan klass 1 och 2 ses som en additiv ökning istället för en proportionell, eftersom det skiljer 2 enheter inte bara mellan 12 och 14 utan också mellan 9 och 11. Distraktorn attraherade knappt en fjärdedel av de svenska eleverna (22,8 %; 24,2 %) båda åren men betydligt färre i Hong Kong (9,9 %) och Taiwan (4,7 %), vilket betyder, att eleverna där lättare kan skilja på en additiv och en multiplikativ ökning.

Klass	Pojkar	Flickor
1	12	9
2	14	11
3	16	12
4	18	15

Tabellen ovan visar antalet pojkar och flickor i fyra klasser. I vilka två klasser är förhållandet mellan antalet pojkar och antalet flickor lika?

- Ⓐ 1 och 2
- Ⓑ 1 och 3
- Ⓒ 2 och 3
- Ⓓ 2 och 4

M032142

En liknande additiv jämförelse innebär valet av d). Det skiljer 4 inte bara mellan 14 och 18 utan också mellan 11 och 15. Jämfört med distraktorn a) valde något mindre andel svenska elever (17,2 %; 17,3 %) denna. I Hong Kong (9,5 %) och Taiwan (5,4 %) var däremot lösningsfrekvensen mer stabil. Distraktorn c) är dock svårare att hitta någon enkel förklaring till, trots att en grupp svenska elever (17,1 %; 19,3 %) fastnade för denna. Den var lågfrekvent också i Hong Kong (10,9 %) och Taiwan (9,0 %). En mindre andel svenska elever (9,5 %; 5,0 %) valde att inte försöka lösa uppgiften.

Skillnaderna i lösningsfrekvenser mellan länderna visar tydligt, att förmågan att skilja en additiv ökning från en multiplikativ kan avgöra om uppgiften löses eller ej.

6.6 Funktionella samband

Sambanden i följande uppgifter behöver inte vara proportionella även om inget i den första uppgiften för årskurs 4 antyder detta. I uppgiften (M01_10) för årskurs 8 så beskrivs inget proportionellt samband. Olika avsvälningstider för olika temperaturintervall anges i tabellen.

Både i TIMSS 2007 och 2003 lyckades en förvånansvärt liten andel elever (11,8 %; 13,8 %) lösa uppgiften korrekt. Några få procent löste den partiellt. Men även i högpresterande länder som Hong Kong och Taiwan var lösningsfrekvensen förhållandevis låg (29,1 %; 28,8 %). Uppgiften beskriver ju inget proportionellt samband utan ett funktionellt sådant, vilket kan vara skälet till de låga lösningsfrekvenserna. Även sättet att ange intervaller kan ha vållat eleverna problem.

En ganska stor andel svenska elever försökte inte lösa uppgiften (30,4 %; 23,6 %). Skillnaden i lösningsfrekvens mellan åren är dock inte tillräckligt stor för att extrapoleras till populationen.

Katja gjorde en tabell för att hålla reda på hur lång tid det tog för vattnet i en bågare att svalna från 95°C till 70°C. Hon mätte tiden det tog för vattnet att svalna i intervaller om 5°C.

Avlästa intervall	Avsvalningstid
95°C – 90°C	2 minuter 10 sekunder
90°C – 85°C	3 minuter 19 sekunder
85°C – 80°C	4 minuter 48 sekunder
80°C – 75°C	6 minuter 55 sekunder
75°C – 70°C	9 minuter 43 sekunder

Uppskatta, med en minuts noggrannhet, den totala tid det tog för vattnet i bågaren att svalna från 95°C till 70°C och förklara hur du gjorde denna uppskattning.

Uppskattning: _____

Förklaring:

Uppgiften i årskurs 8 var jämförbar med två uppgifter i årskurs 4. Den första (M01_05) handlar om en temperaturökning, som kan vara proportionell. Två av uppgiftens distraktorer verkar direkt orimliga, eftersom temperaturen startade på 12 grader och ökade med 2 grader varje timme och då kan ju temperaturen omöjligt bli varken 15 eller 17 grader. Beroende på att beräkningen innebär en addition av jämna tal, så kan resultatet aldrig bli ett udda tal. Dessa två distraktorer var också lågfrekventa. Det korrekta alternativet 16 grader valdes av fler än två tredjedelar av de svenska eleverna (69,7 %). Distraktorn 14 grader lockade en mindre andel svenska elever (14,8 %). Grunden för detta val fick de genom att uppfatta hela temperaturökningen som 2 grader.

Temperaturen en morgon kl. 07.00 var 12 grader. Den ökade med 2 grader varje timme tills den blev 20 grader kl. 11.00. Vad var temperaturen kl. 09.00?

- (A) 14 grader
- (B) 15 grader
- (C) 16 grader
- (D) 17 grader

Den andra jämförbara uppgiften (M01_06) för årskurs 4 hade inte samma tydliga analogi som den förra. De olika tiderna skulle på samma sätt som tempera-

turerna adderas. Ungefär hälften av eleverna (49,7 %) klarade att lösa uppgiften korrekt.

M01_06

David, Robert och Linnea går hem från skolan tillsammans. Det tar dem 25 minuter att komma hem till Linnea. Sedan tar det David och Robert 10 minuter att komma hem till Robert. Därifrån tar det David 5 minuter att gå hem.

Vilken tid måste de gå från skolan för att David ska komma hem till kl. 15.50?

Svar: _____

M031068

Sammanfattningsvis kan konstateras att orsaken till de bättre lösningsfrekvenserna för årskurs 4 uppgifterna jämfört med årskurs 8 kan förklaras med att avläsningen av tabellerna i uppgiften för årskurs 8 kan ha försvårat lösandet.

6.7 En bild av elevernas aritmetiska kunskaper

Såsom beskrivits i forskningsöversikten, så kan konceptuellt eller procedurellt inriktad undervisning avgöra elevers möjlighet att modifiera lösningsmetoder. Med en konceptuell inriktning kan lösningar transfereras till nya situationer, medan med en procedurell inriktning så får lösningarna en mer lokal kontextuell karaktär. Som tidigare beskrivits så ger detta eleverna i Hong Kong och Taiwan, som är kända för att ha en konceptuellt inriktad undervisning, fördelar. Om elever har en begreppslig förståelse så bör flera uppgifter som avser testa förståelse av ett och samma begrepp kunna lösas av en och samma elev. Om däremot undervisningen varit procedurellt inriktad, så kan enstaka spridda uppgifter lösas av varje enskild elev, speciellt om procedurella modeller kan tillämpas direkt på uppgifterna (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999). I sådana uppgifter får elever i samtliga länder relativt höga lösningsfrekvenser, vilket redovisats i tidigare avsnitt.

I detta avsnitt kommer analysen av elevernas lösningsmönster att redovisas. Data från TIMSS 2007 och 2003 från Sverige och för 2007 från Hong Kong och Taiwan används. Analysen fokuserar proportionalitetsbegreppet, som utgör ett nyckelbegrepp inom området aritmetik och taluppfattning i TIMSS 2007 och 2003 för årskurs 8. De uppgifter som studerats är ”Vilket bråk är minst?”, ”En buss kör med konstant fart”, ”En lärare per 12 elever”, ” $1\frac{1}{2} \cdot$ original receptet”, ”Förhållandet barn – vuxna på bussen” och ”Andel biljetter för 10 zed”. Samtliga uppgifter tillhör block 3.

För svenska elever i TIMSS 2007 var det mest frekventa lösningsmönstret (32,1 %) att de tre första uppgifterna löstes korrekt. Därefter kom att olika kombinationer av två uppgifter bland de tre första hade lösts korrekt (15,3 %). Lösningsmönstret som innebär att samtliga uppgifter löstes hade låg frekvens (3,8 %).

Vid en jämförelse av lösningsmönstren i TIMSS 2007 och TIMSS 2003 är likheterna slående. Det mest frekventa i TIMSS 2003 representeras också av

att de tre första uppgifterna löstes korrekt men frekvensen är väsentligt lägre (21,6 %). Det andra lösningsmönstret att ha löst två uppgifter av de tre första var något mer frekvent (23,5 %). Det var ungefär lika stor andel elever som löste samtliga uppgifter 2003 (3,1 %) som 2007. Eftersom uppgifterna hänger ihop begreppsligt så borde en större andel svenska elever ha löst samtliga uppgifter om undervisningen varit begreppsligt orienterad.

Lösningsmönstren i Hong Kong och Taiwan uppvisar en helt annan bild. Det mest frekventa (33,3 %; 42,6 %) representerar, att samtliga uppgifter lösts i båda länderna. Detta resultat antyder, att ostasiatiska eleverna exponerats för en begreppsligt inriktad undervisning mer frekvent än vad de svenska eleverna gjort. Bilden styrker intrycket av en undervisning, i vilken begreppsliga likheter betonats. Även de lösningsmönster som innebär att eleverna missat en av uppgifterna har sammantaget förhållandevis hög lösningsfrekvens (24,8 %; 17,9 %). Få av de ostasiatiska eleverna löste endast tre eller färre uppgifter, medan detta mönster utgjorde tyngdpunkten för de svenska eleverna i TIMSS 2007 och 2003.

Trots att uppgifterna hänger ihop begreppsligt och samtliga rör proportionalitetsbegreppet i olika kontexter så leder en procedurrellt inriktad undervisning till att endast spridda uppgifter löses. Om däremot undervisningen haft en konceptuell inriktning och behandlat begreppet proportionalitet i olika kontexter, så hade eleverna mer konsekvent kunnat lösa samtliga uppgifter.

6.8 Sammanfattning och slutsatser

För det första kan det konstateras att de svenska elevernas prestationer i TIMSS 2007 och TIMSS 2003 var ungefär likvärdiga. Lösningsfrekvenserna skiljde sig på några tiondelar och i enstaka fall med några procent. Detta styrker reliabiliteten och validiteten i TIMSS 2007, vilket gör det säkrare att dra slutsatser.

Det är också möjligt att se de svenska elevernas utveckling från årskurs 4 till årskurs 8. Trots en allmänt negativ bild finns tecken på en positiv utveckling inom proportionalitetsområdet. Det är emellertid viktigt att komma ihåg att en elev kan ha med sig kunskaper som gör att han/hon både klarar och inte klarar att lösa en uppgift. Eleven är bara inte medveten om i vilken kontext den ena eller andra kunskapen ska användas.

I uppgifter rörande den grundläggande taluppfattningen, som berör övergången mellan språklig kod och sifferkod samt avläsning av skalor, så exponerade eleverna i Sverige lika frekventa lösningar som eleverna i Hong Kong och Taiwan. Vad gäller storleksordnande av tal, så var lösningsfrekvenserna något bättre i Hong Kong och Taiwan. Detsamma gäller problemlösning av en lika-grupper-situation och innebörden av vetenskaplig form. Då begreppet primfaktorer testades var, som väntat, skillnaderna betydligt större beroende på att svenska elever uppenbarligen inte kände till begreppet. Här ses skillnaderna i undervisningens inriktning tydligt.

Även beträffande negativa heltal syns spår av den begreppsligt inriktade undervisningen i de två ostasiatiska länderna. Endast en mindre del av de svenska eleverna har tillräckliga kunskaper om negativa heltals egenskaper medan majoritet av eleverna i Hong Kong och Taiwan har sådana kunskaper.

De svenska elever klarar något bättre än eleverna i Hong Kong och Taiwan att storleksordna bråk. Dock gick addition och subtraktion av oliknämninga bråk

betydligt sämre. Huvuddelen av de svenska eleverna gör det kända misstaget att addera respektive subtrahera både täljare och nämnare. Eftersom denna typ av misstag tas upp i undervisningen i de ostasiatiska länderna på ett systematiskt sätt, alltså betydligt mer frekvent än i Sverige, så gör endast en mindre grupp av eleverna där detta misstag. De svenska eleverna i årskurs 4 gör samma misstag vid subtraktion av liknämninga bråk. Detta torde mest bero på utebliven undervisning av detta innehåll.

Addition av decimaltal klarar betydligt fler svenska elever i TIMSS 2007 än 2003, men ännu fler elever i Hong Kong och Taiwan klarar detta. Multiplikation av decimaltal löstes ungefär lika frekvent av eleverna i Sverige och i Taiwan, medan lösningsfrekvensen är betydligt högre i Hong Kong. Inom området, beräkningar med decimaltal, är skillnaderna inte så stora mellan länderna, eftersom det mest handlar om intränade av procedurer. Resultatet av en analyserad uppgift i det nationella ämnesprovet i årskurs 9 bekräftar denna bild.

Analysen av proportionalitetsbegreppet har indelats i de tre delbegreppen andel, procent och förhållande. I de uppgifter, då ingen åtskillnad mellan andel och förhållande behövde göras, låg lösningsfrekvenserna ungefär lika i alla de tre länderna, men då det krävdes en sådan åtskillnad var de svenska elevernas lösningsfrekvenser betydligt lägre. En tredjedel av eleverna i årskurs 4 blandade ihop andelar med förhållande. Problemlösning med andelsbegreppet orsakade stora svårigheter för de svenska eleverna i årskurs 8, vilka uppvisade, att de inte förstått andelsbegreppets relativa natur utan övergick till att svara med antal.

Då en procedurell tillämpning kunde göras rörande procentproblem, visade det sig, att lösningsfrekvenserna till och med var bättre i Sverige än i Hong Kong och Taiwan.

I tre uppgifter var ett förhållande givet samt storleken på helheten. Då krävdes en transformation av förhållandet till en andelsrelation för att uppgiften skulle kunna lösas. Detta behärskade inte så många svenska elever, medan eleverna i Hong Kong och Taiwan var mer framgångsrika i detta avseende. En majoritet av de svenska eleverna gjorde misstaget att inte transformera relationen, vilket är ett känt misstag, som eleverna i Hong Kong och Taiwan troligen behandlat i undervisningen. I de uppgifter, där förhållandet var givet tillsammans med en av delarna, var lösningsfrekvenserna i de tre länderna jämförbara. Detta berodde på, att en transformation av förhållande till andelar inte behövde göras.

Det visade sig också vanligt, att svenska elever misstog en proportionell ökning för en additiv ökning.

Funktionella samband var problematiska inte bara i Sverige utan även i Hong Kong och Taiwan.

Analysen av lösningsmönstren visade, att mycket få svenska elever löste samtliga uppgifter i den grupp av uppgifter, som handlar om proportionalitetsbegreppet. Den typiska bilden var, att svenska elever löst enstaka spridda uppgifter. I Hong Kong och Taiwan var bilden annorlunda, en relativt stor grupp elever hade löst samtliga uppgifter eller missat endast en uppgift.

Sammanfattningsvis kan konstateras att en majoritet av eleverna i Hong Kong och Taiwan tycks ha tillägnat sig proportionalitetsbegreppets olika aspekter och kan använda dem i olika problemsituationer. I Sverige tycks i stor utsträckning den procedurinriktade undervisningen och läromedlen hindrat eleverna från att upptäcka dessa samband.

7 Geometri

I detta kapitel beskrivs först de olika områdena, som uppgifterna omfattar. Jämförelse görs av resultaten för årskurs 8 i Sverige TIMSS 2007 och 2003 med resultaten i Hong Kong och Taiwan TIMSS 2007. De svenska elevernas resultat i årskurs 4 jämförs också med elevernas i årskurs 8. För att avgöra om en och samma elev löser flera liknande uppgifter korrekt, har resultatet av grupper av uppgifter först korstabulerats två och två. Därefter har uppgifter från ett och samma block, som alltså gjorts av samma elever, analyserats för att studera olika lösningsmönster i de tre länderna. Syftet med detta har varit att studera om undervisningens olika inriktningar i Sverige å ena sidan och i Hong Kong och Taiwan å den andra har satt olika avtryck i elevernas kunskapsstruktur. Avslutningsvis sker en sammanfattning med slutsatser.

7.1 Omkrets och area

Den första uppgiften (M01_05) testade, om eleverna i årskurs 8 kan bestämma omkretsen på en kvadrat, då arean var känd. Ungefär två femtedelar av de svenska eleverna (39,8 %) lyckades lösa uppgiften korrekt 2007 och en ungefär lika stor andel (39,6 %) år 2003.

Vilken omkrets har en kvadrat med arean 100 kvadratmeter?

Svar: _____

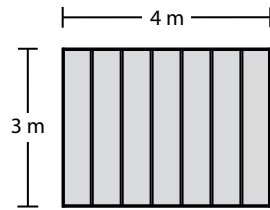
M01_05

M022055

Flera olika typer av misstag förekom. En mindre andel (7,7 %⁴) trodde, att omkretsen var en fjärdedel av arean, alltså 25 meter medan en ännu mindre andel (5,7 %⁴) menade, att den var 10 meter, vilket motsvarar längden av en sida. Den minsta andelen (3,4 %⁴) trodde, att omkretsen var lika stor som arean dvs. 100 meter. Ytterligare ett fåtal elever (8,0 %⁴) hävdade, att den var $4 \cdot 100$ dvs. 400 meter. Den största andelen elever (28,0 %⁴) angav svar, som inte hade förutsetts och därför inte har kategoriserats. Motsvarande misstag förekom 2003 med ungefär samma frekvenser.

Något mer än tre femtedelar av eleverna (61,2 %) i Hong Kong lyckades lösa uppgiften korrekt. Ungefär samma andel elever, som löste uppgiften i Sverige, löste den inte i Hong Kong (38,1 %). De elever i Hong Kong, som inte angav något svar, var mycket få (0,7 %).

⁴ Ej viktade frekvenser



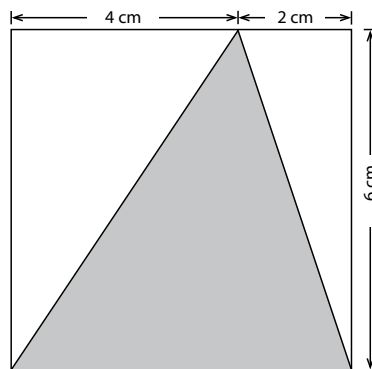
Patrik målar en sida av ett plank. Planket är 4 meter långt och 3 meter högt. Hur stor area måste Patrik måla?

- (A) 4 kvadratmeter
- (B) 7 kvadratmeter
- (C) 12 kvadratmeter
- (D) 14 kvadratmeter

M041152

I uppgift (M01_12) årskurs 8 i TIMSS 2007 och 2003 skulle eleverna bestämma arean av en triangel, som var omskriven av en kvadrat.

Figuren visar en skuggad triangel i en kvadrat.



Vilken area har den skuggade triangeln?

Svar: _____

M022243

I TIMSS 2007 och 2003 var lösningsfrekvenserna ungefär lika stora, två femtedelar av de svenska eleverna (42,7 %; 41,0 %) löste uppgiften korrekt. Frekvensen för inkorrekta lösningar var något mindre (37,9 %; 39,9%), medan ungefär en fjärdedel av eleverna (24,1 %) inte försökte lösa uppgiften.

En direkt tillämpning av formeln för triangelns area kräver en begreppslig anpassning, så att höjden och basen kan erhållas. För de elever, som förstått att en triangelns area är hälften av den omskrivna kvadratens, blir uppgiften betydligt enklare att lösa.

En omständighet, som begreppsligt kan försvåra en lösning, är, att elever inte förstått areans tvådimensionella karaktär. Detta kan visa sig genom att en inkorrekt enhet används i svaret, något som troligen också speglar, undervisningens användning av korrekta enheter. Fler än en fjärdedel av de elever (28,7 %), som försökte lösa uppgiften, svarade med inkorrekt enhet.

Uppgiften har djupanalyserats och resultatet framgår av tabell 7.1, nedan. Det mest frekventa sättet (38,2 %) att lösa uppgiften var att multiplicera de två sidorna om vardera 6 cm och sedan dividera med 2. En mindre andel elever (2,3 %) exponerade en beräkning med formeln för triangelns area. Ungefär samma andel subtraherade de två rätvinkliga trianglarnas area från rektangelns area och kom på så sätt fram till korrekt resultat. Ungefär lika stor andel (2,5 %) enkodade uppgiften korrekt men gjorde mindre räknefel. Nästan en tredjedel av eleverna (29,7 %) gjorde en inkorrekt enkodning av uppgiften och erhöll det typiska svaret 36 cm², 12 cm² och 6 cm². Någon reflektion över detta resultats orimlighet tycks inte ha förekommit. Som framgår av figuren måste triangeln, som utgör en mindre del av rektangelns area, vara mindre än 36 cm².

Tabell 7.1 Kategorier som representerar elevernas olika Lösningsstrategier, årskurs 8, TIMSS 2007 (M022243), n = 528

Kategorier alternativ	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt enkodning, korrekt beräkning			
6·6/2	202	38,2	18 cm ²
Formel	12	2,3	18 cm ²
36 cm ² – 12 cm ² – 6 cm ²	17	3,2	18 cm ²
Korrekt enkodning, inkorrekt beräkning	13	2,5	24 cm ²
Inkorrekt enkodning	157	29,7	36 cm ² , 12 cm ² , 6 cm ²
Ej svar	127	24,1	
Totalt	528	100,0	

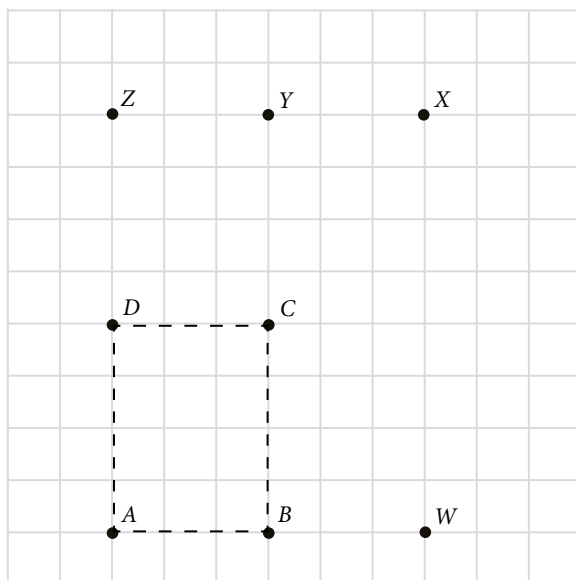
* Ej viktade frekvenser

Den konceptuellt inriktade undervisningen, som är frekvent i Hong Kong, kan ha bidragit till den betydligt högre lösningsfrekvensen (83,0 %). Likaså i Taiwan var lösningsfrekvensen relativt hög (78,4 %).

I uppgift (M04_11) för årskurs 8 nedan ska en triangel, vars area är två gånger den givna rektangelns area, konstrueras. Uppgiften förekom endast i TIMSS 2007. Speciellt i denna uppgift framkom elevernas tankemönster tydligt. Antingen var det procedurellt inriktat eller mer begreppsligt. Eleverna kunde tillämpa formeln för triangelns area eller utnyttja rutmönstret i uppgiften.

Som framgår av tabell 7.2 nedan löste endast hälften av eleverna (52,3 %) uppgiften korrekt. De mest frekvent ritade triangelarna var ZXW (29,9 %) och AYW (9,1 %). Dessa två trianglars areor var ju relativt enkla att kontrollera mot rektangelns area. Relativt få elever (0,8 %) hade ritat triangeln DXW. Denna är betydligt svårare att bestämma arean för genom att räkna antalet rutor. Däremot

Använd de markerade punkterna för att rita en triangel vars area är TVÅ GÅNGER så stor som rektangeln $ABCD$:s area.



M042130

är höjden och basen möjliga att bestämma. Om kunskapen från föregående uppgift tillämpas så framgår, att triangelns area är hälften av den omskrivna rektangeln, vilken i det här fallet är $AWXZ$. Med denna kunskap är det då betydligt lättare att konstruera den efterfrågade triangeln. Det är också möjligt för elever att beräkna rektangelns area till 12 ae och därefter konstruera en triangel, vars area är 24 ae, dvs. dubbelt så stor.

Tabell 7.2 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, årskurs 8, TIMSS 2007 (M042130), $n = 241$

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Trianglar dubbelt så stora, olika alternativ	7	2,9	AXW
	22	9,1	AYW
	72	29,9	ZXW
	16	6,6	ZWA
	4	1,7	ZXB
	3	1,2	ZXA
	2	0,8	DXW
Trianglar lika stora	25	10,4	YXW
Rektanglar	39	16,2	ZXWA
Övriga	9	3,7	
Ej svar	42	17,4	
Totalt	241	100,0	

* Ej viktade frekvenser

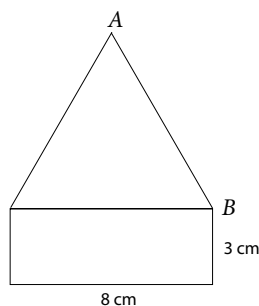
Ett vanligt misstag (10,4 %) var att konstruera en triangel, vars area var lika stor som rektangeln i figuren. Ganska många elever (17,4 %) avstod från att svara på uppgiften.

Inte heller i Hong Kong var lösningsfrekvensen (64,5 %) särskilt hög. En relativt stor andel elever (35,0 %) gav ett felaktigt svar. Eleverna i Taiwan emellertid lyckades bättre på uppgiften, där en betydligt större andel elever (79,2 %) löste den korrekt.

I årskurs 4 i TIMSS 2007 testades elevernas kunskaper om liksidiga trianglar (M05_08). Det korrekta alternativet, 8, attraherade en majoritet av eleverna (63,5 %). Att den ena av rektangelns sidor var 3 cm var en onödig upplysning.

De olika distraktorerna representerar både olika begreppsliga misstag och numeriskt tänkbara svar. Distraktorn 11, vilken är summan av 8 och 3, valdes av en mindre andel elever (10,3 %), medan distraktorn 9, som endast är ett numeriskt tänkbart svar, valdes av ungefär lika stor andel (12,8 %).

M05_08



Figuren är gjord av en rektangel och en triangel. Triangeln har tre lika långa sidor. Hur lång är sidan AB ?

- (A) 8 centimeter
- (B) 9 centimeter
- (C) 10 centimeter
- (D) 11 centimeter

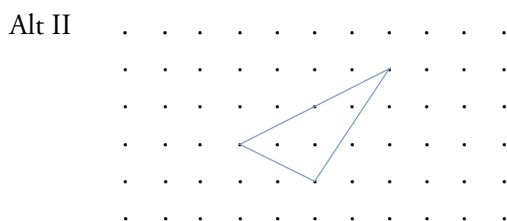
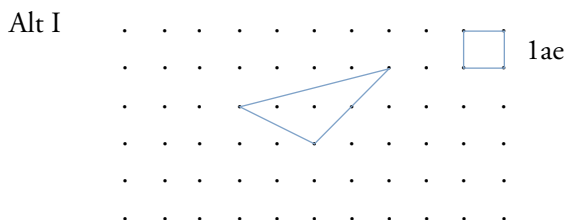
M031085

Även i det nationella ämnesprovet i årskurs 9 testades beräkningen av en triangelns area. I uppgift B1, 19, nedan, skulle eleverna bestämma triangelns area i de areaenheter, som rutmönstret representerar. Uppgiften testar elevernas förmåga att beräkna en triangelns area på ett rutmönster. I tabell 7.3 visas några av elevernas exponerade lösningsstrategier. Vissa elever verkar ha exponerat areabegreppets additiva karaktär medan andra tillämpat beräkningsformeln för triangelns area. En stor andel av de elever, som löste uppgiften, uppskattade emellertid arean genom att räkna rutor. Behärskandet av areabegreppets additiva karaktär skulle dock ha underlättat lösandet. Med tanke på den förhållandevis låga lös-

ningsfrekvensen (34,2 %) finns det anledning att misstänka, att det finns elever, som inte är fullt bekanta med den additiva karaktären av areabegreppet.

ÄP 9 2008 Del B1

19.



Bestäm triangelns area uttryckt i areaenheter (1ae)

Uppgiften finns i två versioner tänkta att uppfattas som likvärdiga. Det är dock tveksamt om de två versionerna faktiskt är likvärdiga, enär den andra versionen är betydligt svårare att lösa, då en hjälplinje inte kan användas, vilket däremot går i version 1.

Tabell 7.3 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, årskurs 9, B1, 19, nationella ämnesprovet, n = 340

Kategorier alternativ I	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt lösning, ingen uträkning	82	22,3	3 alt 4
Korrekt lösning, ritat rutor + uppskattning	27	7,3	3 alt 4
Korrekt lösning, ritat rutor	17	4,6	3 alt 4
Inkorrekt, ingen uträkning	49	13,2	4 alt 3
Inkorrekt, ritat rutor + uppskattning	9	2,4	4
Inkorrekt, övriga	113	30,5	3,5
Ej svar	73	19,7	-
Totalt	370	100,0	

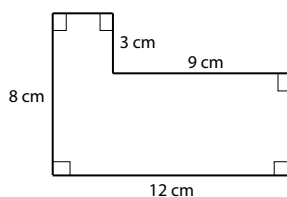
* Ej viktade frekvenser

En förhållandevis stor andel elever (19,7 %) försökte inte lösa uppgiften. Svar, som inte kunde klassificeras, gavs av nästan en tredjedel (30,5 %) av eleverna.

Även i andra uppgifter i TIMSS 2007 och 2003 testades areabegreppets additiva karaktär. I uppgiften (M07_08) nedan för årskurs 8 kan sexhörningen indelas i en rektangel och en kvadrat, vars areor kan beräknas. För att få arean av den sammansatta figuren ska de två figurernas areor adderas. Eftersom rektangelns area är $5 \cdot 12 = 60$ och kvadratens $3 \cdot 3 = 9$, så är den sammansatta figurens

area 69, vilket motsvarar alternativ b). Både i TIMSS 2007 och 2003 löste en knapp majoritet av eleverna (51,2 %; 55,0 %) uppgiften.

M07_08



Hur stor area, i kvadratcentimeter, har figuren ovan?

- (A) 66
- (B) 69
- (C) 81
- (D) 96

M032575

Den mest frekventa distraktorn (21,2 %; 18,1 %) var 96, vilken kunde erhållas genom att multiplicera 8 med 12.

Betydligt större andelar elever i Hong Kong (83,1 %) och Taiwan (85,6 %) löste uppgiften korrekt. Ingen av distraktorerna var där särskilt frekvent.

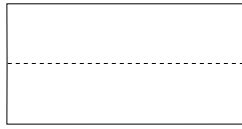
Med en begreppsligt inriktad undervisning så penetreras areabegreppets egenskaper som exempelvis dess additivitet. Sätts figurer ihop, så kan areorna adderas för att på så sätt erhålla den sammansatta figurens area.

I årskurs 4 testades areabegreppets konservation i en situation där en figur (M05_06) delades upp i två figurer och sedan sattes ihop på nytt till en ny sammansatt figur. För att förstå areabegreppets konservation krävs alltså av eleverna att inse att den första figurens area är lika stor som den nya sammansatta figurens area (Kordaki & Potari, 1997; Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981). Detta testas i uppgift (M05_06).

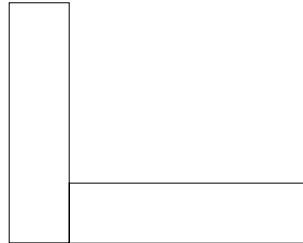
En dryg tredjedel av eleverna (39,7 %) visade, att de förstätt areabegreppets konservation genom att markera alternativ b). Uppgiftens distraktorer valdes vardera av nästan en femtedel av eleverna.

Genom att placera de två delarna som ett "L", kan man få intrycket, att den liggande delen ser större ut än den ursprungliga. Denna synvilla kan ha förlätt ett antal osäkra elever.

Jill hade ett rektangulärt papper.



Hon klippte pappret längs den streckade linjen och gjorde en L-form, så här.



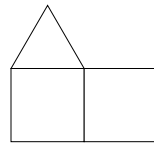
Vilket av dessa påståenden är sant?

- (A) L-formens area är större än rektangelns yta.
- (B) L-formens area är lika stor som rektangelns yta.
- (C) L-formens area är mindre än rektangelns yta.
- (D) Det går inte att räkna ut vilken area som är störst utan att mäta.

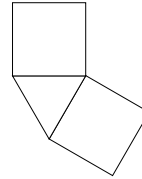
M031219

I nästa uppgift (M07_06) för årskurs 4 i TIMSS 2007 testades också areabegreppets konservation. Till skillnad från situationen i föregående uppgift är det tre olika figurer i form av brickor, som har satts samman på tre olika sätt. De tre sammansatta figurernas areor jämförs. En relativt sett stor andel elever (71,5 %) valde det korrekta alternativet, att de tre sammansatta figurernas areor är lika stora. Den mest frekventa distraktorn (13,3 %) var "Ninas form har störst area".

I den här situationen med de tre olika geometriska figurerna var det uppenbarligen lättare för eleverna att se, att flickornas tre sammansatta figurers areor var lika stora. Utgångspunkten var ju tre figurer, som flickorna satte ihop på de tre olika sätten utan överlappning. Det verkar som om eleverna inser, att sättet att kombinera figurerna på, förutsatt att ingen överlappning förekommit, inte har någon betydelse för storleken på de nya sammansatta figurernas areor. Således, förstår eleverna, att sammansättningens karaktär inte påverkar storleken på de nya areorna och har begripit den mer generella aspekten av areabegreppets konservation. I föregående uppgift var ju förutsättningarna, att en rektangel delas i två lika stora delar och sätts ihop till en "L-form". Om utgångspunkten istället hade varit de två separata delarna och kombinerats inte bara till "L-formen" utan också till rektangeln, så hade det varit möjligt att konstatera, att karaktären på sammansättningen inte påverkar de sammansatta figurernas areor, vilka förblir lika stora. Härmed gäller den generella principen om areornas konservation även föregående uppgift. Emellertid tycks det vara en form av synvilla i "L-formen", som gör, att den liggande halvan av rektangeln ser större ut, vilket kan förklara, att lösningsfrekvensen var mindre i föregående uppgift.



Rosa



Nina



Lisa

Rosa, Nina och Lisa turas om med att ordna 3 brickor. Var och en ordnar dem i olika former, så som visas. Vilket av följande påståenden om formernas areor är sant?

- (A) Rosas form har större area än de andras.
- (B) Ninas form har större area än de andras.
- (C) Lisas form har större area än de andras.
- (D) Alla formerna har samma area.

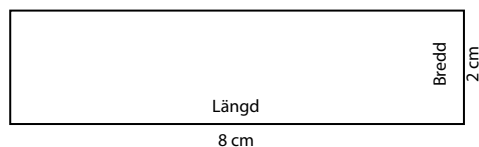
M031038

I nästa uppgift (M01_11A) i årskurs 8 i TIMSS 2007 och 2003 skulle eleverna konstruera en ny rektangel utifrån en given rektangel genom att sidorna minskades respektive ökades. För att lösningen skulle betraktas som fullvärdig, skulle förutom en korrekt rektangel även storleksbeteckningar på sidorna vara utsatta. Detta klarade ungefär en femtedel av de svenska eleverna i TIMSS 2007 respektive 2003 (22,0 %; 22,3 %). Båda åren var det en relativt sett stor andel elever (22,8 %; 23,2 %), som inte försökte lösa uppgiften.

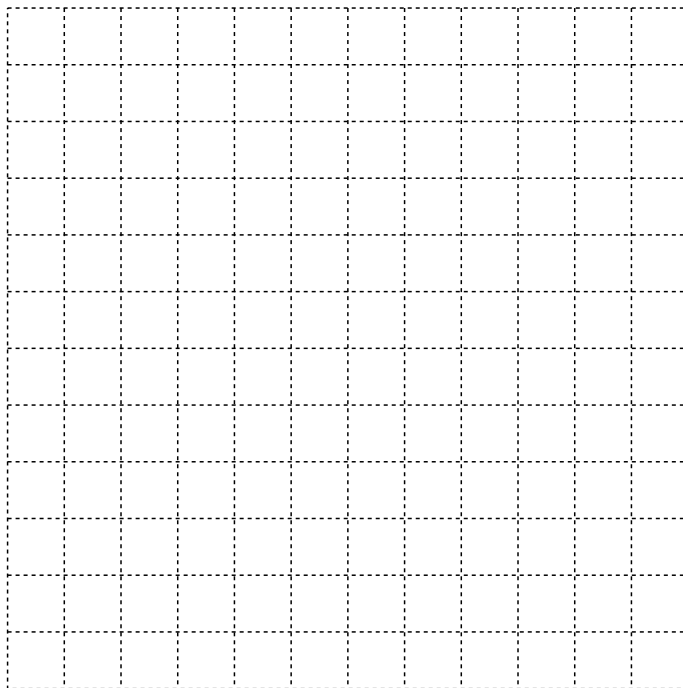
Eleverna i Hong Kong löste uppgiften mer frekvent (41,6 %), medan eleverna i Taiwan gjorde det i ännu högre grad (51,7 %). I princip försökte alla elever lösa uppgiften. Så den andel elever som gav en ofullständig eller inkorrekt lösning (59,3 %; 48,2 %) var ungefär lika stor som i Sverige.

Tabell 7.4 visar på några av de frekventa misstagen. Flera bestod i att ritandet av den nya rektangeln och markerandet av dess beteckningar inte var korrekt utförda enligt rättningsmallen. Däremot kunde de betraktas som delvis korrekta. Så de svenska elever, som hade löst uppgiften korrekt eller delvis korrekt, utgjorde ungefär två femtedelar (42,1 %). En mindre andel elever (13,3 %) fick endast en sida korrekt. Oftast (9,1 %) var det sidan om 6 cm. Det visade sig lättare att ta $\frac{3}{4}$ av 8 cm än att ta $2\frac{1}{2}$ av 2 cm. Ett mindre antal elever fortsatte att ta $\frac{3}{4}$ inte bara av 8 cm utan också av 2 cm. Dessutom tog ett antal också $\frac{3}{4}$ av $\frac{3}{4}$ av 8 cm det vill säga $\frac{3}{4}$ av 6 cm som blev 4,5 cm. Ett av misstagen (2,3 %) var att kasta om sidorna i den nya rektangeln, 5 cm x 6 cm. Utan viktade frekvenser blev andelen elever, som inte försökte lösa uppgiften, de facto något större (28,2 %). Det var dessa elever, som inte hade möjlighet att lösa deluppgift B, eftersom det härför förutsattes att A hade lösts.

Bedömningsmallen var alltså sådan, att det för att lösa deluppgift B krävdes, att deluppgift A lösts antingen korrekt eller inkorrekt. Resultatet från deluppgift A behövdes för att bestämma förhållandet mellan den gamla rektangelns area och den nya rektangelns area. Om en elev inte hade försökt lösa A, så saknades förutsättningar för att lösa B. På detta vis var de två deluppgifterna kopplade till varandra. I tabell 7.5 presenteras olika kategorier av lösningar, som är relaterade



- A. I rutnätet nedan ska du rita en rektangel vars längd är tre fjärdedelar av längden på rektangeln ovan och vars bredd är två och en halv gånger bredden på rektangeln ovan. Markera längden och bredden på den nya rektangeln i centimeter på figuren. Varje ruta i rutnätet är $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$.



- B. Bestäm förhållandet mellan den ursprungliga rektangelns area och den nya rektangelns area.

M022234

till huruvida deluppgift A lösts korrekt eller inkorrekt. En mycket liten andel elever (1,5 %) hade löst uppgiften, i vilken förhållandet mellan den gamla arean och den nya arean skulle beräknas. En sådan multiplikativ relation tycks vara främmande för eleverna och kan därför inte ha varit en naturlig del av undervisningen. Däremot har i detta sammanhang en relativt stor andel elever (19,1 %) beskrivit en subtraktiv jämförelse, nämligen $30\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 = 14\text{ cm}^2$. Även de elever (5,8 %), som löst deluppgift A inkorrekt och i konsekvens härmed fått fram en lösning på deluppgift B, har samtliga gett subtraktiva jämförelser som svar.

Tabell 7.4 Kategorier som representerar elevernas olika Lösningsstrategier, TIMSS 2007, årskurs 8, M022234A, n = 528

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
I princip korrekt lösning	223	42,1	6 cm x 5 cm
En sida korrekt	72	13,3	
3/4 av båda sidorna	12	2,3	6 cm x 1,5 cm
3/4 av första sidan 8 cm, sedan 3/4 av resultatet	11	2,1	6 cm x 4,5 cm
Inkorrekt	84	15,7	5 cm x 6 cm
Ej svar	149	28,2	
Totalt	528	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Tabell 7.5 Kategorier som representerar elevernas olika Lösningsstrategier, TIMSS 2007, årskurs 8, M022234B, n = 528

Kategorier alternativ	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt lösning, multiplikativ	8	1,5	8/15
Ungefärlig	11	2,1	Nästan dubbelt så stor
Korrekt lösning, subtraktiv jämförelse	101	19,1	14 cm ² mindre
Linjära mått	6	1,2	Omkretsen längre
Inkorrekt men korrekt lösning på A	12	2,3	-
I konsekvens med lösningen på A, subtraktiv jämförelse	30	5,8	16 cm ² , 27 cm ²
Inkorrekt, övriga	12	2,3	-
Ej svar, löst A korrekt eller inkorrekt	198	37,5	
Ej svar, ej löst A	149	28,2	
Totalt	528	100,0	

* Ej viktade frekvenser

En mycket liten andel elever (1,2 %) använde linjära mått som exempelvis omkretsen. Vid värdering av resultatet på deluppgift B, måste beaktas att den andel elever (28,2 %), som inte löst deluppgift A, saknade förutsättningar att lösa deluppgift B, på grund av att uppgifterna var kopplade.

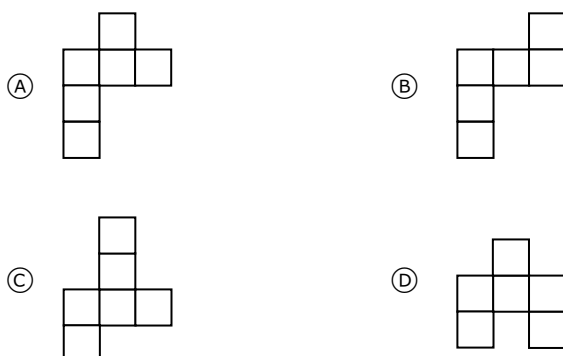
7.2 Två-dimensionella representationer av tre-dimensionella objekt

I både årskurs 8 och 4 testas hur två-dimensionella representationer av tre-dimensionella objekt uppfattas av eleverna. Att vika ett papper med en konstruktion i två dimensioner så att en tredimensionell figur erhålls var den första uppgiften (M02_09) i årskurs 8.

De svenska eleverna i TIMSS 2007 (39,8 %) löste uppgiften med betydligt lägre frekvens än eleverna i Hong Kong (77,5 %) och Taiwan (75,8 %). En av distraktorerna valdes högfrekvent av de svenska eleverna (40,2 %) nämligen d), som representerar en kubformad låda utan lock. Begreppsligt sett är detta inte någon kub, då en kub har begränsningsytor åt alla sex hållen. Här kan misstänkas att undervisningen i Sverige på ett mindre genomgripande sätt belyst detta förhållande, jämfört med undervisningen i Hong Kong och Taiwan. Adderas

Vilken figur kan vikas ihop till en kub?

M02_09



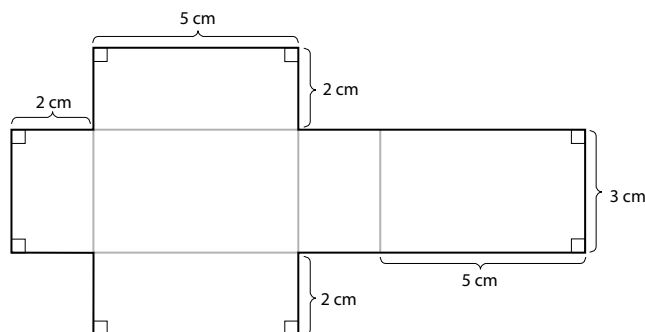
M042265

frekvenserna för det korrekta alternativet c) och för lådan utan lock d), så blir frekvenserna ungefär lika i alla tre länderna.

Det kan emellertid konstateras, att samtliga distraktorer representerar kubformade lådor utan lock. Antagligen var det svårare att upptäcka detta i distraktorerna a) och b), vilket kan vara förklaringen till den högre lösningsfrekvensen för d).

I nästa uppgift (M05_04) för årskurs 8 var måtten på en pappersmall givna. Volymen av den kropp, som erhålls då mallen viks, skulle beräknas. Cirka en fjärdedel av de svenska eleverna i TIMSS 2007 och 2003 (21,3 %; 27,3 %) lyckades lösa uppgiften korrekt. En förhållandevis stor andel (26,5 %; 17,9 %) försökte inte lösa uppgiften.

M05_04



Om mallen ovan viks ihop, så bildas en rektangulär låda.
Vilken volym har lådan?

Svar: _____ cm³

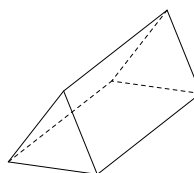
En betydligt större andel elever i Hong Kong (76,2 %) och Taiwan (76,1 %) lyckades lösa uppgiften korrekt. I praktiken var det inga elever där, som inte försökte lösa den.

För att lösa uppgifter av denna typ, som testar spatial förmåga, krävs erfarenheter av pappersmallar av olika slag och av hur dessa viks ihop, så att tre dimensionella figurer erhålls. Datoranimeringar har visat sig vara ett gott hjälpmedel (Ryu, Chong & Song, 2007).

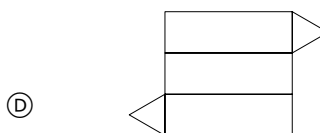
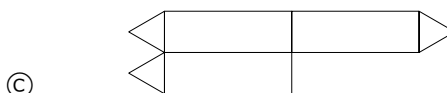
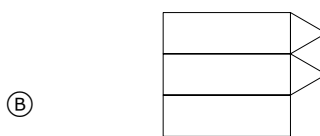
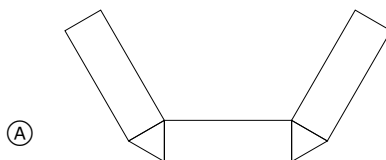
Även i årskurs 4 i TIMSS 2007 testades elevers spatiala förmåga. En pappersmall skulle vikas till en tredimensionell figur. Denna uppgift (M07_11) kan nog vara något svårare än uppgiften i årskurs 8, då den tvådimensionella representationen föreställer en tredimensionell form, ett prisma. Lösningfrekvensen var relativt hög (49,0 %) med tanke på uppgiftens svårighetsgrad. Alternativ d) var det korrekta. Distraktorn a) representerar en prisma som är öppen på ena långsidan. Den valdes relativt högfrekvent (22,3 %). De andra distraktorerna representerar inte några liknade kroppar. Begreppsligt sett är en form med en öppen långsida inte ett prisma.

Det måste konstateras, att lösningfrekvensen i årskurs 4 är relativt sett hög jämfört med lösningfrekvenserna för motsvarande två uppgifter i årskurs 8.

M07_11



Vilken av dessa skulle kunna vikas ihop till en form som 3-D figuren här ovanför?



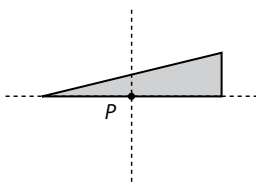
M031351

7.3 Vridning

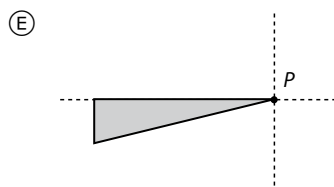
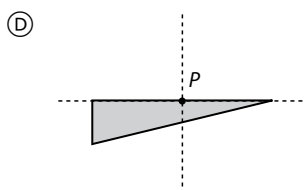
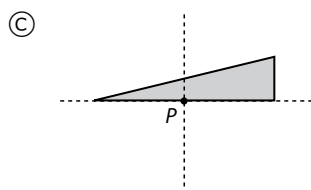
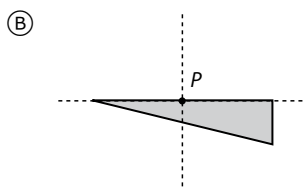
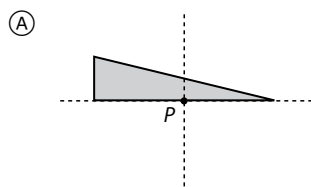
Vridning kring en punkt testades i årskurs 8 både i TIMSS 2007 och 2003 samt i årskurs 4 i TIMSS 2007. Den första uppgiften (M03_04), som rör årskurs 8, handlar om en triangel, som vrids runt en punkt. Av multiple-choicealternativen är d) det korrekta.

M03_04

Den skuggade triangeln vrids ett halvt varv i planet runt punkten P .



Vilket av följande alternativ visar triangeln efter vridningen?



M022105


Drygt hälften av de svenska eleverna (54,2 %; 54,5 %) löste uppgiften korrekt i TIMSS 2007 och 2003. Alternativ b), som inte utgör en vridning av triangeln utan är resultatet av en spegling i den horisontella linjen, var den vanligaste distraktorn (17,8 %; 18,5 %) båda åren. Även alternativ a), som utgör en spegling i den vertikala linjen, var en frekvent distraktor (12,6 %; 14,2 %).


I Hong Kong och Taiwan var lösningsfrekvenserna betydligt högre (74,9 %; 74,4 %) än i Sverige. Alternativ e) var i Hong Kong den mest frekvent valda dist-

raktorn (8,9 %). Den representerar visserligen en vridning ett halvt varv av den ursprungliga figuren men dessutom en parallellförflyttning, vilket gör, att den inte uppfyller villkoret om vridning ett halvt varv. I Taiwan däremot var på samma sätt som i Sverige distraktorerna a) och b) de mest frekventa (9,5 %; 9,0 %).

I årskurs 4 testades också vridning med hjälp av uppgiften (M02_09) nedan.


M02_09



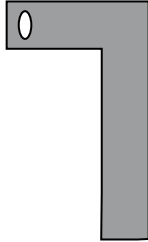


Om figuren här ovanför vrids 90° medurs, vilket av alternativen blir då resultatet?

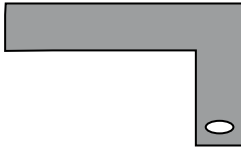
(A)



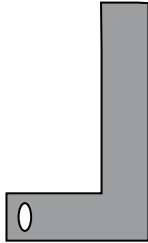
(B)



(C)



(D)



M041173

Denna vridning kan uppfattas som betydligt svårare än den i årskurs 8, som rörde sig om ett halvt varv. I årskurs 4 omfattar vridningen endast ett kvarts varv. I texten används dessutom begreppet rotation, som är ett matematiskt betydligt svårare ord än vridning. En mindre andel elever (27,4 %) löste uppgiften korrekt c), medan ungefär en fjärdedel av eleverna (24,8 %) inte försökte lösa uppgiften. Två av distraktorerna, b) och d), valdes ungefär lika frekvent (20,1 %; 21,9 %). Alternativ b) representerar en rotation ett halvt varv dock inte i samma plan som pappret utan in i pappret, medan alternativ d) representerar en rotation ett halvt varv i samma plan som pappret. Det är viktigt att notera att rotationspunkt saknas på bilderna.

Eftersom uppgiften i årskurs 4 måste betraktas som betydligt svårare än den i årskurs 8, då vridningen omfattar ett kvarts varv utan rotationspunkt, så är den lägre lösningsfrekvensen inte anmärkningsvärd.

7.4 En bild av elevers geometriska kunskaper

Även i geometri kan kopplingen mellan olika uppgifter vara olika stark beroende på undervisningens inriktning. Vad gäller proportionalitetsbegreppet, så visade det sig, att en procedurellt inriktad undervisning kunde ge mönster med enstaka spridda lösningar, medan en begreppslig inriktning åstadkommer mer sammanhängande lösningsmönster.

Tre olika geometriska uppgifter analyserades, ”Omkrets av en kvadrat med arean”, ”Arean av en triangel inskriven i en rektangel” samt ”Ny rektangel från gammal ritad på rutnät”. De tre uppgifterna handlar samtliga om rektanglar. Den första berör en kvadrat, ett specialfall av en rektangel med samtliga sidor lika långa. Areabegreppet är påtagligt involverat i såväl den första som den andra uppgiften. Den tredje rör också en rektangel, som ska ritas utifrån en tidigare rektangel, genom att en sida förminskas och en förstoras. Denna multiplikativa förändring, vilken inte testas i de två första uppgifterna, innebär en tillkommande svårighet, som kan bidra till att samvariationen inte blir lika tydlig mellan den sista och de två första uppgifterna.

De svenska elevernas lösningsmönster i TIMSS 2007 och 2003 innebar att en liten andel (11,8 %; 10,1 %) löste alla tre uppgifterna korrekt. En dryg tredjedel av eleverna (38,6 %; 37,3 %) löste inte någon uppgift alls och nästan lika stor andel (26,8 %; 30,0 %) löste endast en av uppgifterna korrekt. Sålunda uppvisade en majoritet av eleverna ingen eller svag samvariation mellan lösningarna av uppgifterna. En uppenbar tolkning av detta kan vara, att deras kunskaper huvudsakligen har en procedurell karaktär, vilket innebär, att eleverna klarar att lösa uppgifter, som de stött på tidigare och som inte kräver någon anpassning av procedurerna.

I Hong Kong och Taiwan är andelen elever (29,7 %; 32,9 %), som löst alla tre uppgifterna, något större. Men där finns också en andel elever, som inte löst någon uppgift (10,0 %; 22,9 %) och elever, som endast löst en av uppgifterna (23,8 %; 16,2 %).

Att döma av resultatet av de tre analyserade uppgifterna, är undervisningen i geometri i de tre länderna till viss del begreppsligt inriktad. Det finns emellertid grupper av elever, som inte verkar ha insett de begreppsliga sambanden mellan uppgifterna. Storleken på dessa grupper varierar dock och är störst i Sverige.

Den beskrivna samvariationen kan tolkas som att de svenska elevernas kunskaper i geometri till viss del är begreppsligt orienterade på samma sätt som i Hong Kong och Taiwan. I de två sistnämnda länderna är emellertid andelarna något större. Svenska elevers kunskaper kommer från de läromedel, som används i undervisningen, och från de eventuella genomgångar, som lärarna har. Enligt lärarenkäten följer 95 procent av lärarna lärobokens planering. Lärarna uppger också, att eleverna under huvuddelen av lektionstiden arbetar självständigt utan lärarens stöd. En slutsats som är möjlig att dra är därför, att innehållet i geometri kan vara mer begreppsligt orienterat i svenska läromedel än innehållet inom andra matematiska områden.

7.5 Sammanfattning och slutsatser

Vad Sverige beträffar kan först konstateras att lösningsfrekvenserna i TIMSS 2007 var ungefär desamma som i TIMSS 2003 inom området geometri. Skillnaderna rörde sig som mest om några procentenheter. Detta styrker reliabili-

teten och validiteten i TIMSS 2007 och gör, att slutsatser baserade på elevers korrekta och inkorrekta lösningar blir säkrare. Exempelvis var lösningsfrekvensen i uppgiften, som handlade om en kvadrats omkrets då arean var given, 39,8 procent i TIMSS 2007 och 39,6 procent i TIMSS 2003.

En jämförelse med Hong Kong och Taiwan visar, att skillnaderna i lösningsfrekvenserna inom geometriavsnittet i allmänhet inte är så påfallande som de inom avsnittet taluppfattning och aritmetik. För de svenska eleverna tenderade lösningsfrekvenserna att vara något högre för uppgifter i kontexter, som kunde antas bekanta.

Areabegreppets additivitet testades i nationella ämnesprovet men där var lösningsfrekvenserna lägre än i TIMSS 2007 och 2003. Areans konservervation testades inte i nationella ämnesprovet men i TIMSS. Den innebär att sammansatta figurers area är oberoende av sammansättningens karaktär. Då emellertid en figur sattes samman, så att en synvilla skapades, sjönk lösningsfrekvensen påtagligt. Således kan konstateras att areabegreppets konservervation inte erfarits tillräckligt av en relativt stor andel svenska elever.

Lösningsmönstren av tre uppgifter analyserades, vilka rörde rektangelbegreppet med tillhörande begrepp. Det mest intressanta var storleken på andelen elever i respektive land, som löste samtliga av uppgifterna. Skillnader finns mellan andelen elever i Sverige å ena sidan och andelen elever i Hong Kong och Taiwan å den andra. Emellertid är skillnaderna inte lika påtagliga som inom området taluppfattning och aritmetik. Förklaringen härtill kan stå att finna i att området geometri traditionellt innehåller mer av begreppslig träning än andra områden inom matematiken. Exempelvis studeras geometriska figurer och deras egenskaper. En kvadrat är ett begrepp och dess egenskaper utgör begreppsattributen. Så geometri studeras även i Sverige med en mer begreppslig inriktning än området taluppfattning och aritmetik. Denna slutsats stöds dessutom av resultatet av läroboksanalyserna.

8 Algebra

Inom området algebra för årskurs 8 i TIMSS 2007 och 2003 testades elevers kunskaper om ekvationer, uttryck, funktioner, formler, koordinatsystem och olikheter. Jämförelser mellan andelar elever, som löst uppgifterna, görs mellan å ena sidan Sverige och å andra sidan Hong Kong och Taiwan. Även analyser av lösningar av uppgifter från det nationella ämnesprovet för årskurs 9 redovisas.

I syfte att avgöra beskaftenheten hos elevernas kunskaper inom algebra har mönster av elevers lösningar av grupper av uppgifter i de tre länderna analyserats. Utifrån de mönster, som då kan iaktas, kan även slutsatser dras om undervisningens utformning. Kapitlet avslutas med en sammanfattning.

8.1 Ekvationer

I det nationella ämnesprovet för årskurs 9 ingick nedanstående ekvation med två likvärdiga versioner. Insamlade elevlösningar, 368 stycken, har analyserats och resultatet redovisas i tabell 8.1 nedan.

ÄP 9 2008 Del B1

5. Lös ekvationen $\frac{x}{5} + 2 = 5$ $\frac{x}{5} + 2 = 5$

Lösningsfrekvensen är förhållandevis hög (79,3 %). Detta kan bero på, att relativt enkla renodlade beräkningsregler kunde tillämpas direkt utan föregående modifieringar.

Tabell 8.1 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, årskurs 9, nationella ämnesprovet, n = 368

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt lösning	292	79,3	9 alt 15
$\frac{x}{3} = 5 - \frac{2}{3}$ alt $\frac{x}{5} = 5 - \frac{2}{5}$	19	5,2	3 alt 1
Övriga manipulativa misstag	16	4,3	6 alt 4
Ej kategoriserade strategier	19	5,2	-
Ingen beräkning utförd	22	6,0	-
Totalt	368	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Ett av de lågfrekventa misstagen var, att istället för att multiplicera ekvationens båda led med samma tal, 3 respektive 5, så divideras det högra ledet med samma tal, så att uppställningen $\frac{x}{3} = \frac{5+2}{3}$ alternativt $\frac{x}{5} = \frac{5+2}{5}$ erhålls. Den slutsats man kan dra av analysen är, att då eleverna direkt tillämpar inlärd procedur, så blir lösningsfrekvensen hög.

I TIMSS 2007 och 2003 förekom också ekvationer, vilka dock var betydligt mer avancerade. För årskurs 8 användes uppgift (M07_05) nedan. Den kräver

bland annat kunskaper om, hur distributiva lagen tillämpas. Det korrekta alternativet var $x = 3$. Distraktorn $x = -3$ kunde fås genom att eleverna gjorde ett teckenfel. Distraktor b) innebar, att 3 inte på ett korrekt sätt multiplicerades in i parentesen samt att ett teckenfel gjordes. Distraktor c) innebar att 3 inte multiplicerades in i parentesen korrekt. I uppgiften erbjöd likhetstecknet inte något problem, eftersom den dynamiska uppfattningen av likhetstecknet är tillräcklig för att lösa uppgiften.

M07_05

$$3(2x - 1) + 2x = 21$$

Vilket värde har x ?

(A) -3

(B) $-\frac{11}{4}$

(C) $\frac{11}{4}$

(D) 3

M032540

Ungefär hälften av de svenska eleverna (50,6 %; 53,2 %) löste ekvationen korrekt. Den mest frekventa distraktorn var c), vilket visar att det var tillämpningen av distributiva lagen, som var det stora problemet.

I Hong Kong och Taiwan hade fler än tre fjärdedelar av eleverna (74,5 %; 83,3 %) löst uppgiften korrekt. Även i dessa länder var distraktorn c) den mest frekventa, även om frekvensen var mindre än i Sverige. Resultatet var att förvänta, eftersom denna typ av kända misstag behandlas systematiskt i undervisningen i dessa två länder.

Ekvationen i (M04_06) förekommer i en problemkontext, där likhetstecknets placering kan utgöra en ytterligare svårighet för eleverna, eftersom den oberoende variabeln befinner sig i vänstra ledet. Speciellt för svenska elever innebär

M04_06

I Zedland anges den totala fraktkostnaden för ett föremål med formeln $y = 4x + 30$, där x är vikten i gram och y är kostnaden i zed. Om man har 150 zed, hur många gram kan man låta frakta?

(A) 630

(B) 150

(C) 120

(D) 30

M042267

detta en extra svårighet. Alternativet 630 var den distraktor, i vilken x och y hade förväxlats. Det visade sig, att de svenska eleverna hade betydande svårigheter, då knappt en fjärdedel (23,2 %) lyckades lösa uppgiften korrekt i TIMSS 2007. Uppgiften ingick inte i TIMSS 2003. Även de två övriga distraktorerna var ungefär lika frekventa som det korrekta alternativet.

I Hong Kong och Taiwan var det en större andel elever (70,5 %; 75,3 %), som löste uppgiften korrekt. De olika distraktorerna var betydligt mindre frekventa där.

I det nationella ämnesprovet i årskurs 9 förekom ytterligare en ekvationsuppgift. Det var en andragsradsekvation, där det testades vilket av multiple-choice-alternativen, som var en rot. Trots att det var en ekvation av andra graden, så efterfrågades inte två rötter utan endast en. Det fanns inte heller någon extra svårighet rörande likhetstecknet.

ÄP 9 2008 Del B1

20.

Alt I Vilket av talen är en lösning till följande ekvation? $x^2 + x - 12 = 0$
 -4 -2 0 2 4

Alt II Vilket av talen är en lösning till följande ekvation? $x^2 + x - 20 = 0$
 -5 -3 0 3 5

I tabell 8.2 nedan presenteras olika kategorier av lösningsstrategier för de två versionerna. I den mest frekventa (40,2 %) identifierades de korrekta lösningarna -4 respektive -5. Det mest frekventa misstaget i den första versionen var, att $4^2 = 8$, $8 + 4 - 12 = 0$. Med detta misstag såg det ut som om $x = 4$ löste ekvationen. I den andra versionen var motsvarande misstag inte tillämpligt, då $5^2 = 10$ skulle ge $10 + 5 - 20 = -5$, vilket då skulle innebära att $x = 5$ inte skulle vara en lösning till ekvationen. Av detta framgår, att de två versionerna inte kan anses vara likvärdiga. En rad andra misstag, som eleverna gjorde, rörde substitutionen av variabeln x .

Tabell 8.2 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, årskurs 9, nationella ämnesprovet, $n = 368$

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt lösning	148	40,2	-4 alt -5
Misstaget $4^2 = 8$, $8 + 4 - 12 = 0$	60	16,3	4
Motsvarande misstag ej tillämbart	42	11,4	5
Övriga alternativ	89	24,2	-
Ej svar	26	7,9	-
Totalt	368	100,0	

* Ej viktade frekvenser

Den slutsats man kan dra utifrån uppgifterna i TIMSS och det nationella ämnesprovet är, att om inga extra svårigheter finns i uppgiften på grund av likhetstecknets placering och om en procedur utan modifiering direkt kan tillämpas på uppgiften, så löser ungefär hälften av de svenska eleverna ekvationer av elemen-

tär karaktär. Betydligt fler elever i Hong Kong och Taiwan löser motsvarande ekvationer.

8.2 Uttryck

Först beskrivs resultatet av analysen av elevers lösningar rörande värdet av uttryck i årskurs 8. Därefter ges motsvarande beskrivning av förenklingar av uttryck. Uppgiften nedan (M04_03) ingick i TIMSS 2007 men inte i TIMSS 2003. Av de svenska eleverna var det en anmärkningsvärt liten andel (10,9 %), som löste uppgiften och valde alternativ 15, vilket gav uttrycket ett korrekt värde.

M04_03

$a = 3$ och $b = -1$.

Vad är värdet av $2a + 3(2 - b)$?

- (A) 15
- (B) 14
- (C) 13
- (D) 9

M042082

En majoritet av eleverna (59,3 %) valde distraktorn 9. Detta beror på, att de inte lärt sig substitution av variabler fullständigt och följaktligen inte kände till att $-b = +1$, om $b = -1$. För att förstå detta på ett grundligt sätt krävs, att begreppet ”motsatta tal” har introducerats i undervisningen. Att döma av resultatet tycks inte detta ha varit fallet i alla svenska klassrum.

En majoritet av eleverna i Hong Kong och Taiwan (69,2 %; 78,4 %) löste uppgiften korrekt. Också i dessa länder var den vanligaste distraktorn 9, vilken dock valdes med lägre frekvenser (17,9 %; 10,9 %).

I det nationella ämnesprovet i årskurs 9 förekom också, att ett uttrycks värde skulle bestämmas. De två versionerna av uppgiften (nedan) var likvärdiga. I denna uppgift fanns inte svårigheten att substituera en variabel, vilken har ett minustecken framför, med ett negativt tal. Variablerna a och b hade båda positiva tecken framför sig i uttrycket.

ÄP 9 2008 Del B1

17.

$a = 3$ $b = -2$ Bestäm värdet av $a(a + 2) + b$

$a = 4$ $b = -3$ Bestäm värdet av $a(a + 1) + b$

Resultatet av analysen av de 373 insamlade elevernas lösningar redovisas i tabell 8.3 nedan. Drygt två femtedelar av eleverna löste uppgiften korrekt och fick värdet 13 respektive 17. Bland de inkorrekt lösningarna märks främst oför-

måga att använda distributiva lagen, att substituera en positiv variabel med ett negativt tal samt att inse vad en variabel framför en parentes har för roll. I några av de ej kategoriserade lösningarna framgick, att eleverna inte visste innebörden av att $a = 3$.

Tabell 8.3 Kategorier som representerar elevernas olika lösningsstrategier, årskurs 9, nationella ämnesprovet, $n = 373$

Kategorier	Frekvens	Relativ* frekvens (%)	Typiska svar
Korrekt lösning, $3 \cdot 3 + 6 - 2$, $4 \cdot 4 + 4 - 3$	152	40,8	13 alt 17
Inkorrekt additiv, $3 \cdot 3 + 6 + 2$, $4 \cdot 4 + 4 + 3$	19	5,1	17 alt 23
Inkorrekt distributiv, $3 \cdot 3 + 2 - 2$, $4 \cdot 4 + 1 - 3$	35	9,4	9 alt 14
Inkorrekt, $3 + 3 + 2 - 2$, $4 + 4 + 1 - 3$	31	8,3	6 alt 6
Inkorrekt, $3 + 2 - 2$, $4 + 1 - 3$	14	3,8	3 alt 2
Inkorrekt, $3 + 3 + 2 + 2$, $4 + 4 + 1 + 3$	7	1,9	10 alt 12
Ej kategoriserat	75	20,1	-
Ej svar	40	10,7	-
Totalt	373	100,0	

* Ej viktade frekvenser

En andel elever (10,7 %) avstod från att svara på uppgiften. Det förefaller uppenbart, att en relativt stor andel av de svenska eleverna inte har utvecklat full förståelse för variabelbegreppet och därför inte kunnat lösa uppgiften. Att förhållandevis fler elever löste uppgiften i nationella ämnesprovet beror till största delen på, att den inte innehåller den svårighet, som fanns i TIMSS-uppgiften, nämligen substitution av negativa variabler. Flertalet elever i Hong Kong och Taiwan uppvisade däremot en mer utvecklad förståelse av variabelbegreppet.

Nästa två uppgifter handlar om förenklingar av additiva uttryck och ingick i TIMSS 2007 men inte i 2003. Den första uppgiften (M02_06) är relativt enkel, eftersom objektsmodellen direkt kan tillämpas utan modifieringar. Det korrekta alternativet var $3x + 5y$. Distraktorerna representerar olika kända begreppsliga misstag. Om elever exponerade uppfattningen icke-symbolisk representation, så gav det resultatet 9, eftersom endast koefficienterna framför variablerna beaktades. I övrigt ignorerades bokstavsbeteckningarna. Distraktorn $9xy$ erhöles om samtliga koefficienter beaktades men därefter kompletterades med xy för säkerhets skull. Distraktorn $4 + 5y$ kom av att $4x - x$ blev 4. Däremot blev $7y - 2y = 5y$.

M02_06

Vilket alternativ motsvarar $4x - x + 7y - 2y$?

- (A) 9
- (B) $9xy$
- (C) $4 + 5y$
- (D) $3x + 5y$

M042199

En klar majoritet av de svenska eleverna (61,0 %) löste uppgiften korrekt. Den mest frekventa distraktorn (18,5 %) var $4 + 5y$.

Nästan samtliga elever i Hong Kong och Taiwan löste uppgiften (90,5 %; 90,0 %). Distraktorerna var lågfrekvent valda. Objektsmodellens direkta tillämpning förklarar den relativt sett höga lösningsfrekvensen i Sverige. En begreppsligt inriktad undervisning angriper och bearbetar de exponerade misstagen, som distraktorerna representerar.

I nästa förenklingsuppgift (M04_07) testas både distributiva lagen och negativa parentesuttryck i TIMSS 2007. Inte heller denna uppgift ingick i TIMSS 2003. Knappt en femtedel av de svenska eleverna (18,9 %) löste uppgiften korrekt och valde alternativet $3y$. Distraktorn y , som representerar misstaget att inte byta tecken i den negativa parentesen, valdes av mer än en fjärdedel av eleverna (27,8 %). Den minst frekventa distraktorn (13,5 %) var $4x + 3y$ och erhöles då 2:an korrekt multiplicerats in i den första parentesen men då de två negativa tecknen felaktigt ändrats till positiva. Distraktorn $3x + 5y$ var mest frekvent (32,5 %) och representerade misstaget att inte multiplicera y med 2 i den första parentesen.

Eleverna i Hong Kong och Taiwan lyckades bättre, men ändå inte helt tillfredställande. I Hong Kong var lösningsfrekvensen inte så hög, drygt hälften av eleverna (56,6 %) hade löst uppgiften korrekt. Ungefär en femtedel av eleverna (19,3 %) hade valt distraktorn y och de andra två distraktorerna tillsammans av drygt en femtedel (24,1 %).

M04_07

Vilket av alternativen är lika med $2(x + y) - (2x - y)$?

- (A) $3y$
- (B) y
- (C) $4x + 3y$
- (D) $4x + 2y$

M042239

I Taiwan var situationen något bättre, där nästan tre fjärdedelar av eleverna (71,9 %) hade löst uppgiften korrekt. Även där var y den mest frekventa distraktorn (14,5 %). De andra två distraktorernas sammantagna frekvenser var inte försumbara (13,7 %).

Även om lösningsfrekvenserna i Hong Kong och Taiwan är högre, så finns uppenbarligen de frekventa misstagen även där bland eleverna.

Nästa uppgift (M05_02) för årskurs 8 i TIMSS 2007 och 2003 handlar om en multiplikativ förenkling. Det korrekta alternativet var $6a^3$, som valdes lågfrekvent av de svenska eleverna i TIMSS 2007 och 2003 (18,0 %; 13,2 %). En viss förbättring kan konstateras mellan 2007 och 2003. Distraktorn $6a^2$ representerar ett misstag, som kan bero på, att exponenten över a i $3a$ inte är utskriven. Det står egentligen $3a^1$. Hade eleverna insett detta, hade en procedurrell tillämpning av potenslagarna inneburit, att exponenterna adderats till 3. Distraktorn $6a^2$ var mycket frekvent vald av de svenska eleverna (46,4 %; 52,6 %).

I Hong Kong och Taiwan var lösningsfrekvenserna väsentligt högre (70,4 %; 71,1 %) och därmed det bland svenska elever frekventa misstaget mycket mindre frekvent (16,0 %; 17,3 %).

M05_02

$$2a^2 \cdot 3a =$$

- (A) $5a^2$
- (B) $5a^3$
- (C) $6a^2$
- (D) $6a^3$

M032198

De andra två distraktorerna $5a^2$ och $5a^3$, som representerar en additiv syn på förenklingen, valdes vardera av ungefär en tredjedel av de svenska eleverna (30,7 %; 31,3 %). I Hong Kong och Taiwan valde en dryg tiondel (13,5 %; 11,6 %) dessa två distraktorer.

Det frekventa misstaget, som svenska elever gjorde, hade med all säkerhet diskuterats i de två ostasiatiska länderna, eftersom misstag utnyttjas i undervisningen på ett mer systematiskt sätt.

8.3 Funktioner

Funktioner testades med tre olika uppgifter i TIMSS 2007 och 2003 för årskurs 8. I den första uppgiften (M05_10) finns ett samband mellan de två variablerna x och y .

M05_10

Tabellen nedan visar ett samband mellan x och y .

x	1	2	3	4	5
y	1	3	5	7	9

Vilken av följande ekvationer uttrycker detta samband?

- (A) $y = x + 4$
- (B) $y = x + 1$
- (C) $y = 2x - 1$
- (D) $y = 3x - 2$

M032163

Det korrekta alternativet var $y = 2x - 1$, som ungefär en tredjedel av de svenska eleverna (32,1 %; 35,9 %) valde. I Hong Kong och Taiwan löste mer än två tredjedelar (68,3 %; 75,5 %) uppgiften korrekt. Den mest frekventa distraktorn i samtliga länder var $y = x + 1$. I Sverige valde ungefär en fjärdedel (26,9 %; 24,6 %) den i TIMSS 2007 och 2003, medan en något mindre andel (18,8 %; 15,0 %) valde den i Hong Kong och Taiwan. En femtedel av eleverna i Sverige i TIMSS 2007 (20,0 %) försökte inte lösa uppgiften, medan motsvarande andel var mindre i TIMSS 2003 (8,5 %). Detta ska inte tolkas som en påtaglig försämring, då den totala frekvensen av valda distraktorer var mindre 2007 (47,9 %) jämfört med 2003 (55,6 %).

Ett typiskt misstag tycks vara, att eleverna inte kontrollerade, om alla talpar uppfyllde villkoret utan nöjde sig med att finna ett.

Nästa uppgift (M07_04) är också en typ av funktionellt samband. Regeln, som genererar talföljden, ska väljas ut bland alternativen. Misstaget att inte kontrollera samtliga par av tal som i föregående uppgift kan misstänkas ha haft betydelse även vid lösningen av denna uppgift. För att sortera bort ett alternativ räcker det ju med att visa, att ett par av talen inte uppfyller villkoret. Det kan ju då vara lätt att övergeneralisera detta till en procedur för att välja korrekt alternativ och då kontrollera endast ett par av talen i följd. Distraktorn a) uppfyller inte villkoret för något par av talen och valdes följdenligt lågfrekvent i TIMSS 2007 i de tre studerade länderna. Alternativ b) som var det korrekta, valdes frekvent i samtliga dessa länder, i Sverige av nästan två tredjedelar av eleverna (62,9 %; 64,7 %) och i Hong Kong och Taiwan av ännu större andelar (83,9 %; 84,9 %).

M07_04

2, 5, 11, 23, ...

Om man startar med 2, vilken av följande regler skulle ge vart och ett av talen i talföljden ovan?

- (A) Addera 1 till föregående tal och multiplicera sedan med 2.
- (B) Multiplicera föregående tal med 2 och addera sedan 1.
- (C) Multiplicera föregående tal med 3 och subtrahera sedan 1.
- (D) Subtrahera 1 från föregående tal och multiplicera sedan med 3.

M032273

En av de mera frekventa distraktorerna c) (15,9 %; 15,9 %; 8,2 %; 5,8 %) innehöll en regel, som fungerade på de två första talen i följd, 2 och 5, men inte på de övriga. Regeln i distraktorn d), som inte uppfyller villkoret för några par av tal i följd, var lågfrekvent i alla de tre länderna.

Eftersom misstag behandlas systematiskt i de ostasiatiska länderna, har troligen misstaget att kontrollera endast ett par av talen också varit uppe till behandling i undervisningen mer återkommande. Det kan vara detta som gör, att distraktorn c) valts mindre frekvent i Hong Kong och Taiwan.

I den sista uppgiften (M04_08) för årskurs 8 i TIMSS 2007 ska avgöras vilken punkt, som befinner sig på en linje. För att kunna avgöra detta är det nödvändigt att känna till, att koordinaterna för punkten ska satsifiera linjens ekvation.

Vilken punkt återfinns på linjen $y = x + 2$?

- Ⓐ (0; -2)
- Ⓑ (2; -4)
- Ⓒ (4; 6)
- Ⓓ (6; 4)

M042238

Knappt en fjärdedel av de svenska eleverna (23,3 %) löste uppgiften korrekt c), medan drygt hälften (51,6 %; 63,4 %) gjorde det i Hong Kong och Taiwan. En av distraktorerna, a) var lika frekvent i Hong Kong och Taiwan (21,0 %; 19,7 %) som i Sverige (19,0 %). Här har eleverna kastat om x och y och fått $0 = -2 + 2$. Distraktorn b) var i Sverige särskilt frekvent (34,7 %) jämfört med det korrekta alternativet c). Orsaken kan vara en övergeneralisering från ekvationslösning, då det ena ledet blir +4 och det andra -4. Denna distraktor b) var inte heller direkt lågfrekvent i Hong Kong och Taiwan (15,5 %; 11,7 %). I Hong Kong var distraktorn d) mer frekvent (11,9 %) än i Sverige och Taiwan (6,3 %; 5,2 %) och representerar en omkastning av x och y . En relativt stor andel (16,7 %) i Sverige försökte inte lösa uppgiften.

Det kan konstateras, att de misstag eleverna i Sverige gjorde också förekom i Hong Kong och Taiwan, vid några tillfällen till och med mer frekvent.

8.4 Formler

Formler testades i tre olika uppgifter för årskurs 8 i TIMSS 2007 och i två för TIMSS 2003. I den första uppgiften (M04_04) beskrivs en multiplikativ jämförelsesituation. Drygt hälften av de svenska eleverna (52,6 %) löste uppgiften korrekt och valde alternativet xy meter. Eleverna i Hong Kong och Taiwan (85,6 %; 79,5 %) lyckades något bättre. Enligt ett mönster från tidigare uppgifter (exempelvis M01_11B i avsnitt 7.1, s. 109), så har svenska elever inte lika frekventa erfarenheter av multiplikativa jämförelsesituationer som av additiva eller subtraktiva. Mot denna bakgrund är det logiskt, att distraktorn $x + y$ meter valdes av en fjärdedel av eleverna i Sverige (24,2 %) och av en förhållandevis låg andel i Hong Kong och Taiwan (6,1 %; 9,3 %).

Distraktorn x/y var ungefär lika frekvent i samtliga länder (6,4 %; 4,6 %; 6,7 %). Däremot var distraktorn y/x mer frekvent i Sverige (13,8 %) än i de andra två länderna (3,8 %; 4,5 %). Detta alternativ beskriver en innehållsdivision, som grundar sig på misstaget, att det andra röret skulle vara y meter långt.

Det som kan ha varit utslagsgivande för lösningen av denna uppgift är erfarenheter av multiplikativa jämförelser i samband med behandling av proportionalitetsbegreppet.

M04_04


 x meter

Det första röret är x meter långt. Det andra röret är y gånger så långt som det första.

Hur långt är det andra röret?

- Ⓐ xy meter
- Ⓑ $x + y$ meter
- Ⓒ $\frac{x}{y}$ meter
- Ⓓ $\frac{y}{x}$ meter

M042088

I nästa uppgift (M07_06) för årskurs 8, som rör formler, representerar n ett specifikt okänt tal. Detta är en uppfattning av variabelbegreppet, som de flesta elever kan vara bekanta med, då de frekvent stött på variabler i ekvationskontexter. Problemet i uppgiften representerar en subtraktiv jämförelsesituation, som en stor andel elever verkar ha erfarenhet av, då nästan två tredjedelar (60,9 %; 63,2 %) löste uppgiften korrekt i TIMSS 2007 och 2003. Eleverna i Hong Kong var inte särskilt mycket bättre (67,6 %), vilket däremot eleverna i Taiwan (78,4 %) var. Alternativet $n - 3$, var det korrekta. Däremot var $n + 3$ en frekvent distraktor inte bara i Sverige (19,5 %; 19,0 %) utan än mer i Hong Kong (26,3 %). I Taiwan var frekvensen något lägre (17,4 %). Distraktorn $3n$ representerar en multiplikativ jämförelse och var relativt lågfrekvent vald i Sverige (7,6 %; 7,7 %) men något mindre frekvent i de två andra länderna (3,3 %; 1,6 %). Distraktorn $3 - n$ var generellt lågfrekvent.

M07_06

Hasse har 3 jackor mer än Anna. Om n är antalet jackor som Hasse har, hur många jackor har då Anna uttryckt i n ?

- Ⓐ $n - 3$
- Ⓑ $n + 3$
- Ⓒ $3 - n$
- Ⓓ $3n$

M032698

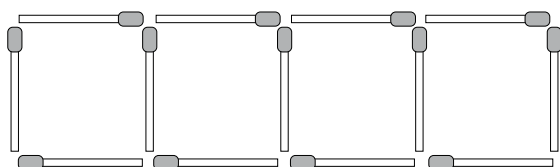
Eleverna i Hong Kong och Taiwan har som framgått av tidigare uppgifter mer erfarenhet av multiplikativa jämförelser och kan därför ha lättare att inse, att situationen i uppgiften inte är av denna beskaffenhet.

Den tredje uppgiften (M05_03) rörande formler för årskurs 8 handlar om ett mönster och om att finna formeln för mönstret samt att därefter förutsäga, hur mönstret ser ut med 73 tändstickor.

En liten andel svenska elever i TIMSS 2007 och 2003 (16,0 %; 16,8 %) löste uppgiften korrekt medan en än mindre andel löste den i Hong Kong (12,9 %) i TIMSS 2007. I Taiwan däremot löste nästan tre fjärdedelar av eleverna (60,4 %) den korrekt. De andelar elever, som inte försökte lösa uppgiften, var betydligt större i Sverige (17,6 %; 14,4 %) än i de andra två länderna, där i princip alla försökte.

Att döma av resultatet så tycks inte eleverna i Hong Kong haft så särskilt frekventa erfarenheter av mönstertänkande och av formler, som beskriver mönstren.

M05_03



I figuren har 13 tändstickor använts till att lägga 4 kvadrater i en rad. Hur många kvadrater i en rad kan man lägga på detta sätt om man använder 73 tändstickor? Visa hur du kom fram till svaret.

Svar: _____

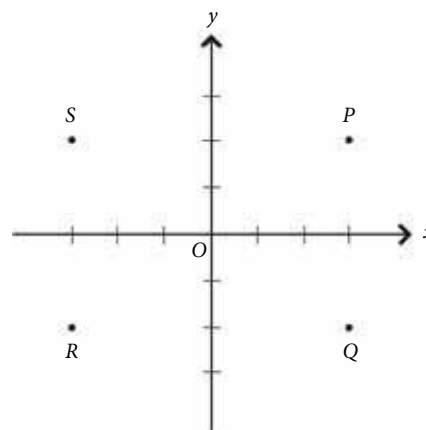
M032640

8.5 Koordinatsystem

En uppgift (M02_11) användes för att testa elevers kunskaper om koordinatsystem i TIMSS 2007 för årskurs 8. Uppgiften förekom inte i TIMSS 2003. Den bestod i att avgöra vilken punkt, som hade de i uppgiften angivna koordinaterna. Punkterna var symmetriskt placerade med avseende på y -axeln och x -axeln, vilket gör att y -koordinaten bara kan vara -2 eller $+2$ och x -koordinaten -3 eller $+3$. Det vanliga misstaget att kasta om ordningen på koordinaterna, vilket exponerades av elever i flera tidigare uppgifter, var därför inte möjligt att göra i just denna uppgift. Så uppgiften tillät inte att ett sådant misstag exponerades. Däremot krävdes av eleverna att kunna diskriminera mellan en positiv och negativ koordinat.

Det korrekta alternativet Q valdes av knappt hälften (45,9 %) av de svenska eleverna medan inte långt ifrån samtliga elever i Hong Kong och Taiwan (86,4 %; 89,0 %) löste uppgiften korrekt. Det vanligaste misstaget i länderna (22,0 %; 6,6 %; 4,2 %) var att välja punkten R, som hade koordinaterna $(-3; -2)$. Även om frekvensen var betydligt större i Sverige än i de två andra länderna, så visar det dock på att samma typ av misstag förekommer i de tre länderna. Det är emellertid inte förvånande, att frekvensen är lägre i de två ostasiatiska länderna, där man medvetet tar upp misstag i undervisningen för att eleverna lättare ska kunna undvika dem. Även punkten P valdes mer frekvent i Sverige (15,1 %) än i de andra länderna (3,7 %; 4,0 %).

M02_11



Vilken av punkterna har koordinaterna $(3; -2)$?

- (A) P
- (B) Q
- (C) R
- (D) S

M042148

Att undvika misstaget att förväxla tecknen på koordinaterna kan ha behandlats i undervisningen i Hong Kong och Taiwan, vilket kan ha varit utslagsgivande för uppgiftens lösningsfrekvenser.

8.6 Olikheter

Först kan konstateras att olikheter, som nästa uppgift (M01_04) i TIMSS 2007 och 2003 för årskurs 8 handlar om, inte ingår i kursplanen för grundskolan i Sverige. Trots detta är lösningsfrekvenserna inte anmärkningsvärt låga för de svenska eleverna (25,9 %; 22,5 %). Detta torde bero på, att det dels är möjligt att testa några värden genom substitution och på så sätt hitta det korrekta alternativet $x > 24$ och att det dels är möjligt att transferera lösningsstrategier från ekvationslösning. Eleverna i Hong Kong och Taiwan hade relativt sett låga lösningsfrekvenser, knappt respektive drygt två tredjedelar (58,4 %; 67,0 %). De

i Sverige frekventa distraktorerna $x < 24$ och $x > \frac{3}{8}$ (29,2 %; 29,9 %) var också frekventa i Hong Kong (16,1 %; 14,3 %) och i Taiwan (13,5 %; 17,4 %) även om i mindre utsträckning. Distraktorn $x > 5$, var ungefär lika frekvent i Sverige (5,5 %) som i Hongkong (7,0 %). Kategorin ej svar var som vanligt högre (7,6 %) i Sverige.

M01_04

$\frac{x}{3} > 8$ är detsamma som

- (A) $x < 5$
- (B) $x < 24$
- (C) $x > \frac{8}{3}$
- (D) $x > 5$
- (E) $x > 24$

M022050

För ett innehåll, som inte ingår i kursplanen i Sverige, var resultatet för svenska elever bättre än förväntat. Det är alltså möjligt, att en viss transfer från ekvationer till olikheter förekommit, då några stora modifieringar av lösningsstrategier inte erfordrades. Men även i Hong Kong och Taiwan var lösningsfrekvenserna inte övertygande höga.

8.7 En bild av elevernas algebraiska kunskaper

I detta avsnitt analyseras lösningsmönstren rörande samtliga uppgifter från block 4. Uppgifterna är "Värdet av uttrycket $2a + 3(2 - b)$ ", "Det andra rörets längd i förhållande till det första", "Fraktkostnaden $y = 4x + 30$ ", "Ekvivalent uttryck till $2(x + y) - (2x - y)$ " och "Punkt på linjen $y = x + 2$ ".

Det är extremt ovanligt (0,7 %) att elever i Sverige TIMSS 2007 löste samtliga fem uppgifter korrekt. Det vanligaste mönstret är, att svenska elever (38,8 %) löste en av uppgifterna korrekt. Det näst vanliga mönstret är att inte ha löst någon uppgift korrekt (24,2 %) och det därefter mest frekventa mönstret är att ha löst två av uppgifterna korrekt (21,6 %). Att undervisningen i algebra haft en procedurinriktad karaktär, torde det inte råda någon tvekan om. Det är detta, som visar sig i elevernas lösningsmönster.

Eleverna i Hong Kong uppvisar ett helt annat lösningsmönster. En dryg fjärdedel (27,6 %) har löst samtliga uppgifter korrekt. Det näst vanligaste mönstret (12,8 %) är, att de fyra första uppgifterna lösts korrekt men att den femte uppgiften inte lösts korrekt. För att lösa den femte uppgiften krävs ju utöver kunskaper om variabelbegreppet, att eleven känner till, hur man testar om en punkt

ligger på en linje. Men även i Hong Kong finns elever, som inte manifesterar samvariationen i lösningsmönstren. Dessa elever har det näst vanligaste mönstret (11,3 %) att lösa två av de fem uppgifterna korrekt och inga av de andra tre. Dessa elever kan därför antas ha missat den begreppsliga kopplingen inom kunskapsområdet algebra. Det var heller inte direkt ovanligt, att elever (9,5 %) endast löste en av uppgifterna korrekt. Sammantaget så finns det alltså i Hong Kong en stor andel elever, som tydligt verkar se det begreppsliga sambandet mellan uppgifterna. Men det finns även en mindre andel, som har uppenbara svårigheter att se dessa.

Eleverna i Taiwan däremot uppvisade ett delvis annat lösningsmönster. En ganska stor andel elever (46,1 %) hade löst samtliga uppgifter korrekt. Den näst största andelen (9,1 %) var de, som hade löst alla uppgifter utom den sista, som rör en punkt på en linje. De elever, som löst endast en av de fem uppgifterna, var en förhållandevis liten andel (5,3 %). Den andel, som löst två av de fem uppgifterna, var lika stor (5,3 %).

Slutsatsen från analysen av lösningsmönstren är, att samvariationen uppvisades av störst andel elever i Taiwan, följt av Hong Kong medan det var mycket få elever i Sverige som uppvisade någon samvariation. I samtliga länder fanns dock grupper av elever, som inte visade någon samvariation i sina lösningsmönster eller endast en mycket liten sådan. Utifrån undervisningens inriktning på begreppslig förståelse i Hong Kong och Taiwan och på tillämpning av procedurer i Sverige kan slutsatsen dras, att det är kunskaper generade av dessa olika inriktningar av undervisningen, som eleverna visar upp.

8.8 Sammanfattning

Den slutsats man kan dra utifrån resultatet på analysen av elevlösningarna är, att förståelsen av variabelbegreppet har central betydelse för hela algebraområdet.

Ungefär hälften av de svenska eleverna löste ekvationer av elementär karaktär i TIMSS och i det nationella ämnesprovet, förutsatt att det dels inte fanns några tillkommande svårigheter såsom likhetstecknets placering och dels att en procedur direkt kunde tillämpas på uppgiften. Betydligt fler elever i Hong Kong och Taiwan löste dock motsvarande ekvationer även om modifieringar av lösningsstrategierna krävdes.

Både i TIMSS och i det nationella ämnesprovet förekom uppgifter om att beräkna värdet av uttryck. En majoritet av de svenska eleverna behärskade detta, men en påtaglig svårighet för dem var beräkningen av en negativ variabels värde, då den motsvarande positiva variabeln var negativ. De kände inte till, att om variabeln $b = -1$, så var $-b = +1$, vilket eleverna i de två ostasiatiska länderna i betydligt större omfattning hade kunskap om.

Vid förenklingar av uttryck var negativa parenteser och distributiva lagen de svårigheter, vilka verkade vara störst bland svenska elever. Motsvarande svårigheter fanns också bland eleverna i Hong Kong och Taiwan men i mindre utsträckning.

En uppenbar svårighet att förstå var, att om ett samband ska representera en funktionstabell eller en talföljd, så måste sambandet gälla för samtliga par av tal. Denna svårighet exponerade samtliga elever i de tre länderna, men de svenska eleverna hade störst problem med detta. Att avgöra om en punkt finns på en linje eller ej utifrån kunskap om punktens koordinater vållade eleverna problem. En av distraktorerna valdes nästan lika frekvent i de tre länderna.

Från tidigare uppgifter har framkommit, att svenska elever inte haft erfarenheter av multiplikativa jämförelsesituationer men desto mer av additiva och subtraktiva sådana. Detta bekräftades av resultatet på de två formelproblemen. Mönstertänkandet i det tredje problemet misslyckades eleverna i Hong Kong med. I Sverige gick det bättre och i Taiwan betydligt bättre. Så eleverna i Hong Kong har uppenbarligen inte de erfarenheter av mönstertänkande, som krävdes för att lösa uppgiften korrekt.

Det bättre resultatet i de två ostasiatiska länderna avseende koordinatsystem var inte förvånande, då det misstag, som kunde göras, med all sannolikhet systematiskt tagits upp i undervisningen där, något som inte skett i Sverige. Olikheter, som inte ingår i den svenska kursplanen, testade på ett utmärkt sätt elevers förmåga att transferera lösningsprocedurer från ekvationer till olikheter. Eftersom transfer tränas systematiskt i Hong Kong och Taiwan lyckades givetvis eleverna bättre där.

Resultatet av analysen av lösningsmönster visar, att i princip inga svenska elever löst alla de fem uppgifterna i gruppen, som rör variabelbegreppet, och inga hade heller löst fyra av uppgifterna. I Hong Kong hade drygt en fjärdedel av eleverna löst samtliga uppgifter och en knapp fjärdedel fyra av uppgifterna. Nästan hälften av eleverna i Taiwan hade löst samtliga uppgifter och nästan en femtedel fyra av uppgifterna. Detta bekräftar, att den målmedvetna konceptuella undervisningen, där misstag behandlas och transfer tränas systematiskt, ger resultat framför en undervisning där procedurer appliceras på mer tillrättalagda problem.

Del 3

Diskussion och referenser

Del 3 • Diskussion och referenser

I diskussionskapitlet presenteras först studiens centrala resultat, som framför allt tar upp skillnaden mellan en undervisning inriktad på inlärnin g av procedurer och en undervisning inriktad på förståelse av matematiska begrepp. Svenska elever tycks ha öar av isolerad kunskap. Exempelvis så ses procent, likformighet, skala, hastighetsproblem, recept, andel och förhållande inte som yttringar av det gemensamma begreppet proportionalitet utan som isolerade kontexter. Eleverna i Hong Kong och Taiwan har däremot mer generell kunskap som knyts ihop av centrala matematiska begrepp.

Detta resultat relateras till tidigare forskning och bilden bekräftas. Transfer, som är önskvärt för att överföra kunskaper från ett sammanhang till ett annat, kan också ha nackdelar då kunskaper som inte ska transfereras gör det. Detta leder till övergeneraliseringar som inte är önskvärda. Exempelvis kan elever erfara att addition sker med talen ställda i rak högerkant. Detta gäller emellertid inte decimaltal med olika antal decimaler. Elevers misstag kan ofta härledas till olämplig användning av begreppsmodeller som exempelvis vid inkorrekt addition av tal i bråkform.

Slutligen redovisas studiens begränsningar, argumentationen för att syftet nåtts samt lämplig framtida forskning i ljuset av denna studies resultat.

Det avslutande kapitlet innehåller referenser.

Läsanvisning

Lärare och lärarutbildare uppmanas att framför allt läsa sammanfattningen av det centrala resultatet, avsnitt 9.1, samt resultatets relation till tidigare forskning, avsnitt 9.2. Övriga avsnitt kan läsas mer kursivt.

9 Diskussion

I diskussionskapitlet avhandlas först det centrala resultatet, därefter relateras detta resultat till tidigare relevant forskning. Vidare diskuteras studiens begränsningar, där reliabilitet och validitet bedöms, vilket följs av en argumentation för att studiens syfte har nåtts. Slutligen ges förslag på framtida forskning i ljuset av denna studies resultat.

9.1 Det centrala resultatet

Det centrala resultatet visar att en konceptuellt inriktad undervisning, där transfer medvetet tränas och där misstag systematiskt bearbetas i undervisningen, ger resultat avseende elevernas prestationer. En avgörande aspekt i en konceptuell undervisning är att de särskiljande attributen av ett begrepp lättare erfars genom variation av kontexten. Eleverna kan då lättare avgöra vilka attribut, som tillhör själva begreppet och inte är en del av kontexten. Den i flera västländer förhärskande procedurinriktade undervisningen, å andra sidan, karakteriseras av att procedurer är strikt kopplade till specifika kontexter. Detta gör att en variation av kontexten i princip inte förekommer. Bristen på sådan variation gör att eleverna får svårt att transferera sina lösningsprocedurer till nya kontexter. I de fall då uppgifterna tillåter en direkt tillämpning av inlärd procedurer, så lyckas de svenska eleverna nå samma resultat som eleverna i Hong Kong och Taiwan.

Många av de misstag de svenska eleverna gjorde är kända från forskningen sedan tidigare. Ett exempel på ett sådant misstag vid addition av tal i bråkform är att både täljare och nämnare adderas. Ett annat exempel är areabegreppets konservation vid sammansättning av geometriska figurer. Flera av de kända misstagen var inte lika frekventa i Hong Kong och Taiwan, något som kan bero på den systematiska träningen i att just undvika dem.

Analysen visar att en relativt liten andel svenska elever löser grupperna av uppgifter som har samma begreppsliga inriktningar. Denna andel ska jämföras med andelen elever i Hong Kong och Taiwan, som var påtagligt större. Det tycks vara mer slumpmässigt om en elev kommer ihåg en lämplig procedur för att lösa en viss uppgift. Eleverna saknar de begreppsliga kunskaper som skulle kunna göra att en procedur skulle kunna modifieras och blir mer generellt tillämpbar i olika kontexter. Denna brist gör att transfer bara kan ske sporadiskt. Således är beskaffenheten av de svenska elevernas kunskaper ett typiskt utfall av att undervisning och läromedel är inriktade på inläring av procedurer med tillämpning i ett begränsat antal kontexter.

Med traditionella diagnostiska prov kan inte den matematiska kunskapens beskaffenhet, vilken eleverna exponerat i sina lösningar, fångas med tillräcklig precision. Om dessa prov, på samma sätt som undervisningen, har en procedurrell inriktning, så kommer eleverna att kunna lösa uppgifterna och allt verkar vara i sin ordning. Konsekvensen blir då att lärarna inte ges möjlighet att upptäcka vilken matematisk förståelse eleverna behöver utveckla eller förändra.

9.2 Resultatet i relation till tidigare forskning

Nedan diskuteras först skillnader i lösningsmönster mellan de svenska eleverna å ena sidan och eleverna i Hong Kong och Taiwan å andra sidan. Eftersom transferbegreppet visat sig vara centralt för att förklara skillnader i lösningsfrekvenser, så analyseras dess roll i det andra avsnittet. Slutligen redovisas ett antal begreppsmodellens inverkan på elevprestationerna.

9.2.1 Skillnader i lösningsmönster

Eleverna i de tre länderna Sverige, Hong Kong och Taiwan, som deltog i TIMSS 2007 och för de svenska elevernas del även i TIMSS 2003 samt i det nationella ämnesprovet för årskurs 9, uppvisade skillnader i lösningsmönster, inte bara på enskilda uppgifter utan också på grupper av uppgifter, uppgifter med ett begrepp som den gemensamma kärnan fast i olika kontexter. Skillnaderna i lösningsmönster kan förklaras med de skilda inriktningarna av undervisningen, som Stevenson och Stigler (1992) samt Stigler och Hiebert (1999) funnit vid analyser av observationer av undervisningen i Tyskland och USA och i flera ostasiatiska länder. Speciellt kan noteras skillnader i behandlingen av begrepp och av elevers misstag samt den medvetna träningen av transfer av kunskaper till obekanta kontexter. En sådan konceptuellt inriktad undervisning visade sig alltså ge fördelar jämfört med en procedurellt inriktad. Nackdelarna med den procedurellt inriktade undervisningen har förutom Stevenson och Stigler (1992) samt Stigler och Hiebert (1999) även Whitehead (1948) och Ball, Lubienski och Mewborn (2001) beskrivit. Resultatet i denna studie bekräftar inte bara deras beskrivningar utan också de resultat Rittle-Johnson och Wagner Alibali (1999) samt Bentley (2008a) kommit fram till tidigare.

Även de analyser i samband med TIMSS-studier, som tidigare gjorts av skillnader i läromedlens innehåll (Stodolsky, 1988; Schmidt, McKnight & Raizen, 1997; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang & Wiley, 1997a; Schmidt, McKnight, Valverde, Houang & Wiley, 1997b; Haapasalo, 2003), bekräftas av de funna skillnaderna i lösningsmönstren i denna studie, i vilken kan konstateras, att resultatet både indirekt och direkt överensstämmer med tidigare forskning inom området.

9.2.2 Transfer och övergeneraliseringar

Transfer av kunskap från ett område eller sammanhang till ett annat är av avgörande betydelse för att förklara resultatetskillnaderna mellan de Hong Kong och Taiwan å ena sidan och Sverige å den andra. Rittle-Johnson och Wagner Alibali (1999) menade, att konceptuell kunskap utgjorde ett slags facit för att modifiera procedurer till nya situationer. Detta facit gjorde, att sådana modifierade procedurer, som inte överensstämde med begreppen, kunde sorteras bort. Bransford (1979) hävdade, att det fanns ett nära samband mellan förståelse av ett begrepp och att transferera kunskap för lösa problem i obekanta situationer. Om procedurer tränades systematiskt i flera principiellt olika kontexter, så menade Delazer (2003) och Shepard (2001), att eleven kan utveckla en metakognitiv procedur, som reglerar, hur modifieringen ska gå till. Utan en sådan medveten träning är det svårt att från procedurell kunskap generera konceptuell (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Bentley, 2008a).

I studiens resultat rörande uppgifter om hastighet och procent fanns exempel på utebliven transfer. Uppgifterna inom dessa båda områden kunde lösas med

en mer eller mindre direkt tillämpning av procedurer. De svenska elevernas lösningsfrekvenser var högre eller i paritet med elevernas i de två ostasiatiska länderna. Emellertid i de andra uppgifterna, som också testade proportionalitet, så var de svenska elevernas lösningsfrekvenser betydligt lägre än motsvarande i Hong Kong och Taiwan. Resultatet indikerar, att de flesta svenska elever inte insett, att hastigheter och procentsatser är proportionalitetskonstanter. Både hastighets- och procentproblemen är exempel på tillämpningar av proportionalitetsbegreppet. Så för huvuddelen av de svenska eleverna, hade ingen transfer ägt rum, medan transfer däremot hade tränats på ett mer målmedvetet sätt i Hong Kong och Taiwan.

Elevers generering av metakognitiva regler var ibland framgångsrika men kunde trots detta leda till ett misslyckat resultat. Stavy och Tirosh (2000) fann ju, att erfarenhetsbaserade regler från ett innehållsområde överfördes direkt till andra områden, där regeln egentligen inte hörde hemma. Detta ledde därför till att resultaten blev inkorrekta. En sådan övergeneralisering visade sig ha stark prediktiv förmåga och kunde förklara en stor del av elevernas misstag.

Vid multiplikation av tal i bråkform så ska ju både täljare och nämnare multipliceras. Detta förhållningssätt kan sedan ha övergeneraliserats till att gälla även addition av tal i bråkform och då lett till att både täljare och nämnare adderas. Misstaget var frekvent i TIMSS 2007 och 2003, då över hälften av de svenska eleverna gjorde denna övergeneralisering.

Som beskrivits i forskningsöversikten kan procedurell kunskap bara undantagsvis generera konceptuell kunskap (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Bentley, 2008a). Med tanke på den svaga konceptuella profil, som de svenska elevernas kunskaper visat sig ha, så är det inte förvånande, att uppgifter, som kan lösas med en direkt tillämpning av en procedur, har relativt höga lösningsfrekvenser. Detta resultat bekräftar också Giaquintos (1995) påstående, att procedurer kan läras utan förståelse.

Som Baroody (1987) påpekat, bör kärnfulla matematiska principer användas i undervisningen för att knyta ihop kunskapsdomäner och kontexter. Ma (1999) fann, att sådana principer används mer frekvent i Kina och kan utgöra en metakognitiv struktur, som på en övergripande nivå beskriver procedurers modifieringar så att de kan tillämpas i olika kontexter och inte bara i en procedurspecifik kontext. Inget i denna studies resultat motsäger Mas resultat. Det finns all anledning att anta, att en medveten undervisning om kärnfulla matematiska principer kan vara en bidragande orsak till skillnaderna i resultat mellan Sverige och de två ostasiatiska länderna.

Att transfer kan ske spontant, även om det inte tränats, framkom i den här studiens resultat. I en av TIMSS-uppgifterna skulle en olikhet lösas, en uppgiftstyp som emellertid inte ingår i den svenska kursplanen. Lösningsfrekvensen var betydligt bättre än förväntat. En olikhet, som eleverna aldrig har stött på tidigare, innebär självklart en obekant situation för dem. Troligen har transfer av lösningsstrategier från ekvationer till olikheten förekommit. I just detta fall erfordrades knappast några modifieringar av lösningsstrategier. Därför kan misstänkas att transfer kan förekomma spontant, då endast mindre eller inga modifieringar av procedurer krävs. Denna del av resultatet i studien kan uppfattas som ett tillägg till tidigare forskningsresultat.

9.2.3 Begreppsmodeller och misstag

Användningen av begreppsmodeller, som inte uppfyller de fyra kriterierna, strukturell validitet, ekologisk validitet, enkelhetsvaliditet och operationell validitet på ett tillfredställande sätt, har visat sig kunna medföra negativa konsekvenser för eleverna. Några sådana negativa konsekvenser har kunnat konstateras i resultatet, exempelvis vid användningen av andelsmodellen för tal i bråkform liksom vid användningen av Harts (1981) begreppsmodell för proportionalitet. Svenska elevers användning av andelsmodellen kan härledas till frekventa misstag, som exponerades i lösningarna av uppgifterna. Om $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ ska beräknas, så ger modellen 2 av 5 plus 1 av 5. Detta blir 3 av 10, vilket gör, att additionen blir $\frac{3}{10}$ (Stigler & Hiebert, 1999; Siegler, 2003; Silver, 1986; Davis, 1997; Bentley, 2008a). Samma resultat erhålls om täljarna och nämnarna adderas var för sig, $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5+5} = \frac{3}{10}$.

Harts (1981) modell, som också används flitigt i Sverige, kan skrivas:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Den utläses: ” a förhåller sig till b som c förhåller sig till d ”. Någon enkel begreppslig förklaring till divisionen i modellen är svår att ge. I stället tillämpas den oftast procedurellt. Modellen kan appliceras både på ett andelsproblem och på ett motsvarighetsproblem, men bekymret är, att den inte gör någon åtskillnad mellan dem. Konsekvensen av detta framkommer tydligt i resultatet, framför allt bland svenska elever. Då lösningen av ett problem krävde, att ett förhållande transformerades till en andelsrelation, blev lösningsfrekvensen lägre. Detta var också fallet i Hong Kong och Taiwan men inte i lika hög grad.

Dessvärre är nog inte Harts (1981) modell enda förklaringen till den låga lösningsfrekvensen. Haapasalo (2003) hävdar, att proportionalitetsbegreppet ofta definieras utifrån dess grafiska representation som en linje genom origo. För att denna begreppsmodells operationella validitet inte ska uppfattas som låg krävs ju, att teorin om linjära funktioner är bekant. Då först kan elever beskriva de multiplikativa relationerna, $y = kx$, som är nödvändiga för de operationella ändamålen. Därför kan också proportionalitetsbegreppets grafiska modell vara en orsak till den låga frekvensen.

Inkorrekta storleksmått på geometriska figurer är ett område som måste ägnas mer uppmärksamhet. Clements och Stephan (2003) samt Cuneo (1980) har beskrivit endimensionella linjära mått, som elever använder då de borde använda tvådimensionella mått som area. Resultatet i denna studie bekräftar deras resultat. Alltför många elever valde distraktorer av denna beskaffenhet. Ett exempel på ett sådant mått fanns i TIMSS 2007, där summan av längden och bredden inkorrekt användes av ett antal elever som ett storleksmått på en rektangel. Även omkretsen användes som ett mått på rektangelns area om än mindre frekvent.

Flera forskare har pekat på problem, som rör elevers förståelse av areabegreppet. Redan Piaget, Inhelder och Sheminska (1981) påpekade, att förståelsen av areabegreppet var beroende av erfarenheter. Också den prematura användningen av formler för areor av olika geometriska figurer orsakar, att alltför många elever får svårigheter (Kordaki & Potari, 1997; Piaget, Inhelder & Sheminska, 1981; Hiebert, 1981; Douady & Perrin, 1986; Patronis & Thomaidis, 2008). Många lärare tror, att det finns ett direkt samband mellan en figurs omkrets och dess area. Om omkretsen ökar, så ökar också arean menar de (Ball, 1988; Ball & Wilson, 1990; Baturu & Nason, 1996; Heaton, 1992; Ma, 1999; Chick och

Baker, 2005). Resultatet i denna studie stöder dessa forskares farhågor. En alltför stor grupp elever har inte tillägnat sig areabegreppets egenskaper fullt ut, något som framkommer i de svenska elevernas lösningsfrekvenser på flera uppgifter.

Ett annat problem förenat med areabegreppet är lärares inkorrekta användning av enheter för area (Baturó & Nason, 1996; Heaton, 1992; Simon & Blume, 1994). I flera uppgifter visade det sig, att elever svarade med inkorrekt enhet. I ett fall uppgick denna andel till nästan en tredjedel av de svenska eleverna (28,7 %). Så resultatet av denna studie bekräftar resultat av tidigare forskning i detta avseende.

Ekvationspelet är en begreppsmodell inom området algebra (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997) och används flitigt, då ekvationer introduceras i svenska skolor. Spelet avser, som tidigare redogjorts för, att träna framför allt procedurrella regler för ekvationslösning. Det visade sig i elevlösningarna, som är underlaget för denna studie, att om eleverna kunde tillämpa spelets regler direkt, så blev det höga lösningsfrekvenser. Men då mer komplexa ekvationer, i vilka förenklingar var en nödvändig del av lösningsprocessen, så räckte inte dessa regler till utan en djupare förståelse krävdes.

Ekvationer kan ju även lösas genom att presumtiva lösningar testas, vilket är ett alternativ till de ovanstående reglerna. För att ett sådant testande ska fungera krävs, att eleverna behärskar, hur värden av uttryck beräknas. Detta tycks inte vara fallet, då en större andel svenska elever i denna studie inte visste, att om $b = -1$ så är $-b = +1$. Även förenklingar av uttryck, som också kan utgöra en del av en ekvation, var problematiska, speciellt då negativa parenteser ingick.

Funktionsmaskinen är en begreppsmodell, som har en tydlig strukturell nackdel, då endast ett värde på variabeln kan passera maskinen åt gången. En funktion däremot kan beskriva oändligt många värden på variabeln samtidigt, vilket är nödvändigt för att en funktions graf ska kunna förstås (McGowen, DeMarois & Tall, 2000). I denna studie var ett typiskt misstag, att eleverna inte kontrollerade, om alla talpar uppfyllde funktionsvillkoret utan nöjde sig med att endast hitta ett talpar, som gjorde det. Detta kan vara en följd av funktionsmaskinens nämnda nackdel, som gör att elever tror, att variabeln representerar ett specifikt obekant tal och därför inte kontrollerar alla par. Emellertid kan det även finnas andra orsaker. För att avgöra om ett funktionellt samband inte beskriver funktionstabellen, så räcker det ju med att visa, att ett talpar inte uppfyller sambandet. Det kan ju då vara lätt att övergeneralisera detta till att gälla den procedur, som används för att avgöra om ett funktionellt samband beskriver funktionstabellen. Egentligen skulle ju alla talpar kontrolleras för att konstatera huruvida de uppfyller funktionsvillkoret. Övergeneraliseringen gör emellertid att endast ett av paren kontrolleras.

Uttrycksmodellen för funktioner representerar en typ av avbildning utan att ha samma nackdelar som avbildningsmodellen. I uttrycksmodellen beskrivs en funktion med hjälp av ett uttryck som till exempel $f(x) = 3x + 4$ eller $y = 3x + 4$. Här kan variabeln x genomlöpa ett oändligt antal värden, som genom uttrycket är relaterade till den beroende variabeln y (Tall & Bakar, 1992). Variabeln x representerar därför ett generaliserat tal.

Att en linje kan ha en ekvation var nog en nyhet för ett större antal svenska elever. Variablerna i en sådan ekvation representerar inte ett specifikt okänt tal utan är en generell talbeteckning. En nödvändig kunskap för att kunna avgöra om en punkt finns på en linje är ju, att koordinaterna för punkten ska satisfiera

linjens ekvation. Tre fjärdedelar av de svenska eleverna och hälften av de från Hong Kong och Taiwan hade uppenbarligen inte denna kunskap.

Sammanfattningsvis kan konstateras att begreppsmodeller ibland kan vara hämmande för elevers möjligheter att lösa problem men även att de under vissa förutsättningar kan vara vägledande med hög operationell validitet som följd.

9.3 Studiens begränsningar

TIMSS-undersökningarna genomförs under mycket kontrollerade former. De tre olika typerna av uppgifter innebär att olika hänsyn behöver tas för att reliabiliteten ska bli tillfredställande.

Flervalsuppgifterna innebär i princip inga svårigheter vid bedömningen. Uppgifter med krav på endast svar bedömdes huvudsakligen utifrån rätt eller fel. Olika feltyper kan ibland också klassificeras. Utrymmet för subjektiv bedömning är dock mycket litet.

För uppgifter i vilka redovisning av fullständiga lösningar krävs, tillämpas medbedömarprincipen med en internationellt framtagen bedömningsmall. Likheten i bedömningarna, som är ett mått på interbedömarreliabiliteten, var 98 procent i TIMSS 2007. Dessa bedömningar ligger till grund för den statistiska redovisningen. Ett antal elevlösningar har analyserats i sin helhet för att skapa en bild med högre precision av enskilda elevers kunskaper. Dessa kompletterande insamlade elevlösningar dels från TIMSS och dels från det nationella ämnesprovet påverkar inte reliabiliteten, utan ingår istället i validitetsbedömningen.

Konstruktionsvaliditet är ett mått på hur väl de skapade kategorierna fångar upp samtliga elevlösningarna. Eftersom endast exponerad förståelse av begrepp och tillämpning av procedurer studerats, har en bristfällig elevlösning setts som icke fullt exponerad förståelse eller tillämpning. Dessa bristfälliga elevlösningar har redovisats som icke-kategoriserade.

Extern validitet beskriver i vilken grad resultatet är generaliserbart till populationen som helhet. Då skolor varit grunden för urvalet och två klasser och lärare per skola valts ut slumpmässigt och en, möjligen två elever, per klass haft samma uppgifter blir eleverna i princip slumpmässigt valda. Det kan emellertid vara viktigt att påpeka att större skolor har något större sannolikhet för att komma med i urvalet än mindre skolor har. Eftersom antalet elever ur de båda TIMSS 2007-urvalen, årskurs fyra och åtta, som studerats är något över 40 procent av hela urvalet, så är detta på gränsen vad man skulle kunna acceptera för att generalisera resultatet till hela elevpopulationen i årskurserna. Eftersom årskurs åtta i TIMSS 2003 studerats och resultaten harmonierar med resultaten i TIMSS 2007 så blir slutsatserna säkrare. En del av resultaten återfinns även i resultaten för eleverna i Hong Kong och Taiwan, exempelvis gjorde eleverna samma misstag men inte lika frekvent. Sådana analogier kan också stärka slutsatserna. Även resultatet från de insamlade elevlösningarna från det nationella ämnesprovet för årskurs 9 bekräftar slutsatserna avseende TIMSS 2007, årskurs 8. De delar av resultatet, som rör elevers uppvisade kunskaper, kan därför extrapoleras till populationen. Däremot ska viss försiktighet iaktas då frekvenser ska extrapoleras. Det är emellertid inte studien fokus att exakt ange frekvensen av vissa elevmisstag utan snarare att visa misstagens beskaffenhet.

TIMSS-resultatet visade sig också harmoniera med tidigare forskning på området vilket också stärker den externa validiteten.

Givetvis hade det varit önskvärt med ett ännu större antal elevlösningar, som hade kunnat analyseras. Då hade säkerheten i slutsatserna ökat ännu mer. Ett sådant större antal elevlösningar skulle dock inte ha varit möjligt att analysera inom den givna tidsramen.

Uppgifterna har ju varit utformade för att jämföra poäng i olika länder som en indikation på elevers prestationer i matematik och inte för andra analysändamål. Det hade varit önskvärt att fler uppgifter, som avser mäta elevers kunskaper om ett begrepp i olika kontexter, i större utsträckning hade ingått i samma block. Proportionalitetsbegreppet gjorde detta, medan areabegreppet omfattade relativt få uppgifter. Detta är ett önskemål som kan beaktas i kommande TIMSS projekt.

9.4 Syftet har nåtts

Syftet var först att ingående beskriva svenska elevers matematikkunskaper med inriktning på procedurer och begrepp. Genom att redovisa elevers lösningar på uppgifterna i de tre resultatkapitlen och vilka misstag eleverna gjort samt vilket koppling till begrepp och procedurer detta innebär, så har den första delen av syftet uppnåtts.

Den andra delen av syftet var att studera hur kunskapens beskaffenhet skiljer sig mellan elever i Sverige och i Hong Kong och Taiwan. I resultatkapitlen har redovisats hur elever i de tre länderna löst uppgifterna och vilka misstag de gjort samt hur dessa lösningar och misstag hänger ihop med uppfattningar om begrepp och tillämpning av procedurer. Dessutom har analysen av lösningsmönster fokuserat grupper av uppgifter som behandlar ett och samma begrepp och då kunnat vissa relativa frekvenser för den andel elever som löst samtliga uppgifter i en sådan grupp, den andel som löst alla utom en, eller den andel som löst enstaka uppgifter eller ingen av uppgifterna. Resultaten av analyserna har beskrivits i respektive kapitel och slutsatser rörande kunskapens beskaffenhet har dragits. På så sätt har den andra delen av syftet nåtts.

Syftets tredje del var att utifrån kunskapens beskaffenhet samt tidigare forskning dra slutsatser om undervisningens inriktning. Den forskning som finns angående undervisningens inriktning i västländerna och i de ostasiatiska länderna har presenterats i forskningsgenomgången. Slutsatserna har baserats på resultaten av analyserna av lösningsmönster och har beskrivits mot slutet av respektive resultatkapitel. Den tredje delen av syftet har därmed uppnåtts.

Sammantaget har alla tre delsyften uppnått och därför har syftet som helhet uppnått.

9.5 Framtida forskning

Eftersom resultatet visar att elevers kunskaper kan vara konceptuellt eller procedurellt strukturerad och viss forskning indikerar att läromedlen mestadels är procedurellt inriktade så kan misstänkas att diagnostiska prov, förutom att de inte kan fånga elevernas kunskapsutveckling med tillräcklig precision, också har en procedurell inriktning. Detta skulle vara särskilt problematiskt då lärare inte ges möjlighet att få veta vad eleverna behöver utveckla för matematisk förståelse. Tvärtom skulle det verka som om allt vore i sin ordning. Det skulle därför vara önskvärt att analysera ett antal läromedels diagnostiska prov med avseende på om de har en procedurell eller konceptuell inriktning.

Eftersom Bentley (2008a) fann att det fanns två grupper av lärare, som hade olika kunskaper. En grupp hade välutvecklade egna uppfattningar om proportionalitet och variabelbegreppet samt var medvetna om de missuppfattningar elever kunde ha om motsvarande begrepp. Den andra gruppen hade mediokra egna uppfattningar om begreppen och trodde att eleverna uppfattade de två begreppen på samma sätt som de själva. Den första gruppen kunde sägas ha kunskaper för att undervisa mer konceptuellt medan den andra inte hade det utan var hänvisade till en procedurell undervisningsinriktning. Med tanke på detta resultat och denna studies resultat blir det viktigt att kartlägga hur lärare kan påverkas att ha en mer förståelseinriktad matematikundervisning.

10 Referenser

- Ball, D., L. (1988). *Knowledge and Reasoning in Mathematical Pedagogy: Examining What Prospect Teachers Bring to Teacher Education*. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.
- Ball, D., L. & Wilson, S., M. (1990). *Knowing the Subject and Learning to Teach It: Becoming a Mathematics Teacher*. (Research Report 90 – 7). East Lansing: Michigan State University, National Center for the Research on Teacher Education.
- Ball, D., L., Lubienski, S., T. & Mewborn, D., S. (2001). Research on Mathematics Teaching. In Richardson, V. (Ed.) *Handbook of Research on Teaching*. Washington D. C.: American Educational Research Association.
- Baroody, A., J. (1987). *Children's Mathematical Thinking: A Developmental Framework for Preschool, Primary, and Special Education Teachers*. New York: Teacher's College.
- Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student Teachers' Subject Matter Knowledge Within the Domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics*, No. 31, ss. 235-268.
- Bentley, P-O. (2008a). *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models. A New Field of Research*. Göteborg, Studies in Educational Sciences, 265. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Bentley, P-O. (2008b). *Pupils' Arithmetic Knowledge and the Procedural Models in their Teaching*. (In Press)
- Bentley, P-O. (2008c). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 – En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar procedurer*. Skolverket: Analysrapport till 323, 2008.
- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. Göteborg: Nämnaren, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.
- Charles, K., Nason, R. & Cooper, T., (1999). *Mathematical Analogs and the Teaching of Fractions*. Paper Presented at the Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education (Melbourne, Australia, November 29 – December 2, 1999).
- Chick, H., L. & Baker, M., K. (2005). In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, pp. 249–256. Melbourne: PME.
- Clements, D., H. & Stephan, M. (2003). Measurement in PreK-2 *Mathematics*. In *Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics*. Clements, D., H., Sarama, J. & DiBiase, A-M. (Eds.) Lawrence Erlbaum Assoc Inc.
- Cuneo, D. (1980). A General Strategy for Quantity Judgements: The Height + Width Rule. *Child Development*. No. 51, pp. 299–301.

- Davis, B. (1997). Listening for Differences: An Evolving Conception of Mathematics Teaching. *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol. 28, No. 3, pp. 355–376.
- Delazer, M. (2003). Neuropsychological Findings on Conceptual Knowledge of Arithmetic in *The Development of Arithmetic Concepts and Skills*. Baroody, A., J. & Dowker, A., (Eds.) Lawrence Erlbaum Assoc Inc.
- Douady, R. & Perrin, M-J. (1986). Concerning Conceptions of Area (pupils aged 9 to 11). *Proceedings of PME 10*, London, 253–258.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, No. 16, pp. 3–17
- Foxman, D., & Ruddock, G. (1984). Concepts and Skills: Line Symmetry and Angle. *Mathematics in Schools*, March 1984, 9–13.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.
- Greer, B. (1992). Multiplication and Division as Models of Situations. In Grouws, D., A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillian Publishing Company.
- Haapasalo, L., (2003). The Conflict between Conceptual and Procedural Knowledge: Should we need to understand in order to be able to do or vice-versa? In *Towards Meaningful Mathematics and Science Education*. Haapasalo, L. & Sormunen, K. 2003 (Eds.). Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association. University of Joensuu. Bulletins of the Faculty of Education 86.
- Hart, K., M. (1981). Ratio and Proportion. In Hart, K., M. (Ed.) *Children's Understanding of Mathematics*: 11–16, London: John Murray.
- Hasemann, (1980). Difficulties With Fractions. *Ed Stud Math* No. 12, pp. 71–88.
- Heaton, R., M. (1992). Who is Minding the Mathematics Content? A Case Study of a Fifth Grade Teacher. *Elementary School Journal*, No. 93, ss. 153–162.
- Hiebert, J. (1981). Units of Measure: Results and Implications from National Assessment. *Arithmetic Teacher*, 28 (6), 38–43.
- Hiebert, J. & Carpenter, T., P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (Ed. Grouws, D., A.) New York: Macmillan Publishing Company.
- Johansson, B., S. (2005). Numeral Writing Skill and Elementary Arithmetic Mental Calculations. *Scandinavian Journal of Educational Research*. Vol. 49, No. 1, pp. 3–25.
- Kaput, J. (1985). *Multiplicative Word Problem and Intensive Quantities: An Integrated Software Response*. (Technical Report 85-19). Cambridge, MA: Harvard University, Educational Technology Centre.
- Kilborn, W. (1995). *Didaktisk ämnesteorin, del 2. Rationella och irrationella tal*. Malmö: Liber-Hermöds.

- Kilborn, W. (1979b). *Ämnesmetodiska processanalyser i matematik inom Kom. Vux.* Högskolan för lärarutbildning i Stockholm, Institutionen för pedagogik, Rapport 8:1979.
- Kordaki, M. & Potari, D. (1997). *Children's Approaches to Area Measurement through Different Contexts.* Manuscript submitted for publication.
- Lindahl, M. (1996). *Inläring och erfärande. Ettåringars möte med förskolans värld.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.
- McGowen, M., DeMarois, P. & Tall, D. (2000). *Using the Function Machine as a Cognitive Root.* Proceedings, PME-NA 22, pp. 255–261. Tuscon, Arizona.
- Mitchelmore, M. C. (1989) 'The Development of Children's Concepts of Angle', in G. Vergnaud (ed.), *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Paris, Vol. 2, pp. 304–311.
- Mitchelmore, M. C., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research, *Mathematics Education Research Journal*, 10(3), 4–27.
- Niss, M., (2000).
- Patronis, T. & Thomaidis, Y. (2008). On Arithmetization of School Geometry in the Setting of Modern Axiomatic, *Science and Education*.
- Piaget J., Inhelder B. & Sheminska A. (1981). *The Child's Conception of Geometry*, N.Y: Norton & Company.
- Rittle-Johnson, B. & Wagner Alibali, M. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology*. Vol. 91. No. 1. pp. 175–189.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R., S. & Alibali, M., W. (2001). Developing Conceptual and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*. No. 93. pp. 346–362.
- Ryu, H., A., Chong, Y., O. & Song, S., H. (2007). In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 137–144. Seoul: PME.
- Schmidt, W., H., McKnight, C., C. & Raizen, S. (1997). *Splintered Vision: An Investigation of US Science and Mathematics Education.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Schmidt, W., H., McKnight, C., C., Valverde, G., A., Houang, R., T. & Wiley, D., E. (1997a). *Many Visions, Many Aims: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics* (Vol 1). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Schmidt, W., H., McKnight, C., C., Valverde, G., A., Houang, R., T. & Wiley, D., E. (1997a). *Many Visions, Many Aims: A Cross-National Investigation of*

Curricular Intentions in School Mathematics (Vol 2). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Siegler, R., S. (2003). Implications of Cognitive Science Research for Mathematics Education. In Kilpatrick, J., Martin, W., B. & Schifter, D., E. (Eds.), *A Research Companion to principles and Standards for School Mathematics* (pp. 219–233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E., A. (1983). Probing Young adults' Thinking about Rational Numbers. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. No. 5, pp. 105–117.

Simon, M., A. & Blume, G., W. (1994). Building and Understanding Multiplicative Relationships: A Study of Prospective Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, No. 25, ss. 472–494.

Spitzer, M., (1996). *Geist im Netz: Modelle für Lernen, Denken und Handeln*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2000). *How Students Misunderstand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. Teachers College Press.

Stigler, J., W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: The Free Press.

Stodolsky, S., S. (1988). *The Subject Matter: Classroom Activity in Math and Social Studies*. Chicago: University of Chicago Press.

Swedner, H. (1978). *Sociologisk metod. En bok om kunskapsproduktion och förändringsarbete*. Lund: Liber Läromedel.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, No. 23, pp. 39–50.

Tzur, R. & Simon, M. (2004). Distinguishing two Stages of Mathematics Conceptual Learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*. No. 2, pp. 287–304.

Whitehead, A., N. (1948). *An Introduction to Mathematics*. New York: Oxford University Press. (Original Work Published 1911).

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. London: The MIT Press.

TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) undersöker matematik och naturvetenskap i årskurserna 4 och 8.

I rapporten analyseras data från TIMSS 2007 och motsvarande uppgifter i 2003 samt även några uppgifter från de nationella proven i årskurs 9. Svenska elevers resultatmönster jämförs med resultatmönstren hos eleverna i några av de asiatiska länder som nått mycket goda resultat på TIMSS kunskapsprov, Hong Kong och Taiwan. I rapporten behandlas de matematiska områdena aritmetik och taluppfattning, geometri och algebra.

Analysen är genomförd och rapporten är skriven av Per-Olof Bentley, universitetslektor och filosofie doktor vid Göteborgs universitet, inom ramen för hans uppdrag som ämnesdidaktisk expert i TIMSS-projektet.

Skolverket

www.skolverket.se