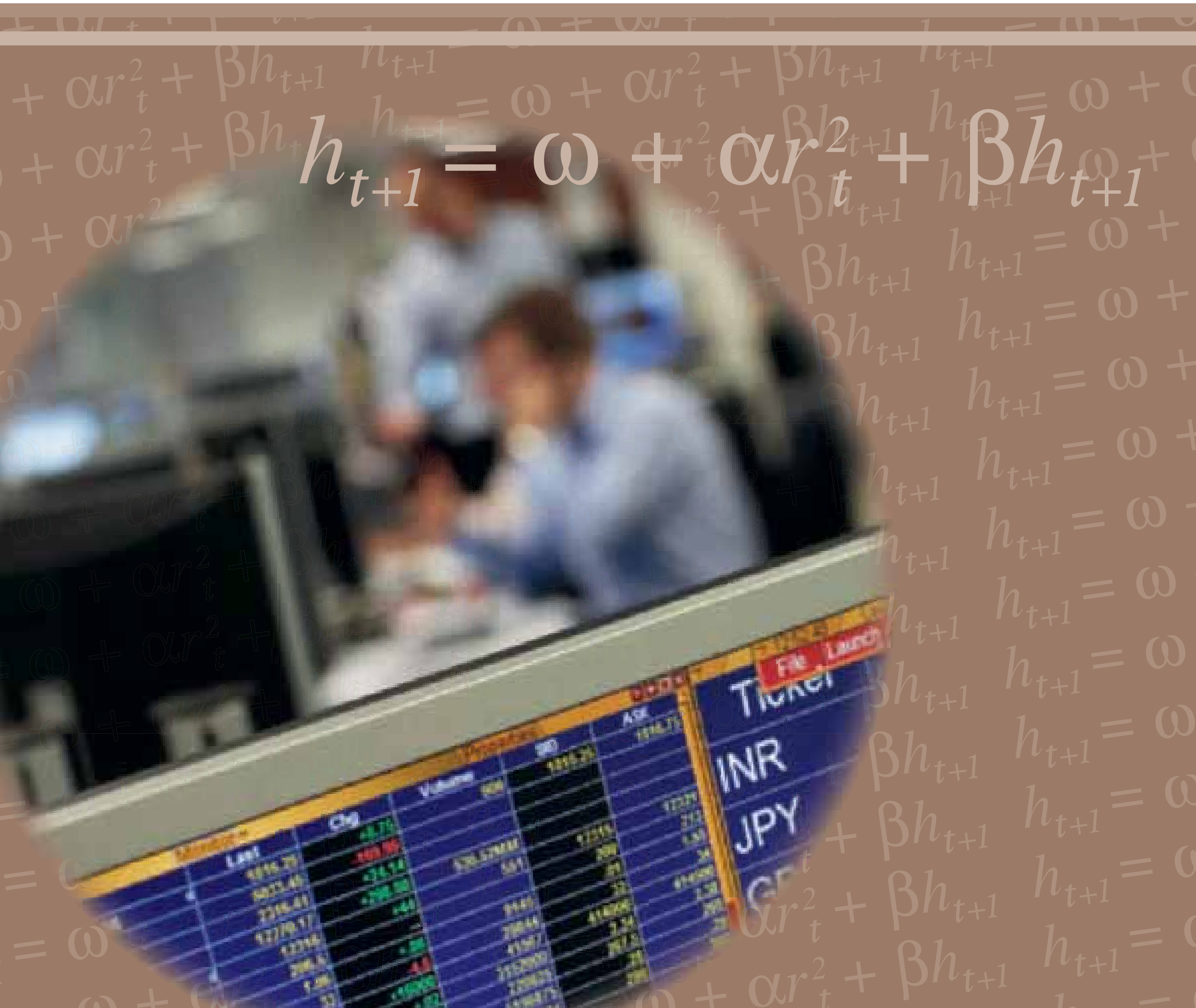
ANALYSRAPPORT TILL 336
2009

INTERNATIONELLA STUDIER

Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995

En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken



Skolverket

Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995

En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken

Rapporten kan kostnadsfritt
hämtas från www.skolverket.se

ISBN: 978-91-85545-75-9

Form: Ordförrådet AB

Förord

TIMSS Advanced *(Trends in International Mathematics and Science Study)* undersöker elevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i gymnasieskolans sista årskurs (årskurs 3). Samtidigt samlas med hjälp av olika enkäter en mängd information in om nationella policyn och mål, om faktisk organisation och undervisning och om elevernas attityder. Studien ger information om förändringar i kunskap över tid inom de områden undersökningen mäter för de länder som även deltog 1995. Samtidigt möjliggör studien jämförelser mellan länder även om man bör vara mer försiktigt med detta då det handlar om gymnasieskolan som inte är obligatorisk och att populationerna mellan länderna varierar. Mer om denna problematik tas upp i Skolverkets nationella rapport TIMSS Advanced 2008.

TIMSS Advanced 2008 har genomförts av Skolverket i samarbete med ämnesdidaktiker vid Umeå universitet. Skolverket har sammanställt en första nationell rapport med resultaten från TIMSS Advanced 2008, rapport 336. Skolverket har därutöver ambitionen är att använda TIMSS-data för olika former av fördjupade analyser för att därmed kunna bidra till skolans utveckling.

Denna rapport har tagits fram inom ramen för arbetet med TIMSS Advanced 2008. I rapporten analyseras elevernas lösningar av enskilda TIMSS-uppgifter i matematik inom de innehållsliga områden algebra, differential- och integralkalkyl och geometri. Analysen syftar till att belysa hur väl eleverna förstår centrala matematiska begrepp och kan tillämpa beräkningsprocedurer inom dessa innehållsliga områden. Dessutom görs en jämförelser med de uppgifter som även var med i 1995 års studie.

Per-Olof Bentley, universitetslektor och filosofie doktor vid Göteborgs universitet, har både genomfört analysen och skrivit rapporten inom ramen för uppdraget i TIMSS Advanced-projektet. Författaren ansvarar för rapportens innehåll och de uppfattningar som uttrycks.

Stockholm, januari 2010

Per Thullberg	*Marie Eklund*
Generaldirektör	Undervisningsråd

Innehåll

Sammanfattning av resultatet

Djupanalysen av TIMSS Advanced 2008 visade, att en majoritet av svenska gymnasieelever inte behärskade uppnåendemålen i varken C-, D- eller E-kursen. Tre orsaker till detta resultat kan urskiljas. Eleverna som deltog i TIMSS 2003 hade betydligt lägre matematikkunskaper jämfört med elever som deltog i TIMSS 1995. Skillnaden i kunskaper motsvarar ungefär ett års matematikstudier. Eleverna som deltog i TIMSS Advanced 2008 slutade grundskolan ett år efter denna mätning 2003. Ett års eftersläpning kan inte så lätt tas igen i gymnasieskolan. Den tid för en så omfattande repetition och återläsning som behövs finns inte.

Den internationella forskningen har under relativt lång tid varnat för att matematikundervisningen i gymnasieskolan haft en alltför snäv inriktning på lösningsprocedurer, framförallt i västländerna. I en sådan procedurellt inriktad undervisning fokuseras på beräkningar utan begreppslig förankring och inte på att belysa hur olika moment i matematiken förståelsemässigt bygger på varandra. I en konceptuellt inriktad undervisning däremot har begreppsförståelse en central roll, ett förhållande som också stöder uppbyggnaden av matematikens hierarkiska struktur. Om procedurers begreppsliga förankring tas upp i undervisningen kan uppgifter, som inte tränats i undervisningen, lättare lösas genom att eleverna då har lättare att modifiera lösningsprocedurerna så att de passar i de obekanta situationerna. Detta underlättas genom att begreppen utgör ett slags facit för en sådan modifiering. Utan en sådan begreppslig förankring får eleverna svårigheter att lösa uppgifter i obekanta situationer.

Vid en jämförelse av svenska grundskoleelevers lösningar i TIMSS 2007/2003 med elevernas i Hong Kong och Taiwan framkom den procedurella undervisningens nackdelar. De ostasiatiska ländernas topplaceringar i TIMSS och deras konceptuella undervisning gör en sådan jämförelse särskilt intressant. De svenska eleverna löste endast spridda uppgifter inom varje grupp av uppgifter, som testade ett och samma begrepp, medan hälften av de ostasiatiska eleverna löste samtliga uppgifter inom en sådan grupp. Undervisningens inriktning speglar sig alltså i elevers lösningar av testuppgifterna. Om endast enstaka spridda uppgifter har lösts, så beror detta på, att kunskapen är av lokal procedurell karaktär. Har däremot mer eller mindre samtliga uppgifter lösts, uppgifter som belyser ett och samma begrepp i olika problemsituationer eller kontexter, så stöder det slutsatsen att kunskapen är konceptuellt strukturerad.

Så när de deltagande eleverna i TIMSS Advanced 2008 kom till gymnasieskolan hade de under lång tid i grundskolan varit utsatta för en procedurellt inriktad undervisning, som också resulterat i bristfälliga kunskaper.

Även djupanalysen av resultatet i TIMSS Advanced 2008 visar att gymnasieeleverna löst spridda uppgifter. Typvärdet var en eller två uppgifter lösta av sex alternativt åtta uppgifter. Vid en jämförelse med TIMSS 1995 så har typvärdet försämrats från fyra lösta uppgifter till två. Slutsatsen, som kan dras av detta, är att undervisningen blivit än mer inriktad på lösningsprocedurer utan begreppslig förankring. David Tall (1996) menar att detta är matematikens onda cirkel, ju sämre kunskaper eleverna har desto mer anstränger sig lärarna att förenkla instruktionerna till eleverna och desto mer efterfrågar eleverna hur man gör för att lösa en uppgift oftast utan någon särskild förståelse. Den mest förenklade instruktionen för att lösa en uppgift är ju att beskriva lösningsproceduren steg för steg. Dessutom är eleven redan inriktad på att bemästra proceduren och inte att primärt förstå det matematiska sammanhanget bakom. På detta sätt fortgår försämringen utan att något kan göras. Försämringen inom algebra, differential- och integralkalkyl (15 %) var något mindre än inom geometri (20 %).

Även undervisningsuppehållet som D-kursens elever erfor kan ha haft en negativ inverkan på resultatet.

Del 1

Teoretisk bakgrund

Del 1. Teoretisk bakgrund

I den första delen ges först en introduktion till studien och problemställningen. Sedan redovisas de teoretiska förutsättningarna och slutligen resultat av forskning av betydelse för denna studie.

I introduktionen är en av utgångspunkterna för djupanalys och jämförelsen av svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007 och 2003 med de kunskaper eleverna i Hong Kong och Taiwan uppvisat i TIMSS 2007. Vidare analyseras de skillnader som finns i kunskapens struktur och som i sin tur kan härledas från skillnader i undervisningen. En andra utgångspunkt är undervisningsuppehållens inverkan på resultatet. För att kunna sätta in effektiva förbättringsåtgärder krävs en hög precision vid beskrivningen av vad som orsakar att eleverna inte kan lösa vissa testuppgifter. Det räcker inte med att säga att gymnasieeleverna inte kan bestämma derivatan för en sammansatt funktion utan det krävs att orsakerna till detta kan klarläggas bättre.

En viktig förutsättning för en studie, då elevers förståelse av begrepp och tillämpning av procedurer skall undersökas, är hur elever lär in dessa. Detta beskrivs i det andra kapitlet, teoretiska förutsättningar. Även analys av data, samt definition på reliabilitet och validitet i denna slags studie redogörs det för.

Eftersom internationell och i viss mån nationell forskning utgjort en väsentlig grund för djupanalysen redovisas denna i kapitel tre. Först avhandlas mer precist skillnaderna mellan procedurell och konceptuell kunskap. Sedan belyses olika begreppsmodellers roll i skolmatematiken, deras inverkan på eleverna förståelse samt redovisas kriterier för kvalitetsbedömning. Dessutom ägnas stor del av kapitlet åt att beskriva frekventa misstag och deras orsaker som forskningen rapporterat.

Läsanvisning

Lärare och lärarutbildare rekommenderas att studera begreppsinlärning med speciell inriktning på de två processerna ”rediscription” och ”theory revision” i kapitel 2 och framför allt avsnitten om begreppsmodeller, frekventa misstag samt deras orsaker i kapitel 3. Övriga avsnitt är inte nödvändiga för att förstå resultatet utan utgör mer vetenskapligt ofrånkomliga delar i rapporten.

1. Introduktion

Svenska gymnasieelevers kunskaper som de framstod i TIMSS 1995[1] har försämrats i TIMSS Advanced 2008. En avgörande fråga att besvara är, vilka orsakerna till detta kan vara. Först måste konstateras att elevernas prestationer i grundskolan har genomgått en liknande försämring från TIMSS 1995, till 2003 och vidare till 2007. Den population av gymnasieelever som testades i TIMSS Avanced 2008 bestod av två grupper, dels de som 2008 gick i gymnasieskolan och läste E-kursen och dels de som läste D-kursen hösten innan. Dessa elever torde ha gått i årskurs 8 i grundskolan läsåret 2003/2004, alltså ett år efter mätningen i TIMSS 2003 och startade sålunda gymnasieskolan med relativt bristfälligt utvecklade kunskaper i matematik. Försämringen mellan 1995 och läsåret 2003/2004 har visat sig motsvara ungefär ett läsårs studier. Detta satte sina spår inte bara hos de elever, som gick de yrkesförberedande programmen, utan också hos de elever, som valde de mer teoretiskt inriktade programmen. Det är därför sannolikt, att elevernas bristfälligt utvecklade kunskaper från grundskolan, är en av huvudorsakerna till resultatet på TIMSS Advanced 2008.

I en djupanalys av årskurs-8-elevers kunskaper i TIMSS 2003 och i TIMSS 2007 fann Bentley (Skolverket, 2008b), att kunskaperna i algebra inte var särskilt väl utvecklade. Dessutom visade det sig, att proportionalitetsbegreppet, som har en intressant koppling till funktionsbegreppet och grafer, var speciellt problematiskt. Undervisningen och elevernas kunskaper hade en tydlig inriktning på procedurer utan någon särskild begreppslig förståelse. De svenska eleverna jämfördes också med eleverna i Hong Kong och Taiwan, vilka ligger bland de mest högpresterande i TIMSS-mätningarna. I den grupp av uppgifter, som testade algebraiska kunskaper, löste de svenska eleverna enstaka spridda uppgifter, medan i princip hälften av eleverna i de två ostasiatiska länderna löste samtliga. Förklaringen till denna höga lösningsfrekvens står att finna i undervisningen i dessa länder, vilken inriktar sig på förståelse av begrepp, på medveten träning av överföring av kunskaper från ett sammanhang till ett annat samt på uppfattningen, att misstag är ett naturligt inslag i inlärningsprocessen. Frekventa elevmisstag, som tidigare är beskrivna i forskningen, tas systematiskt upp i undervisningen. Eleverna tränas också systematiskt att själva upptäcka, det inkorrekta i misstagen. En sådan konceptuell inriktning av undervisningen skiljer sig alltså påtagligt från den procedurella inriktningen i Sverige och i andra västländer (Stevenson & Stigler, 1992; Stigler & Hiebert, 1999).

Flera forskare har sedan 1980-talet varnat för bristen på konceptuell inriktning av undervisningen i gymnasieskolan och har dessutom beskrivit konsekvenserna av detta (Vendlinski, 2009; Bransford, Brown, & Cocking, 1999; Donovan & Bransford, 2005; Saxe, Gearhart, & Seltzer, 1999; Fuson, Kalchman, & Bransford, 2005; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Bransford et al., 1999; Cooney & Wiegel, 2003; Donovan, Bransford, & Pellegrino, 1999; Kamii & Dominick, 1998; Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006; National Mathematics Advisory Panel, 2008; NCES, 1999, 2001; Carpenter & Lehrer, 1999; Hiebert & Carpenter, 1992; Porter, 1989; Schmidt, McKnight, Houang, Wang, Wiley &

[1] Avser specialistundersökningen i TIMSS 1995

Cogan, 2001; Stodolsky, 1988). En av dessa konsekvenser är att rutinuppgifter lättare löses av eleverna. Då uppgifter, som avviker något från gängse tränade procedurer, skall lösas, så sjunker lösningsfrekvenserna dramatiskt (Eisenberg, 1992; Selden, Mason och Selden, 1989; 1994; Tall, 1996). Bristen på konceptuell inriktning av undervisningen visade sig vara en av huvudorsakerna till försämringen i TIMSS Advanced 2008 och beskrivs utförligt i resultatkapitlet.

En annan orsak, som också har med den procedurella undervisningen att göra, rör den inverkan som längre undervisningsuppehåll har på elevernas prestationer. I en internationell forskningsöversikt visar Cooper, Nye, Charlton, Lindsay och Greathouse (1996) att speciellt matematikkunskaper med procedurell inriktning påverkas särskilt negativt av sådana undervisningsuppehåll. Den ena av kurserna, D-kursen, avslutas i allmänhet i och med höstterminens slut och gymnasieeleverna hade därför inte undervisats i matematik under ett antal månader innan TIMSS-testet genomfördes, en del avslutade matematiken redan våren ett år innan mätningarna. Detta undervisningsuppehåll kan ha påverkat elevprestationerna negativt och även vara till förfång för elevernas fortsatta studier på högskolor och universitet.

I syfte att ge möjlighet att förbättra elevprestationerna är det viktigt att studera beskaffenheten hos elevernas kunskaper. För att effektiva insatser skall kunna sättas in så krävs precision i beskrivningarna. Den gjorda djupanalysen mestadels baserad på den internationella forskningens resultat är ett försök till en sådan beskrivning. Därmed kan den också bidra till att förklara vad som kan ha orsakat gymnasieelevernas svaga kunskapsutveckling i matematik.

2 Teoretiska förutsättningar

Utgångspunkten för analyserna av elevernas lösningar av uppgifterna i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 är en utvidgad fenomenografisk teoriram, i vilken huvudsakligen studeras inlärning av begrepp och procedurer. Dessa förutsättningar beskrivs i första avsnittet. Vid en djupanalys av elevlösningar består data av elevers lösningar eller svar på uppgifter. En av de andra utgångspunkterna vid analysen är den internationella forskningens resultat. Den kan ge information om vad elevernas misstag kan bero på samt bidrag till en hög precision vid beskrivning av orsakerna. Dessa förutsättningar avhandlas i det andra avsnittet. Slutligen beskrivs vilken reliabilitet och validitet som tillämpas i denna studie.

2.1 Inlärning av begrepp och procedurer

Både begrepp och procedurer uppfattas som *fenomen* inom fenomenografin. Tidigare inlärda begrepp spelar en viktig roll då nya begrepp erfars. Om ett nytt begrepp skall kunna erfaras, så måste det skilja ut sig från tidigare inlärda begrepp. Detta sker då *särskiljande begreppsattribut* urskiljs och uppfattas, vilket lättare kan ske då kontexten, i vilken attributet finns varieras. På detta sätt får variationen en central roll i erfarandeprocessen. Sådana begreppsattribut benämns ofta, som kritiska och kan vara individberoende. Olika individer uppfattar därför inte nödvändigtvis samma attribut som särskiljande (Bentley, 2008a; Marton & Booth, 2000).

Upprepad erfarande av attributen spelar en viktig roll vid inlärning. Två delvis olika processer ”theory revision” och ”rediscription” opererar vid olika frekvent erfarande av begreppen.

Vid lågfrekvent erfarande svarar *”theory revision”* för inlärningen. Först skapas en begreppsprototyp, som kan vara en relativt grov uppfattning av begreppet. Vid nytt erfarande förfinas successivt uppfattningen för att över tid närma sig en uppfattning, som står i överensstämmelse med individens inflöde av sensomotoriska data. Beskrivningen av denna process liknar i hög grad Vygotskys (1986) teori om inlärning av vardagliga begrepp (Bentley, 2008a).

Processen *”rediscription”* å andra sidan opererar vid högfrekvent erfarande av begreppet i fråga. Uppfattningen av begreppet formas i arbetsminnet och kontrolleras mot individens inflöde av sensomotoriska data innan den lagras via ”rediscription” i långtidsminnet (Bentley, 2008a).

Ett begrepp anses ha *förståtts*, då tillräcklig kunskap har tillägnats om begreppsattributen och andra involverade begrepp samt om relationen dem emellan inom helheten av begreppet i fråga (Bentley 2008a, s.11).

I skolmatematiken förkommer förenklingar av den matematiska disciplinens begrepp. Sådana förenklingar, som görs för att öka tillgängligheten för eleverna och underlätta deras lärande, benämns *begreppsmodeller* och har ofta begränsade tillämpningsområden. Många av de modeller, som används i svenska skolor, har beforskats internationellt (Bentley, 2008a).

Procedurer, som också uppfattas som fenomen, har en med begrepp analog uppbyggnad. Då begrepp byggs upp av attribut och andra kända begrepp, så byggs procedurer upp med utgångspunkt i för individen tidigare kända procedurer, vilka då utgör delprocedurer. Dessa delprocedurer, som ofta är strikt sekvenserade, utgör *procedurens olika steg* och hänger ihop. En procedur kan *tillämpas* både korrekt och inkorrekt. Speciellt den inkorrekta tillämpningen är intressant, då den också kan avslöja hur individen har uppfattat både proceduren i fråga samt dess involverade begrepp. Ur forskningssynpunkt kan det därför vara mer givande att studera hur en procedur tillämpas i ett sammanhang än att avgöra om tillämpningen är korrekt eller inkorrekt. Om en procedur tillämpas korrekt i rätt sammanhang, så anses det att individen *behärskar* proceduren. De modeller av den matematiska disciplinens procedurer som används i skolmatematiken kan ibland benämnas *procedurmodeller* (Bentley i Skolverket, 2008b).

I benämnda problem beskriver texten en problemsituation. Utifrån denna skall en matematisk modell skapas. Denna process benämns *enkodning*. Den matematiska modellen kan innehålla minst en operation. För att komma fram till en sådan modell måste eleverna vara bekanta med de nödvändiga matematiska principerna samt dessutom kunna avgöra problemsituationens beskaffenhet.

Teoretiskt sett är en problemsituation att uppfatta som ett begrepp med sina begreppsattribut, vilka beskriver situationens karaktär. Ett exempel på en problemsituation är en jämförelsesituation där två tal skall jämföras. Själva jämförelsen karaktäriserar då situationen. Till en viss typ av problemsituation är en specifik operation eller matematisk princip förknippad. Så enkodningen består av att identifiera vilken typ av problemsituation, som texten beskriver samt av att bestämma härtill hörande matematiska modell (Bentley, 2008a).

2.2 Analys av data

Inom fenomenografin utgörs traditionellt data av utskrivna intervjuer. Det förutsätts att individernas berättelser speglar deras sätt att tänka och förstå olika fenomen. Men även individers beteenden har varit utgångspunkt för fenomenografiska analyser (Lindahl, 1996). Så korrekta eller inkorrekta lösningar på testuppgifter, som i princip är resultatet av elevers beteenden, är att betrakta som fenomenografiska data. Genom komparativa analyser av data vaskas uppfattningskategorier fram, först på gruppnivå, eftersom stabiliteten i uppfattningar är större där än på individnivå. Detta beror på att en individ kan visa upp både fragment av uppfattningar och mer eller mindre hela uppfattningar. Från ett fragment kan vara svårt att skapa en fullständig beskrivning av en kategori. När kategorierna, som betraktas som vetenskaplig kunskap, väl är beskrivna, kan analysen återvända till individnivå. Utifrån data identifieras då vilka uppfattningar varje enskild individ har exponerat. En individ kan både ha flera uppfattningar om samma begrepp och tillämpa olika beräkningsprocedurer på samma operation, vilket gör att variationen blir tvådimensionell, en som kvalitativt beskriver uppfattningarnas beskaffenhet samt en som beskiver antalet uppfattningar varje individ exponerat. Den senare kan därför också analyseras statistiskt. Ett antal individer i ett urval har var och en ett antal uppfattningar eller tillämpningar. I TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 kan emellertid en elev uppvisa endast en lösning per uppgift. Detta kan beskrivas statistiskt med frekvenser och relativa frekvenser, vilket gör att slutsatser om förhållanden i populationen kan dras från resultaten (Bentley, 2008a)

Då elevlösningar av uppgifterna i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 analyseras, ses alltså lösningarna som dokumenterade beteenden utifrån tillämpningar av procedurer och uppfattningar av begrepp. Precisionen i dokumentationen varierar givetvis och därmed kan också tolkningen vara mer eller mindre precis. Även om en lösning är väl dokumenterad kan det vara svårt att kausalt binda den till en speciell begreppsuppfattning eller tillämpning av en procedur. Om begreppsuppfattningen eller proceduren tidigare är känd kan detta avsevärt underlätta en sådan kausal analys. En viss osäkerhet kan dock finnas i det enskilda fallet genom att en lösning slumpvis skulle kunna överensstämma med tillämpningen av en viss procedur utan att eleven har tillämpat proceduren ifråga. Om däremot stora grupper av elever uppvisar samma lösningsprofil på en uppgift, så är det knappast troligt att detta enbart beror på slumpen. Sannolikt hänger detta i stället samman med en speciell tillämpning av en procedur eller tillämpning av en för sammanhanget icke avsedd procedur.

Mot ovanstående bakgrund kan ett lämpligt tillvägagångssätt vid analys av elevlösningar av uppgifter i matematik vara att först undersöka forskningsresultat inom området och utifrån detta dra slutsatser om elevernas uppfattningar om involverade begrepp och tillämpningar av procedurer. Denna studie grundar sig därför på antagandet, att elevers lösningar speglar deras uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer.

2.3 Reliabilitet och validitet

Reliabilitet är ett mått på noggrannhet i datainsamlingsprocessen (Swedner, 1978). I detta fall utgörs data av kategorier av elevlösningar som bedömts ytterst noggrant.

Validitet i fenomenografiska studier innefattar primärt intern och extern validitet. Den interna validiteten består dels av innehållsvaliditet och dels av konstruktionsvaliditet.

Innehållsvaliditet fångar hur väl otolkade data beskriver individers uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer. Därför måste frågor och problemuppgifter ha en sådan karaktär, att de tillåter en allsidig exponering av uppfattningar av begrepp och tillämpningar av procedurer. I annat fall kan uppfattningar och tillämpningar förbli oexponerade. Eftersom tillämpningar av vissa procedurer är kontextuellt betingade, måste en uppsättning av problemuppgifter innehålla en kontextuell variation. Innehållsvaliditeten utgör alltså ett kriterium på hur pass autentiska beskrivningarna är (Bentley, 2008a).

Konstruktionsvaliditet däremot, fokuserar tolkningsresultat av data och är därför ett mått på hur väl kategorierna speglar försökspersonernas förståelse av begrepp och tillämpningar av procedurer givet de data som föreligger (Bentley, 2008a).

Extern validitet berör begreppet generalitet. I en utvidgad fenomenografisk teoriram har generalitetsbegreppet en något annan betydelse än vid kvantitativa studier. Beskrivningskategorierna anses representera den variation som föreligger i populationen. Eftersom denna studie utförs i en utvidgad fenomenografisk teoriram förekommer också en statistisk behandling av data. I denna del av studien får generalitetsbegreppet en delvis annan innebörd, som berör möjligheten att från sampel dra sannolika slutsatser om populationen. Samplens representativitet blir då av central betydelse (Bentley, 2008a).

3. Några relevanta forskningsresultat

I det första avsnittet beskrivs den matematiska kunskapens beskaffenhet. Begreppsmodeller, som används flitigt i både grundskolan och gymnasieskolan, presenteras i det andra avsnittet. I algebra är variabel ett av de centrala begreppen och elevers förståelse av den beskrivs i avsnitt tre. Då algebra kan uppfattas på fyra fundamentalt olika sätt, kan också variabeln uppfattas olika. Detta redogörs för i avsnitt fyra. Algebrans betydelse avhandlas i avsnitt fem. I avsnitt sex beskrivs funktionsbegreppet och några av dess begreppsmodeller. I det sjunde avsnittet fortsätter beskrivningen av funktioners egenskaper. Därefter behandlas i avsnitt åtta serier och talföljder och i avsnitt nio forskningen om några centrala geometriska begrepp. Ibland används flera begreppsmodeller för ett och samma begrepp, något som kan få icke önskade konsekvenser. Detta analyseras i avsnitt tio. Transfer är ju oftast något önskvärt, men ibland generaliseras kunskap felaktigt. Sådan transfer kallas övergeneraliseringar och kan förklara en del av elevernas misstag. Övergeneraliseringar tas upp i avsnitt elva. Grafritande räknare är ett kraftfullt hjälpmedel. Detta belyses kortfattat i avsnitt tolv och därefter beskrivs ”the reversal effect” i avsnitt tretton. Slutligen sammanfattas kapitlet.

3.1 Den matematiska kunskapens beskaffenhet

Egenskaperna hos procedurell och konceptuell kunskap samt hur dessa kommer till uttryck i undervisningen och i läroböcker redovisas i det första delavsnittet. Hur de två kunskapsslagen speglas i elevers lösningar av grupper av testuppgifter och vilken inverkan uppehåll i undervisningen kan ha på elevernas prestationer analyseras därefter.

3.1.1 Procedurell och konceptuell kunskap och undervisning

Procedurell kunskap innehåller procedurer, framför allt för problemlösning. Procedurer består av steg eller handlingssekvenser och innefattar inte primärt förståelse av begrepp. Konceptuell kunskap å andra sidan kan ses som “explicit or implicit understanding of the principles that govern a domain and of the interrelations between pieces of knowledge in a domain” (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999, s. 175), det vill säga begreppsligt inriktad kunskap. Detta innebär, att i denna kunskapstyp har förståelse av begrepp, som knyter ihop olika sammanhang eller kontexter, en central roll.

Procedurer är oftast intimt kopplade till en speciell typ av problemsituation och är därför kontextuellt betingade. För att tillämpas på en annan typ av problemsituation, så måste proceduren oftast först modifieras. En sådan transferering är därför inte så lätt att utföra utan föregående träning. Däremot kan procedurer från flera olika kontexter eller problemsituationer sammanfattas med en övergripande gemensam princip som då kallas metakognitiv procedur (Delazer, 2003). Om problemslösning kopplat till ett visst innehåll tränas i många olika kontexter kan alltså konceptuell kunskap genereras.

Kärnfulla matematiska principer är nära besläktade med metakognitiva procedurer. En sådan princip knyter ihop olika matematiska områden och används därför återkommande i undervisningen. Exempelvis har variabler eller bokstavsbeteckningar olika betydelser i olika kontexter men kan trots detta behandlas på ett likartat sätt oberoende av kontexten (Baroody, 1987).

Den procedurella kunskapen har alltså oftast en lokal beskaffenhet, där olika delar är mer isolerade, medan den konceptuella karaktäriseras av, att olika delar knyts ihop av begrepp eller av kärnfulla matematiska principer. Alltså består den konceptuella undervisningen av både procedurer och begrepp, medan den procedurella undervisningen i princip endast innefattar procedurer.

Konceptuell kunskap kan generera procedurell, då den konceptuella anses vara ett slags facit för förändring av procedurer. Elever kan kontrollera om en modifiering är korrekt genom att se hur den stämmer med procedurens begreppsliga förankring. Däremot kan procedurell kunskap endast undantagsvis och under speciella omständigheter generera konceptuell kunskap (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Bentley, 2008a). Som tidigare nämnts kan träning av procedurer i många olika kontexter generera metakognitiva procedurer som sammanfattar principer från olika kontexter, som då blir en form av konceptuell kunskap.

Nya begrepp lärs in då ett eller flera begreppsattribut erfars skilja sig från tidigare inlärda begrepp. Så förståelse av nya begrepp bygger dels på tidigare inlärda begrepp och dels på de nya begreppsattributen, som är särskiljande. Dessa särskiljande attribut kan lättare erfaras om kontexten eller sammanhanget varieras. Trots detta kan det vara svårt att avgöra om ett attribut är en del av kontexten eller om det tillhör begreppet. Följaktligen behöver flera procedurer i olika kontexter erfaras. Då kan det finnas en möjlighet för eleverna att identifiera de olika attributen, som bygger upp procedurernas begreppsliga förankring. Således behövs en variation av kontexten för att procedurell kunskap skall kunna generera konceptuell kunskap. Detta är en tillämpning av variationsteorin inom fenomenografin (Bentley, 2008a; Marton & Booth, 2000).

Enskilda procedurer behöver inte förstås för att kunna tillämpas, hävdade Delazer (2003), och refererade Giaquinto (1995), som menade att:

> ***... pure knowledge of an arithmetic principle is not equivalent to knowledge that requires understanding. That is, a principle may be successfully applied without being understood and thus consists of procedural knowledge. As an example Giaquinto stated that one may be taught that $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ without knowing why that should be true. Several other examples may be given, and it is certainly a common experience for pupils to apply principles without understanding their conceptual basis (Delazer, M., 2003).***

Sålunda kräver enskilda procedurer ingen begreppslig förståelse för att kunna tillämpas. Om de tillämpas i flera olika kontexter kan en metakognitiv princip abstraheras, som kan innebära, att en viss begreppslig förståelse då skapas (Delazer, 2003).

Kieran (2003) menar, att det är viktigt att förstå procedurer. Hon skiljer mellan procedurell förståelse och konceptuell förståelse. Procedurell förståelse innebär en förmåga att operera med tal. I algebra kan det exempelvis vara hur beräkningen av ett uttrycks värde går till, då två variabler är kända. Begreppslig förståelse innebär, att operationer genomförs på uttryck och ekvationer för att leda till nya uttryck och ekvationer. Dessa operationer är symboliska och innebär inte någon beräkning. Kilpatrick, Swafford, och Findell, (2001) menade att "the study of algebra begins as [students] observe how numbers form systems and as they generalize number patterns" (p. 20). Tyvärr, menade Kieran (2003), att sådan konceptuell undervisning av algebra är sällsynt.

Inom den internationella matematikdidaktiska forskningen har sedan länge frekvent förekommit upprop för att inrikta undervisningen av algebra i gymnasieskolan mot mer förståelse av begrepp (Vendlinski, 2009; Bransford, Brown, & Cocking, 1999; Donovan & Bransford, 2005; Saxe, Gearhart, & Seltzer, 1999; Fuson, Kalchman, & Bransford, 2005; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Bransford et al., 1999; Cooney & Wiegel, 2003; Donovan, Bransford, & Pellegrino, 1999; Kamii & Dominick, 1998; Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006; National Mathematics Advisory Panel, 2008; NCES, 1999, 2001; Carpenter & Lehrer, 1999; Hiebert & Carpenter, 1992; Porter, 1989; Schmidt, McKnight, Houang, Wang, Wiley & Cogan, 2001; Stodolsky, 1988; Douglas, 1986; Steen, 1989; Tall 1991; Tucker 1988; Vinner, 1989). Manipulation av symboler i undervisningen har överbetonats och därmed har förståelsen av centrala begrepp blivit lidande (Zimmermann, 1991). Alfred North Whitehead (1911/1948) betonade tidigt, att de matematiska begreppen skall ha en central plats i undervisningen:

> ***The reason for this failure of the science to live up to its great reputation is that its fundamental ideas are not explained to the student disentangled from the technical procedure which has been invented to facilitate their exact presentation in particular instances. Accordingly, the unfortunate learner finds himself struggling to acquire knowledge of a mass of details, which are not illuminated by any general conception (Whitehead, 1911/1948, pp. 1–2).***

Matematiska begrepp kan alltså knyta ihop olika delar av matematiken. Om inte sådana begrepp lärs in, kommer eleverna att lära sig en massa isolerade detaljer utan inbördes sammanhang. I sådana fall kan det verka som om eleverna är framgångsrika för de löser de uppgifter de skall, men så fort uppgifterna avviker från det invanda mönstret misslyckas eleverna. Är dessutom uppgifterna anpassade till de speciella procedurer, som eleverna övat in och lärt sig, så är situationen än mer bedräglig. Eleverna har inte lärt sig särskilt mycket och har inte heller förstått procedurernas begreppsliga förankring eller de centrala begreppen inom området. Denna situation, som matematikundervisningen i många länder befinner sig i, har flera forskare länge varnat för (Douglas, 1986; Steen, 1989; Tucker 1988; Vinner, 1989; Tall, 1988; 1996; Zimmermann, 1991; Eisenberg, 1992; Selden, Mason & Selden, 1989; 1994; Vendlinski, 2009). INOM-gruppen med Ference Marton i spetsen varnade redan på 1970-talet för att inlärning utan innehållsstruktur, så kalland atomistiskt förhållningssätt till kunskap, hade negativa långsiktiga konsekvenser. Försökspersoner med atomistiskt förhållningssätt glömde betydligt snabbare än försökspersoner med holistiskt förhållningssätt, vilka hade förmåga att uppfatta innehållsstrukturen (Marton & Booth, 2000).

En fråga, som kan ställas, är hur denna situation i gymnasieskolan har kunnat uppstå. Svaret på frågan är ganska givet, för om elever har varit utsatta för en procedurell undervisning i nio år i grundskolan, så har de en grundmurad uppfattning av vad matematik är och vad det innebär att lösa matematiska uppgifter. Bentley (2009b) fann vid en jämförandeanalys av svenska elevers matematikkunskaper med elevers matematikkunskaper i Hong Kong och Taiwan, att den procedurella inriktningen i Sverige bjärt kontrasterade mot den begreppsligt inriktade i de två ostasiatiska länderna. Svenska elever löste spridda uppgifter, medan eleverna i Hong Kong och Taiwan uppvisade mycket sammanhängande lösningsmönster. Dock var de svenska eleverna bättre än sina ostasiatiska kamrater på rutinuppgifter, medan de svenska eleverna misslyckades på icke-rutinuppgifter, som krävde modifieringar av lösningsprocedurerna. Nästan ingen av de svenska eleverna löste samtliga uppgifter i de undersökta lösningsmönstren, medan däremot närmre hälften av de ostasiatiska eleverna gjorde det.

Det är alltså helt avgörande, om eleverna kan modifiera en procedur, så att den passar fler kontexter. En sådan överföring av kunskaper från ett område till ett annat brukar benämnas transfer. Konceptuell kunskap kan underlätta transfer, genom att eleverna har ett slags facit för att kontrollera om en modifiering är korrekt eller inte. Detta gör att inkorrekta procedurer kan sorteras bort. (Bransford, 1979; Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Shepard, 2001).

Även läroböckers inriktning kan ha betydelse för uppfattningar av matematikens beskaffenhet. Den procedurella inriktningen av läroböcker i Finland har studerats av Haapasalo (2003), som hävdade att

> ***Textbook writers and teachers seem to approach most topics in school mathematics procedurally. With regards to the gradient, they like to serve it as equation, and get pupils, with great hurry, to do mechanical manipulations with it, without caring too much about what to do and why the particular procedures work. Activities which allow pupils to produce the right answers without knowing much about the relevant concept attributes can lead the teacher to over-expectations concerning the child's ability to get out of simple context-oriented – or sometimes pure mechanical – situations (Haapasalo, 2003, s. 3).***

De centrala inslagen i den procedurella inriktningen av algebran utgörs alltså ofta av manipulationer av bokstavbeteckningar.

En procedurell uppfattning av matematikens beskaffenhet i gymnasieskolan kan inte brytas så lätt även om ihärdiga försök görs. I resultatkapitlet analyseras lösningsmönstren i flera av blocken i TIMSS Advanced 2008 och slutsatser dras om undervisningens inriktning i gymnasieskolan (Se avsnitt 6.5). I nästa avsnitt görs en fördjupad analys av hur lösningsmönster kan spegla undervisningens inriktning.

3.1.2 Lösningsmönster – En indikation på undervisningens inriktning

De två kunskapstyperna, procedurell och konceptuell, speglas i elevernas lösningar av testuppgifter. Inte bara i lösningen av enskilda uppgifter utan också i antalet lösta uppgifter, vilka avser testa samma begrepp eller företeelse. Om eleven i stort har tillägnat sig procedurell kunskap, så kännetecknas den av procedurer kopplade till specifika kontexter. Så fort ett problem avviker från den invanda kontexten, så kan inte proceduren tillämpas utan modifieringar krävs, något som ofta innebär en extra svårighet för eleven, som då inte kan lösa flertalet sammanhängande uppgifter utan endast spridda uppgifter. Har däremot eleven tillägnat sig mer begreppslig kunskap, så innebär modifieringen av procedurerna ingen avsevärd svårighet, något som då kan leda till ett mer sammanhängande lösningsmönster. Då har fler uppgifter lösts och speciellt sådana, som testar ett och samma begrepp (Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006; National Mathematics Advisory Panel, 2008; NCES, 1999, 2001; Carpenter & Lehrer, 1999; Hiebert & Carpenter, 1992; Porter, 1989; Schmidt, McKnight, Houang, Wang, Wiley & Cogan, 2001; Stodolsky, 1988; Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Bentley, 2008a; Bentley i Skolverket, 2009a).

I kapitlet teoretiska förutsättningar beskrivs att en elev kan ha flera parallella uppfattningar om ett och samma begrepp. Vilken av dessa uppfattningar, som exponeras i en problemsituation, bestäms troligen av uppgiftens karaktär. På analogt sätt visade det sig vara med procedurer. En elev kan behärska flera procedurer, men vilken som uppvisas tycks bero på uppgiftens karaktär. De begreppsuppfattningar och procedurer, som uppvisas innehar de facto eleven. Om eleven inte uppvisar någondera, så kan eleven detta till trots ha en uppfattning eller behärska en procedur. Uppgiften kanske inte triggar denna speciella uppfattning. Det är då inte möjligt att dra slutsatsen, att eleven inte har någon uppfattning eller inte behärskar någon procedur. Den slutsats som kan dras är, att eleven inte har uppvisat någon i den speciella testsituationen. En procedurellt inriktad undervisning kan vara en avgörande orsak till, att procedurer inte exponeras, då testuppgifterna sällan ansluter exakt till de problemsituationer, som eleverna stött på i undervisningen (Bentley 2008a; Bentley i Skolverket, 2008c; 2009a).

Utifrån de lösningsmönster som exponeras kan slutsatser dras om undervisningens beskaffenhet. Har spridda uppgifter lösts pekar detta på en procedurellt inriktad undervisning, medan sammanhängande lösningsmönster indikerar en mer konceptuell inriktning. (Se också avsnitt 3.5)

3.1.3 Undervisningsuppehåll och dess betydelse för elevprestationer

Eleverna från D-kursen i gymnasieskolan hade avslutat sin utbildning höstterminen innan testet i TIMSS Advanced 2008 ägde rum på våren eller till och med på vårterminen året innan. Inom den internationella forskningen har inverkan av sådana uppehåll i undervisningen undersökts. En forskningsöversikt har gjorts av Cooper, Nye, Charlton, Lindsay och Greathouse (1996). De fann att "First the results indicate that summer loss was more dramatic for math-related subject areas than for reading or language" (s. 260). Det var alltså tydligt att speciellt matematikprestationerna påverkades negativt. ”The strong negative impact of summer break on these subject areas [mathematics and spelling] was evident not only in terms of relative losses but in terms of absolute losses, as well" (s. 260). Så den negativa påverkan på elevernas prestationer, som det innebär att avsluta ett ämne en termin innan testet genomförs, tycks vara oomtvistad.

Det finns emellertid skillnader, vad gäller glömska, mellan procedurell och konceptuell kunskap. Procedurell kunskap kräver mer praktiserande för att inte klinga av. Cooper et al. förklarade att ”Cognitive psychologists suggest that factual and procedural learning requires extensive practice, while conceptual understanding requires a lot of experience but not necessarily practice" (Cooper & Sweller, 1987; Geary, 1995 in Cooper et al., 1996, s. 260). Så procedurell kunskap är mer utsatt för glömska under lov och andra längre uppehåll, om den inte praktiseras. Om konceptuell kunskap är baserad på omfattande erfarenhet så kräver den alltså inte fortsatt erfarenhet för att inte klinga av. Det finns anledning att misstänka, att undervisningen i gymnasieskolan i likhet med grundskolan har en procedurell inriktning (Douglas, 1986; Steen, 1989; Tall 1991;

Tucker 1988; Vinner, 1989, Zimmermann, 1991) och att elevernas kunskaper då är mer utsatta för glömska än om inriktningen varit mer konceptuell och förståelse av begrepp och matematiska principer varit i fokus (Se gärna resultatavsnitt 6.5).

3.2 Begreppsmodellers kvalitetskriterier

Förenklingar och konkretiseringar av matematiska begrepp i skolmatematiken brukar benämnas begreppsmodeller. De är till för att göra det matematiska innehållet lättare tillgängligt för eleverna. En avgörande fråga i detta sammanhang är därför om den matematiska strukturen förvrängs eller onödigtvis förändras. Kvalitén hos modellerna har därför stor betydelse och bedöms utifrån ett antal kvalitetskriterier.

Den *strukturella validiteten* är ett mått på hur väl den matematiska strukturen bevaras i den förenkling, som modellen representerar. Validiteten är låg om viktiga karaktäristika förvrängs eller utelämnas. Om egenskaper, som inte ingår i begreppets korrekta matematiska definition, läggs till i modellen kan detta orsaka, att begreppet uppfattas felaktigt och då är den strukturella validiteten omedelbart låg (Charles, Nason & Cooper, 1999).

Visuella modeller eller visuella föreställningar om vissa begrepp kan minska den strukturella validiteten. Speciellt gäller detta konkreta föreställningar som exempelvis att en integral skall vara arean under en positiv graf. Då integralen av en funktion, vars graf bitvis ligger under x-axeln, skall beräknas, så vet inte eleverna hur dessa areor under x-axeln skall behandlas (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997).

Elevers erfarenheter har stor betydelse för förståelse av nya begrepp. Därför studeras också begreppsmodellernas *ekologiska validitet*, som mäter hur väl anpassad modellen är till elevernas erfarenheter i stort. Strukturer från elevernas erfarenhetsvärld kan spegla matematiska strukturer och på så sätt underlätta inlärningen (Hiebert & Carpenter, 1992; Charles et al., 1999). Även nästa kriterium berör denna fråga.

Begreppsmodellers komplexitet är en annan egenskap, som kan påverka framgången i undervisningen. Modellen måste vara så enkel, att den matematiska strukturen eller principen, som den skall illustrera, tydligt framträder. I annat fall läggs elevernas kognitiva energi på att lära sig modellen och inte på det begrepp, som den representerar. Detta kriterium benämns *enkelhetsvaliditet* (Charles et al., 1999).

Om en begreppsmodell kan vara vägledande vid beräkningar eller vid andra operationella processer som exempelvis problemlösning, så anses den *operationella validiteten* vara hög. Flera av kvalitetskriterierna har en viss överlappning och skall därför uppfattas som ett hjälpmedel att analysera olika begreppsmodeller och inte som ett absolut mått på deras kvalité.

3.3 Elevers förståelse av variabelbegreppet

Utgångspunkten för redogörelsen är forskningsöversikten och resultatet i Bentleys studie (2008a). Elever kan missuppfatta variabelbegreppet på åtminstone tre olika sätt. Dessa brukar benämnas icke-symbolisk representation, sifferrepresentation och konkret objektsrepresentation.

Icke-symbolisk representation innebär, att variabeln uppfattas som om den inte har någon symbolisk funktion. Om ett uttryck $3a - b + 2a$ skall förenklas, så blir resultatet med den här uppfattningen, 5. Hänsyn tas bara till koefficienterna och inte till bokstavsbeteckningarna, vilka alltså ignoreras. Uppfattningen är huvudsakligen kontextoberoende och får anses som den minst utvecklade av de tre uppfattningarna.

Sifferrepresentation betyder, att variabeln uppfattas representera en siffra och inte ett tal. Om exempelvis $a = 4$ så uppfattas $3a$ som 34 och inte som $3 \cdot 4$ det vill säga 12. Genom att dröja med att utelämna multiplikationstecknet kan misstaget undvikas i hög grad.

I missuppfattningen, objektsrepresentation, som kan orsakas av en begreppsmodell, uppfattas variabeln representera ett konkret objekt. Modellen används för att förenkla additiva uttryck som exempelvis $3a - b + 2a$, där a står för apelsiner och b för bananer. Genom att utföra beräkningarna av apelsiner och bananer var för sig förenklas uttrycket. Problemet uppstår, då eleverna inte inser begränsningen i applikationsområdet utan tillämpar modellen även på multiplikativa förenklingar. Apelsin gånger apelsin saknar begreppslig innebörd och vägleder inte heller eleverna operationellt. Modellen har en procedurell karaktär.

Flera korrekta uppfattningar om variabelbegreppet finns också. Kontexten avgör variabelns betydelse. I en ekvation av första graden representerar variabeln ett okänt specifikt tal och i en funktion representerar den ett generellt tal. Den mest generella uppfattningen är den abstrakta symboliska representationen, vilken samtidigt är den mest matematiskt utvecklade uppfattningen. Då representerar variabeln ett element i en mängd och inga restriktioner om elementets beskaffenhet finns. Denna uppfattning är vanlig inom topologin.

Formler är en kontext, i vilken variabeln representerar en storhet. I formeln $F = m \cdot a$, representerar a storheten acceleration. En sådan uppfattning benämns sålunda storhetsuppfattning.

En av de vanligaste uppfattningarna är, att variabeln representerar ett generellt tal. I en funktionskontext är ju detta en korrekt uppfattning och avgörande för att förstå funktioners grafer. Den generella talbeteckningen kan även förekomma i uttryckskontexter, då utgångspunkten exempelvis är aritmetiska mönster.

En av de korrekta uppfattningarna, som emellertid även kan vara inkorrekt beroende på i vilken kontext variabeln befinner sig, är specifikt okänt tal. I en ekvationskontext kan denna uppfattning vara korrekt medan i en funktionskontext inkorrekt. Flera internationella studier har visat, att en tredjedel av eleverna i urvalen haft uppfattningen specifikt okänt tal även i kontexter där detta inte varit korrekt.

Kontexten bestämmer alltså variabelns betydelse. Vid sidan av de korrekta uppfattningarna förekommer ett antal missuppfattningar.

3.4 Olika uppfattningar om algebra

Usiskin (1999) försökte beskriva skillnaderna mellan skolalgebra och universitetsalgebra. Han menade, att skolalgebra kan uppfattas på fyra olika sätt, som generaliserad aritmetik, som procedurer för problemlösning, som relationer mellan storheter och som topologiska strukturer.

Med generaliserad aritmetik menade han aritmetiska mönster som till exempel

$3 \cdot 4 = 12$
$2 \cdot 4 = 8$
$1 \cdot 4 = 4$
$0 \cdot 4 = 0$

Detta kunde utvidgas till att även omfatta de negativa hela talen

$-1 \cdot 4 = -4$
$-2 \cdot 4 = -8$
$-3 \cdot 4 = -12$

Ovanstående mönster kunde på ett sammanfattande sätt beskrivas med en variabel

$-x \cdot 4 = -(4x)$

Variabeln representerade där ett generaliserat tal. Vid modellering av företeelser med en repeterande karaktär kunde liknande formler användas. Med denna uppfattning, som utgångspunkt, blev den avgörande inriktningen av undervisningen enligt Usiskin (1999) att översätta och generalisera.

Uppfattades algebra handla om procedurer för problemlösning, så låg fokus på något helt annat. Om utgångspunkten var den förra uppfattningen, generaliserad aritmetik, som till exempel tre gånger ett speciellt tal plus fyra och summan därefter sattes till 22, så hade fokus flyttats över till nästa uppfattning, nämligen till procedurer för problemlösning. Den handlade om att hitta lämpliga procedurer, så att ekvationen kunde lösas. Variabeln uppfattades som ett okänt specifikt tal och undervisningen syftade till att förenkla och lösa (Usiskin, 1999).

I nästa uppfattning sågs algebra, som en relation mellan storheter. I exempelvis formeln $A = b \cdot h$, vilken beskriver arean av en rektangel, finns en relation mellan de tre storheterna area, bas och höjd. Inget okänt tal, som skall beräknas, ingår i relationen, utan variablerna representerar generaliserade tal. Denna uppfattning är en förutsättning för att introducera oberoende och beroende variabler samt funktioner. Undervisningen fokuserade då att beskriva funktioner och att undersöka hur relationen förändrades, då en av variablerna varierades i till exempel en graf (Usiskin, 1999).

Den sista uppfattningen får anses vara den mesta avancerade och i den sågs algebra som topologiska strukturer. Den innefattade studiet av topologiska grupper, ringar, kroppar och vektorrum. Variabeln representerade här inte nödvändigtvis ett tal utan ett element i en mängd, vars element har vilken beskaffenhet som helst. Undervisningen hade en inriktning på manipulation och bevis (Usiskin, 1999).

I var och en av dessa fyra uppfattningar om algebra dominerar olika uppfattningar av variabelbegreppet, som generaliserat tal, som okänt specifikt tal, som generaliserat tal som kan varieras och sist som en abstrakt symbolisk representation.

3.5 Algebrans betydelse

I skolundervisningen bör algebrans betydelse inte underskattas. Algebra ses ofta som inkörsporten till de naturvetenskapliga och tekniska utbildningarna. De begreppsliga hörnstenarna i dessa utbildningar kommer från algebran (Driver, 1986; Harel, Selden, & Selden, 2006) och innebär en träning i abstrakt tänkande, som är en av förutsättningarna för att kunna göra beskrivningar av vår omgivande värld. Algebra ger eleverna tillgång till ett generaliserande språk, som gör, att olika typer av problem kan lösas eller förklaras med en gemensam uppsättning algoritmer eller beräkningsuppställningar (Usiskin, 2004). Studier i algebra är för många elever emellertid inte nyckeln till fortsatta studier utan utgör snarare ett hinder (Ball, 2003; Berkner & Chavez, 1997). I många stater i USA är antalet studerande, som blir underkända, anmärkningsvärt stort, runt 90 procent. Vendlinski (2009) informerar om ett test, som ges regelbundet i staten Kalifornien, på vilket endast drygt 20 procent av eleverna blivit godkända mellan åren 2001 och 2008. Trots omfattande försök att förbättra undervisningen i algebra och trots stora resurssatsningar tycks försämringen fortsätta. Han menar, att den procedurella inriktningen av undervisningen är en av huvudorsakerna till det misslyckade resultatet.

Vid övergången från aritmetik till algebra så bygger enligt Vendlinski (2009) undervisningen sällan på, vad eleverna faktiskt lärt sig i form av föreställningar om begrepp, intuition och problemlösningsstrategier (Bransford, Brown, & Cocking, 1999; Donovan & Bransford, 2005). I stället ses matematiken som en samling regler, procedurer och fakta, som skall memoreras (Saxe, Gearhart, & Seltzer, 1999). En procedur presenteras ofta i undervisningen åtskild från sin betydelse eller avskild från betydelsen av sitt resultat (Fuson, Kalchman, & Bransford, 2005; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Bransford et al., 1999; Cooney & Wiegel, 2003; Donovan & Bransford, 2005; Donovan, Bransford, & Pellegrino, 1999; Kamii & Dominick, 1998). Konsekvensen av denna undervisning blir enligt Vendlinski (2009)

> ***As a results of this type of instruction, most K-12 mathematics students do not construct the meaning of core concepts and principles, cannot relate concepts to problem-solving skills and procedures, and view mathematics as a collection of isolated, meaningless procedures to be memorized, not understood (Clarke, Keitel, & Shimizu, 2006; National Mathematics Advisory Panel, 2008; NCES, 1999, 2001; Carpenter & Lehrer, 1999; Hiebert & Carpenter, 1992; Porter, 1989; Schmidt, McKnight, Houang, Wang, Wiley & Cogan, 2001; Stodolsky, 1988) (s. 3).***

Följaktligen förstår inte eleverna centrala begrepp och kan inte relatera dessa till sin problemlösningsförmåga utan ser matematiken som en samling isolerade, meningslösa procedurer, som skall memoreras och inte förstås.

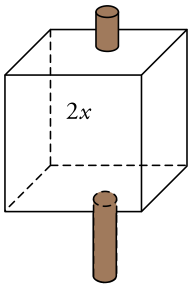
I avsnitt 3.1.2, som beskriver lösningsmönster, framgår, att just procedurell kunskap yttrar sig som spridda uppgifter lösta på test. Även om en grupp om åtta uppgifter testar ett och samma begrepp, så löser eleverna oftast endast de uppgifter vars kontext de stött på tidigare. Om inte en omfattande träning i att lösa uppgifter i olika kontexter förekommit så löser eleverna endast några få uppgifter i en sådan grupp. Det rör sig alltså inte om två specifika uppgifter, som löses av alla, utan om olika kombinationer av två uppgifter, som löses av olika individer.

3.6 Funktioner och dess begreppsmodeller

En funktion kan ses som en tillordning mellan elementen i två mängder. För att en tillordning skall vara en funktion måste dessutom följande villkor vara uppfyllda. Låt elementen i definitionsmängden betecknas med x och elementen i värdemängden med y. Då skall gälla om x_1 tillordnas y_1 och om x_2 tillordnas y_2, att om $x_1 = x_2$ så skall det medföra att $y_1 = y_2$. Funktioner betecknas med f och funktionsvärdet med $f(x) = y$. Detta matematiska villkor innebär, att till varje x får tillordnas högst ett värde på y, och alltså inte två. Däremot kan flera x tillordnas samma värde på y. Denna definition av begreppet funktion förekommer frekvent i läromedel.

Flera begreppsmodeller för funktioner finns. En av de vanligaste, som åskådliggörs i figur 1 nedan, benämns maskinmodellen.

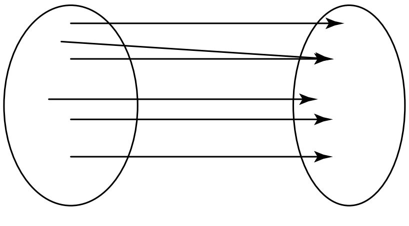
Figur 1 Maskinmodellen av funktionen $f(x) = 2x$



Maskinen kan endast ta emot ett värde på x åt gången, medan en funktion kan beskriva oändligt många värden. Funktioners grafer skulle vara omöjliga att förstå annars. Variabeln x måste kunna genomlöpa oändligt många värden, för annars blir det ingen graf utan i princip en punkt. Att maskinmodellen endast kan ta ett värde åt gången är egentligen en allvarlig inskränkning, som negativt påverkar den strukturella validiteten. Inte heller kan någon direkt operationell vägledning fås om exempelvis en funktions nollställen. Så även den operationella validiteten är svag. Trots dessa två inskränkningar, menar några forskare, att modellen ändå kan bidra till en ökad förståelse av funktionsbegreppet (McGowen, DeMarois & Tall, 2000).

Avbildningsmodellen är den andra begreppsmodellen för funktioner och visas i figur 2 nedan. Den kan endast visa ett ändligt antal värden på variabeln x och är inte alls lika lätt att förstå. Dessutom ger den liten operationell vägledning om till exempel en funktions nollställen (Tall & Bakar, 1992). I princip kan den endast återge funktioner, vars definitionsområde innehåller ett ändligt antal diskreta värden.

Figur 2 Avbildningsmodell, en funktion



Den tredje begreppsmodellen för funktioner benämns uttrycksmodellen och representerar även den en typ av avbildning. Däremot har den inte alls de allvarliga inskränkningarna som det två första. I modellen beskrivs funktioner med uttryck som till exempel:

$$f(x) = 2x + 5$$

I detta uttryck kan variabeln x genomlöpa oändligt antal värden, vilka är relaterade till den beroende variabeln, y (Tall & Bakar, 1992). Detta gör den strukturella validiteten högre. Däremot kan den ekologiska validiteten vara lägre, då denna typ av uttryck normalt inte tillhör elevernas vardagserfarenheter.

Inom algebran används alltså flera begreppsmodeller, vilka har både för- och nackdelar. De begreppsmodeller som används i undervisningen speglas också i elevernas uppfattningar av funktionsbegreppet.

3.7 Funktioners egenskaper

Elevers uppfattningar av funktioner kan påverkas av deras uppfattningar eller missuppfattningar av grafer. Detta redovisas i första avsnittet. Då funktioners grafer konstrueras, har nollställen en avgörande betydelse, vilket analyseras i avsnitt två. Gränsvärdens betydelse för kontinuitet, derivata och integraler kan inte underskattas och analyseras i de följande avsnitten.

3.7.1 Uppfattningar av funktioner och dess grafer

Thompson (1994) sammanfattade de olika uppfattningarna av funktionsbegreppet i den samtida forskningen. Den första uppfattningen avser, att funktionen ger en *implicit uppmaning att utföra en beräkning*. Funktionsuttrycket eller regeln, som beskriver funktionen, uppfattas då som en uppmaning till beräkning. Eleverna kan alltså inte se regeln eller uttrycket som ett resultat av något. Då en funktion uppfattas som en *process*, så ses funktionsuttrycket som något man erhåller vid beräkning. *Objektsuppfattningen* innebär, att elever kan resonera om funktioner och med funktioner som objekt.

Motsvarighetsuppfattningen kan bäst förklaras med två mängder. Varje element i den första mängden motsvarar högst ett element i den andra mängden. Dessa ordnade par är ju den version av funktioners definition eller begreppsmodell, som kritiserats mest på grund av dess låga operationella validitet (Thompson, 1994).

Storheters samvariation innebär, att de två variablerna varierar tillsammans. När x, den oberoende variabeln, varierar, så varierar y efter ett bestämt mönster nämligen efter funktionsuttrycket (Thompson, 1994).

Algebraiska och grafiska representationer är två olika symbolsystem, som båda tillsammans används för att konstruera och definiera funktionsbegreppet. En funktion presenteras vanligen algebraiskt genom uttrycksmodellen (se föregående avsnitt), som kan sägas utgöra ett exempel på storheters samvariation. Genom att konstruera ordnade talpar kan sedan den grafiska representationen erhållas i ett koordinatsystem.

Elever har ofta missuppfattningar om vad som konstituerar en funktion. Dessa kan ha sina rötter i begränsningar i variationen av exempel, som eleverna möter i sin undervisning. Även övergångar mellan den grafiska och den algebraiska representationen kan bli inkorrekta beroende på förvirring angående olika beteckningar (Leihardt, Zaslavsky & Stein, 1990). Schoenfeld, Smith och Arcavi (1990) genomförde en detaljerad analys av elevers lärande på avancerad nivå och fann, att viss förvirring rörande den grundläggande förståelsen av koordinatsystem kunde vara orsak till flera missuppfattningar rörande funktioner.

Elever kan även ha inkorrekta uppfattningar om hur funktioners grafer skall se ut. Detta kan innebära, att vissa grafer inte klassificeras som tillhörande funktioner, fast de i själva verket är det. Överdrivna krav på grafens beskaffenhet kan ofta vara orsaken (Lovell, 1971; Markovits et al. 1986; Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989). De särskilda kraven på grafens beskaffenhet kunde exempelvis vara linjäritet, symmetri, strängt växande eller avtagande, alltså egenskaper, som egentligen inte har med funktioners definition att göra. Markovits et al. (1986; 1988) fann, att om elever visades två punkter i ett koordinatsystem och ombads rita en graf genom dem, så ritade de oftast en rät linje. En annan egenskap, som visade sig vara frekvent förekommande bland elever, var, att funktionen måste vara föränderlig. Det måste finnas en variabel, som kan variera. Så konstanta funktioner dömdes ut som icke-funktioner (Marnyanskii, 1975; Markovits et al., 1986). Även Barnes (1988) erfor, att en majoritet av gymnasieelever ansåg, att exempelvis $y = 4$ inte var en funktion, eftersom den inte var beroende av x. Detta kan ha sin orsak i, att läroböcker ibland gör en alltför kraftig åtskillnad mellan variabler och konstanter, en distinktion, vilken lätt kan övergeneraliseras till funktionsbegreppet. Även delvis konstanta funktioner dömdes ut, vilket tycktes bero på, att relationer i vilka flera x-värden tillordnas samma y-värde, inte ansågs vara funktioner. Detta kan bero på en förväxling av x- och y-värden, eftersom i definitionen av en funktion föreskrivs att ett x-värde inte får tillordnas flera olika y-värden. (Lovell, 1971; Markovits et al. 1986; Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989). Flera forskare menade, att elever utifrån funktionens definition, att varje x-värde skall avbildas på ett och endast ett y-värde, kunde få uppfattningen att även omvändningen gäller, det vill säga att varje y-värde avbildas på ett och endast ett x-värde. Eleverna förstår alltså inte, att två olika x-värden kan avbildas på samma y-värde. Konsekvensen blir då, att eleverna uppfattar funktioner som ett-till-ett-avbildningar (Markovits et al. 1986; Marnyanskii, 1975; Thomas, 1975; Vinner, 1983).

Trots att elever kände till funktioners formella definition, så kunde de ändå behålla restriktionerna på grafernas beskaffenhet och döma ut grafer, som faktiskt representerade funktioner (Vinner, 1983). Att elever kan ha flera parallella uppfattningar om ett begrepp har senare blivit uppenbart (Bentley, 2008c).

Uppgifter, som handlar om översättning mellan funktionsuttryck och graf, utgår oftast från funktionsuttrycket och utifrån det skall grafen bestämmas. Detta gör, menade Janvier (1987d), att elever i allmänhet saknar tillräcklig träning för att kunna lösa uppgifter, där utgångspunkten är grafen och inte funktionsuttrycket. Carpenter, Corbit, Kepner, Lindquist och Reys (1981) fann, att 17-åriga gymnasieelever hade svårigheter att konstruera en korrekt graf för en linjär funktion (18 %). Att bestämma en linjär funktions uttryck från dess graf var ännu svårare (5 %). Vid en sådan översättning av funktionsbegreppet från en representationsform till en annan är det alltså inte likvärdigt åt vilket håll man går. Även andra forskares resultat bekräftar denna bild (Stein & Leinhardt, 1989; Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986). Kerslake (1977; 1981) fann, att konstanta funktioner var speciellt svåra att utifrån en graf bestämma funktionsuttrycket för. Men även att konstruera grafen, då uttrycket var känt, visade sig vara svårt. Zalslavsky (1988) upptäckte, att kvadratiska funktioner likaså kunde vara mycket besvärliga att översätta, speciellt då någon av koefficienterna var noll. Han undersökte även elevers förmåga att identifiera vilken funktion, som svarade mot en graf av en parabel, samt vilken graf, som respresenterade en given funktion och fann att, oavsett uppgiftens formulering så skedde översättningen i samma riktning från funktion till graf (Zalslavsky, 1987).

3.7.2 Funktioners nollställen

Bagni (2000) studerade elevmisstag i motsvarande gymnasieskolan. Han beskrev en situation med en elev, som löste en ekvation

$$5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

på ett inkorrekt sätt. Den negativa roten –2 saknades. Att lösa en sådan ekvation motsvarar ju bestämning av en funktions nollställen. Läraren korrigerade eleven och visade en lösning med faktorteoremet på följande sätt,

$$5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = +2 \surd x = -2$$

Efter lärarens förklaring uppvisade eleven vissa tecken på förståelse. En månad senare gör eleven motsvarande misstag igen och tar inte med en negativ rot. Bagni menade, att elevers missuppfattningar kunde vara mycket starka och svåra att påverka samt att de förekom inte enbart hos nybörjare.

3.7.3 Gränsvärden och kontinuitet

I flera länder introduceras gränsvärdesbegreppet intuitivt så att variabeln närmar sig ett fixt begränsande värde. Detta benämns den dynamiska uppfattningen. Alternativet till den dynamiska förståelsen är den formella som innebär att till varje ε finns ett δ så att om $| x - x_1 | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_1) | < \varepsilon$. Denna definition anses ofta för svår för elever i gymnasieskolan och därför används den dynamiska istället.

Gränsvärden nämns inte explicit i de svenska kursplanerna vare sig för C-, D- eller E-kursen. Detta innebär en oklarhet och ett problem då begreppet är centralt i en rad andra begrepp i kursplanen som exempelvis kontinuitet, derivata, integral och oändlig geometrisk serie. I kursplanen för D-kursen står det ”kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner ...”. I C-kursens kursplan står det ”kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs.” I bestämningen och härledningen av derivatorna för de trigonometriska funktionerna är begreppet gränsvärde centralt, exempelvis måste elever känna till att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

I härledningen av en logaritmfunktions derivata måste eleven veta att

$$\lim_{k \to 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}} = e$$

vilket rör introduktionen av e som tas upp i C-kursens uppnåendemål.
Talet e definieras ofta som

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n$$

Mot ovanstående bakgrund är det snarast att betrakta som ett misstag att gränsvärden inte explicit har nämnt i kursplanerna. Eleverna måste behärska det för att kunna nå de ovan beskrivna målen.

Den ovan nämnda dynamiska uppfattningen är inte oproblematiskt enligt Tall (1996). De språkliga uttryck som används, att om x närmar sig x_1 så närmar sig $f(x)$ också $f(x_1)$ innebär en begreppslig svårighet att gränsvärdet aldrig kan bli lika med något. Dessutom kan sällan $x = x_1$. Ofta ger detta obestämbara uttryck som $\frac{0}{0}$. Därför ser de flesta elever gränsvärde som en process och inte som ett begrepp (Schwarzenberger & Tall, 1978; Williams, 1991; Cornu, 1992).

Den dynamiska uppfattningen innebär också begreppsliga svårigheter då begreppet kontinuitet skall introduceras. En vanlig definition för kontinuitet i en punkt är ju att gränsvärdet skall existera och vara lika med funktionsvärdet i punkten. Eftersom en dynamisk uppfattning innebär att elever oftast uppfattar att funktionen närmar sig gränsvärdet med inte kan anta det, är det ju särskilt besvärligt för kontinuitet, då det krävs att funktionen faktiskt antar värdet. Även för förståelsen av begreppen derivata och integral innebär den dynamiska uppfattningen extra svårigheter. Oftast introduceras integralbegreppet som en över- och undersumma av rektanglar, vilka täcker arean över och under en positiv graf. På så sätt kan arean under grafen bestämmas. Schneider (1993) beskriver hur elever uppfattade att allt fler rektanglar behövdes för att täcka ytan under grafen och då blev rektanglarna allt smalare för att till slut, då indelningen gick mot oändligheten, så trodde eleverna att de blev linjer, vars area var noll och då blev hela arean noll. En annan missuppfattning fann Sierpínska (1985; 1987). Hon menade att elever trodde att gränsvärde aldrig nådde fram utan fortsatte oavbrutet, en uppfattning som också hade sina rötter i den dynamiska uppfattningen av gränsvärden.

Elevers förståelse av serier störs ofta av att de tror att oändliga serier består av oändligt många termer och därför tror de att summan blir oändligt stor, vilket har sina rötter i en svagt utvecklad förståelse av begreppet gränsvärde (Bagni, 2000a).

Även diskreta funktioner kunde vålla elever problem. Markovits, et al. (1986) undersökte elevers uppfattningar av kontinuerliga respektive diskreta funktioner. Studien omfattade bland annat funktionen $f(x) = 4x + 6$ med naturliga tal som definitionsområde och värdeförråd. När eleverna tillfrågades om en kontinuerlig funktion, som gick genom motsvarande diskreta punkter var identisk med den givan funktionen ansåg hälften av eleverna detta. De bortsåg alltså från den givna funktionens definitionsområde och värdeförråd. På liknande sätt reagerade eleverna då de fick se en korrekt graf med diskreta punkter. De flesta menade att det inte var någon graf alls. Många menade att punkterna skulle bindas samman.

Med den gängse definitionen av en funktion, är ju inte diskreta funktioner kontinuerliga eftersom ett gränsvärde för respektive punkt inte kan existera.

3.7.4 Derivata

En definition av begreppet derivata kräver vissa kunskaper om gränsvärden. Oftast används gränsvärdet av differenskvoten av en funktion som definition:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

Detta innebär att funktionen måste vara definierad i en omgivning till x och om f är deriverbar så är funktionen också kontinuerlig i x. Omvändningen gäller däremot inte då det finns många exempel på funktioner som trots att de är kontinuerliga inte är deriverbara ($f(x) = |x|$ i punkten (0; 0)). En funktion, som är diskontinuerlig i en punkt kan däremot inte vara deriverbar i punkten. Den dynamiska uppfattningen av gränsvärde kan även i detta fall innebära begreppsliga svårigheter för elever då funktionen måste anta värdet i punkten där den är deriverbar.

Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) djupanalyserade en studerandes sätt att uppfatta grafisk representation av dels en funktion och dels dess derivata. Först skall konstateras att den studerande, som undersöktes, löste tre rutinuppgifter rörande derivering av produkten av funktioner och sammansatta funktioner utan problem. En graf av en parabel presenterades och den studerande ombads rita in grafen av funktionens derivata. Denna graf fick formen av en x^3-funktion och inte av en rät linje, vilket hade varit det korrekta. Den studerandes uppfattning ifrågasattes av intervjuaren men uppfattningen verkade stabil tills intervjuaren påpekade att funktionen till exempel kunde vara en x^2-funktion. Genom denna algebraiska utblick förstod den studerande att derivatan borde vara en rät linje. Men lika fullt efter en del funderande menande den studerande att så borde inte vara fallet då han trodde att parabler var begränsade av asymptoter och därför gick rakt mot oändligheten. Derivatan borde då också gå rakt mot oändligheten. Studien visar att elever kan ha tolkat in begränsningar i den grafiska representation, som inte egentligen finns där, på grund av alltför få och brist på varierande exempel i undervisningen eller i läromedlen.

Elever tycks också vara benägna att bland ihop skillnader i grafers lutning, derivata, med skillnader mellan funktionsvärden (Bell & Janvier, 1981; Janvier, 1978; McDermott, Rosenquist & vanZee, 1987; Preece, 1983b).

McDermott et al., 1987 fann även att elever blandade ihop begreppen hastighet och avstånd då en graf inte var involverad. Även då grafer var involverade erfor Clement (1989) att eleverna fokuserade hastigheten men att de misslyckades med att koppla den till en korrekt egenskap hos grafen.

Även en ikonisk uppfattning av grafer är frekvent beskriven i forskningslitteraturen (Janvier, 1978; Kerslake, 1977, 1981; McDermott et al., 1987; Preece, 1983b; Shultz, Clement & Makros, 1986; Stein & Leinhardt, 1989). Av speciellt intresse är Kerslakes (1981) studie som rör elevers ikoniska uppfattning av grafer rörande förflyttningars beroende av tiden. Elever uppfattar frekvent sådana grafer som en beskrivning av förflyttningsvägen. Till exempel trodde elever att en ”graf” som bestod av en sträcka parallell med y-axeln och som sedan fortsatte parallellt med x-axeln beskrev hur någon klättrade uppför en lodrät vägg. Detta var först och främst ingen grafisk representation av en funktion men kurvan beskrev att en person förflyttade sig utan att någon tid förflöt. Trots detta tolkade eleverna kurvan som att personen ”klättrade” uppför.

Clements (1989) studerade hur elever uppfattade grafer, som representerade hastighetens beroende av tiden rörande bilar. Om två sådana grafer skar varandra så menade eleverna att hastigheten inte var lika där utan att bilarna möttes där. I ett annat fall ombads eleverna att rita en graf över en cykels hastighet då den rörde sig över en kulle. Den frekvent ritade kurvan var en som såg ut som den sidan av kullen där nerfarten skedde. Vid utförsåkning skulle alltså enligt en sådan graf hastigheten minska. Eleverna kunde inte skilja på hastighetsvariabeln och den fysiska terrängen. Clements fann också att elever hade svårigheter att tolka grafer och förstå begrepp som inte direkt visades i grafen, som exempelvis hastighet i sträcka-tid-grafer jämfört med om grafen representerade hastighet-tid. Detta resultat bekräftades av Widjaja och Heck (2003), som undersökte indonesiska elevers förståelse av grafer rörande hastighet, sträcka och tid. De fann att elever misstog höjden på sträcka-tid-grafen för hastigheten vid en given punkt.

Ett sedan länge känt mönster är att många elever blandar ihop derivata med maximi- och minimivärden. Sådana grafiska egenskaper har inte bara blandats ihop vid konstruktion av grafer utan också vid tolkning av grafer (Bell & Janvier, 1981; Janvier, 1978; McDermott et al. 1987; Preece, 1983b). Denna hopblandning kan ha sina rötter i en rutinmässig behandling av maximi- och minimiproblem, då derivatans nollställen bestäms för att få fram en funktions maximi- och minimipunkter. Det verkar som få elever inser att grafen har riktningskoefficienten noll i dessa punkter, en riktning parallell med *x*-axeln. Ett förhållande som i sin tur gör att eleverna får begreppsliga problem med att förstå vad derivatan är om en graf är konstant i ett intervall.

Bergqvist, Litner och Sumpter (2003) undersökte hur elever på naturvetenskapligt program resonerade då de löste ett problem om en andragradsfunktions minsta och största värde i ett slutet intervall. Några av eleverna trodde att derivatan skulle ha två nollställen för att det fanns både ett största och minsta värde. Trots tillgång till en grafisk räknare, vilken presenterade grafen, kunde en av eleverna inte inse att det största värdet utgjordes av ett lokalt maximum och att funktionsvärdet i en av ändpunkterna var det minsta värdet. Först efter några provokativa frågor från intervjuaren insåg de att funktionsvärdena i intervallets ändpunkter kunde utgöra ett största eller minsta värde.

3.7.5 Primitiva funktioner och integraler

Tall (1996) menade att undervisningen av primitiva funktioner och integraler främst har en procedurell inriktning och att den kännetecknas av konceptuella svårigheter. Om elever har svårt att förstå den begreppsliga förankringen av integraler så avstår läraren från att fokusera detta utan fokuserar i stället de symboliska procedurerna vid integration och derivering. Denna inriktning gör, hävdade Tall, att eleverna får svårigheter att besvara begreppsligt inriktade frågor och lärarna kompensera detta med att ställa mer procedurellt inriktade frågor, som de vet att eleverna kan besvara. Då är den onda cirkeln av procedurell undervisning och inlärning igång.

Orton (1983) bekräftade detta resultat och menade att: ”Teachers, however, have often expressed concern that, whilst pupils could sometimes integrate and differentiate, little real understanding of the process was achieved” (s. 1). Så Orton ger också bilden av en procedurell undervisning utan speciell begrepplig förståelse. Även Eisenberg (1992) kunde visa att elever ofta inte insåg att integrering och derivering är inversa processer. Eleverna menade i stället att de var distinkt åtskilda processer, som skulle behandlas därefter.

Selden, Mason och Selden (1989; 1994) fann att elever presterade bra på uppgifter i bekanta kontexter men i en mer okänd kontext, i vilken intränade procedurer inte direkt kunde tillämpas, minskade lösningsfrekvensen dramatiskt. Av 19 elever kunde ingen lösa problemen av icke-rutinkaraktär. Denna brist på förmåga till transfer av kunskaper från ett sammanhang till ett annat har visat sig bero på en alltför procedurellt inriktad undervisningen, i vilken eleverna tränas att behärska lösningsprocedurer i ett speciellt sammanhang men i vilken de inte tränas att modifiera lösningarna och därmed anpassa dem till nya obekanta sammanhang (Bentley, 2009a).

Oftast introduceras integralbegreppet som en över- och undersumma av rektanglar vilka täcker arean över och under en positiv graf. På så sätt kan arean under grafen bestämmas. Schneider (1993) beskriver hur elever uppfattade att allt fler rektanglar behövdes för att täcka ytan under grafen vilket fick till följd att rektanglarna blev allt smalare för att till slut, då indelningen gick mot oändligheten, trodde eleverna att rektanglarna blev linjer, vars area var noll och då blev hela arean noll. En annan missuppfattning fann Sierpínska (1985; 1987). Hon menade att elever trodde att gränsvärdet aldrig nådde fram utan fortsatte oavbrutet, en uppfattning som kan ha sina rötter i den dynamiska uppfattningen av gränsvärden.

Eftersom integraler oftast introduceras som en area under en graf som ligger över x-axeln det vill säga med en positiv funktion, så vet många elever inte hur integraler beräknas då funktionen är negativ inom ett intervall av definitionsområdet. Orton (1983) undersökte detta med hjälp av grafen av $f(x) = 2x - x^2$. Eleverna skulle beräkna

$$\int_0^3 (2x - x^2)\, dx$$

Funktionen har två nollställen, ett i $x = 0$ och ett i $x = 2$. Mellan 2 och 3 ligger grafen under x-axeln och funktionen är där negativ. I princip visste ingen av de medverkande eleverna varför integralen delas upp i två delar vid beräkningen. En större andel elever menade att arean från $x = 0$ till $x = 2$ kunde beräknas på normalt sätt men den återstående delen av arean kände de inte till någon beräkningsmetod för. Eleverna kunde oftast inte motivera sina beräkningar men klarade trots detta att genomföra dem, ett typiskt resultat av en procedurellt inriktad undervisning.

3.7.6 Trigonometriska funktioner

De flesta forskare är överens om att undervisningen av trigonometriska funktioner borde ha en mer konceptuell inriktning (Davis, 1992; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Skemp, 1987). Två huvudprinciper finns för introduktion av de trigonometriska funktionerna, sinus och cosinus. Den första metoden har en mer procedurell karaktär och utgår från tillämpningar av de trigonometriska teoremen på rätvinkliga trianglar. Den andra tar sin utgångspunkt i enhetscirkeln och har en mer begreppslig inriktning.

Kendal och Stacey (1997) menade att:”many approaches to teaching trigonometry, such as ‘the right triangle’ approach, primarily stress procedural skills and such approaches do not allow students to understand sine and cosine as functions”. Så procedurella färdigheter är det som fokuseras i undervisningen då den rätvinkliga triangelmodellen används. Även Hirsch, Weinhold, och Nichols (1991) drog slutsatsen att:

> ***current instruction of trigonometry is not consistent with the goals laid out in the NCTM Standards (NCTM, 1989, 2000) and further argued that we need to move away from trigonometric instruction that encourages "memorization of isolated facts and procedures and proficiency with paper-and-pencil tests [and move towards] programs that emphasize conceptual understanding, multiple representations and connections, mathematical modeling, and problem-solving" (p. 98)***

Undervisningen i trigonometri överensstämmer alltså enligt dessa forskare inte med målen utan man måste överge memorering av isolerade fakta och istället mer fokusera begreppslig förståelse.

Flera studier har gjorts på effekten av introduktion med den rätvinkliga triangelmodellen och på hur eleverna förstått och kommit ihåg det de då lärt sig om trigonometriska funktioner. Kendal och Stacey (1997) testade 178 gymnasieelever på deras kunnande om trigonometri efter ett år, 172 av dem klarade inte någon uppgift på testet. Även Blackett och Tall (1991) fann att gymnasieelever hade svårigheter att lösa trigonometriska problem efter en sådan procedurell introduktion. Elevernas misstag skvallrade om en svag begreppslig förståelse av trigonometriska funktioner enligt Parish och Ludwig (1994). Weber (2005) jämförde i ett undervisningsexperiment dels modellen med att introducera trigonometriska funktioner via rätvinkliga trianglar och dels modellen med introduktion via enhetscirkeln. Han fann också att modellen med rätvinkliga trianglar ledde till mindre begreppslig förståelse. Däremot visade det sig att introduktion med hjälp av enhetscirkeln bidrog till en ökad begrepplig förståelse och eleverna uppvisade en stark begreppslig argumentation och kunde motivera varför funktionerna hade de egenskaper de hade med hjälp av enhetscirkeln. Dessutom kom de ihåg funktionerna och deras egenskaper bättre än eleverna i kontrollgruppen.

3.8 Serier och talföljder

Serier och talföljder kan vara antingen ändliga eller oändliga. En serie kan också uppfattas som en talföljd. Om

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

så kan de successiva summorna uppfattas som en talföljd $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n$. Så i denna mening kan serier och talföljder betraktas som ekvivalenta. Dessa exempel på serier och talföljder kan konvergera under visa förutsättningar. Då betraktas

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ eller } \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Om gränsvärdet existerar och är ändligt konvergerar serien respektive talföljden. Ett nödvändigt villkor för att en serie skall konvergera är att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Två serier, som är av speciellt intresse i skolmatematiken, är aritmetiska serier och geometriska serier. En aritmetisk serie karaktäriseras av att differensen mellan två påvandra följande termer är konstant. Till exempel $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ är en aritmetisk serie med differensen ett. Summan av en aritmetisk serie kan fås på ett relativt enkelt sätt om serien skrivs både i rak ordning och i omvänd ordning

$$S_n = a + (a + k) + a + 2k + \ldots + (a + k(n - 2)) + (a + k(n - 1))$$

Men summan är också

$$S_n = (a + k(n - 1)) + (a + k(n - 2)) + \ldots + (a + 2k) + (a + k) + a$$

Om dessa båda adderas får vi

$$2S_n = n(2a + kn)$$

Då serien består av n termer blir alltså formeln $S_n = \frac{n(a + a + kn)}{2}$, vilket betyder summan av den första termen och den sista termen båda multiplicerat med antalet termer och dividerat med två.

En oändlig aritmetisk serie består av oändligt många termer och skrivs $\lim_{n\to\infty} S_n$. Den konvergerar då gränsvärdet existerar och är ändligt. Ett nödvändigt villkor för att serien skall konvergera är att termerna bildar en avtagande följd. Villkoret är inte tillräckligt.

Den geometriska serien karaktäriseras av att två påvandraföljande termer bildar en konstant kvot.

$$S_n = a + ak^1 + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} + ak^n$$

om båda led multipliceras med k fås

$$kS_n = ak + ak^2 + ak^3 + \ldots + ak^n + ak^{n+1}$$

Om de båda uttrycken för summan subtraheras fås

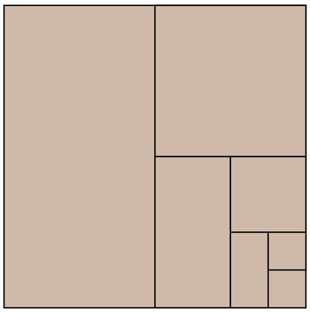
$$S_n - kS = a + ak^1 - ak^1 + ak^2 - ak^2 + \ldots + ak^n - ak^n - ak^{n+1}$$

$$S_n(1-k) = a(1-k^{n+1})$$

$$S_n = \frac{a(1-k^{n+1})}{1-k}$$

och om serien konvergerar fås att

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-k} \quad \text{under förutsättning att } |k| < 1$$



Summan av den oändliga geometriska serien $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ kan illustreras med indelningen av kvadraten, vars sida är en längdenhet. Indelningen antyder att seriens summa blir lika med arean av kvadraten, det vill säga 1.

Elevers förståelse av serier störs ofta av att de tror att oändliga serier, som består av oändligt många termer, har en oändligt stor summan (Bagni, 2000a). Först måste denna missuppfattning röjas undan. Då kan en illustration som kvadraten här ovan av den kända geometriska serien $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ vara till hjälp (Suraweera, 2002; Bagni, 2005). Den visar att serien för det första är begränsad och inte större än ett samt att indelningen går att göra så att den närmar sig ett, hur nära som helst. Detta representerar den dynamiska synen på gränsvärde. Den har den nackdelen att eleverna kan få uppfattningen att gränsvärdet aldrig når talet ett utan bara kommer hur nära som helst och att det därför alltid kvarstår en viss differens (Brown, McGraw, Koc, Lynch & Arbaugh, 2002).

Användningen av visuell representation förutsätter att eleverna är vana vid att koordinera olika representationsformer annars kan det vara kontraproduktivt (Duval, 1995; D'Amore, 2001).

Ett annat vanligt misstag är att eleverna tror att det nödvändiga villkoret, att termerna skall gå noll, det vill säga att $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ är ett tillräckligt villkor. Detta beror troligen på exemplens kraft. Flertalet exempel på serier, som eleverna utsätts för i undervisningen, konvergerar och termerna går mot noll (Bagni, 2005). Denna övergeneralisering, som bygger på elevernas egna erfarenheter eller på icke genomtänkta val av exempel, är i själva verket en icke önskvärd transfer (Stavy & Tirosh, 2000). Den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ kan här tjäna som ett exempel på en serie, vars termer går mot noll, trots att serien inte konvergerar.

3.9 Geometri

I första avsnittet behandlas vinkelbegreppet och i samband med det rotation som är en central komponent i den gängse begreppsmodellen. Räta linjens ekvation tycks läras in procedurellt. Detta belyses avsnitt två. Cirkeln ekvation kan vålla elever problem speciellt och invanda variabelbeteckningar inte stämmer, vilket analyseras i avsnitt tre. Geometriska bevis belyses i sista avsnittet.

3.9.1 Vinkelbegreppet och rotation

Den begreppsmodell som används i många länder för vinkelbegreppet har visat sig svår att förstå för eleverna. Mitchelmore och White (1998) sammanfattade:

”It is clear from the research literature that school students have great difficulty in coordinating the various facets of the angle concept. For example, students do not readily incorporate turning into their angle concepts.” Vridning tycks alltså vara en av nyckelkomponenterna i vinkelbegreppet, vilket flera forskare rapporterat. Foxman och Ruddock (1983) fann att bara 4 procent av de 15-åringar, som undersöktes, spontant nämnde vridning, då de tillfrågades om vinkelbegreppet. Vridning eller rotation är alltså ett avgörande delbegrepp i vinkelbegreppet som tycks vara det som orsakar svårigheter för eleverna. Därför är det ingen djärvt antagande att vridningar inom geometrin behandlas alltför litet.

3.9.2 Räta linjens ekvation

Wendlinski (2009) fann i sitt undervisningsexperiment att beroende på om inledningen var procedurell eller konceptuell så påverkades elevernas förmåga att teckna räta linjens ekvation påtagligt. Wendlinski förklarade

> ***Students taught to write linear equations conceptually, with instruction based on intuition and instruction that attempted to relate mathematical operations to their real world meaning, were significantly more able to write linear equations of a direct variation than were their counterparts taught with a more procedural method.***

Alltså en mer konceptuell inriktning av undervisningen tycks vara att föredra då kan eleverna lättare teckna ekvationerna. Skillnaderna mellan de två undervisningsgrupperna blev mindre då linjer som skar y-axeln på andra ställen än i origo kom in i bilden (Wendlinski, 2009).

Bergqvist, Litner och Sumpter (2003) djupintervjuade svenska gymnasieelever om bland annat räta linjens ekvation. Eleverna fick ekvationen $y = 3x - 2$ och skulle bestämma linjens lutning och skärning med y-axeln. Dessutom skulle den grafiskt åskådliggöras i ett koordinatsystem. Uppgift två handlade om att bestämma en linjes ekvation då två punkter var givna (2, 3) och (5, 9). Den första eleven Eva hade uppenbart en procedurell kunskap med lite eller ingen förståelse om räta linjens ekvation. På de första deluppgifterna svarade hon ”$3x$” respektive ”–2”. Skärningen med y-axeln angavs korrekt medan riktningskoefficienten för linjen angavs till ”$3x$” och inte till ”3”. Här finns anledning att misstänka att svaret på riktningskoefficienten var rent mekaniskt utan någon direkt förståelse av vad riktningskoefficient är. När försökspersonen sedan skulle representera ekvationen i ett koordinatsystem blev det uppenbart att hon hade en procedurell uppfattning om riktningskoefficienten då hon använde den stegvisa metoden. Hon visste inte vad det betydde att k var lika med ”3” och förväxlade metodens innebörd rörande ordningen på koordinaterna, $x = 1$ och $y = 3$ med $x = 3$ och $y = 1$. Trots påpekanden från intervjuaren att det var möjligt att avgöra detta genom substitution i ekvationen insåg Eva inte detta. Hon försökte göra en insättning i ekvationen med punkten (3, –1) men kunde inte tolka vad hon fick, $-1 = 3 \cdot 3 - 2$. Hon menade att hon inte hade en aning av vad hon beräknade. Så någon korrekt linje kunde Eva inte rita då.

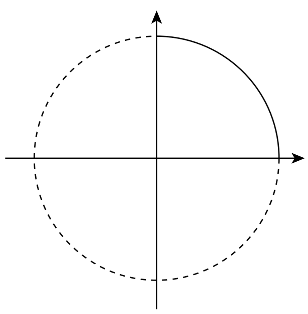
Den andra uppgiften gav sig Eva därefter i kast med. Hon använde proceduren $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ för att bestämma riktningskoefficienten. Hon löste i princip uppgift två. Intervjuaren frågade om hon kunde använda den formeln för att rita linjen i uppgift ett. Eva försöker göra detta men gör några inkorrekta beräkningar och misslyckas. I princip var hennes försök korrekt men hon klarade inte av beräkningarna. Bergqvist, et al. (2003) drog slutsatsen att Evas resonerande kan karaktäriseras som algoritmiskt och lotsat i vilket procedurer har en central roll (s. 28).

Nästa försöksperson Julia skulle lösa samma uppgifter. Ett liknande mönster som från den tidigare intervjun upprepades. Bergqvist, et al. (2003) drog slutsatsen att ”she [Julia] knows bits and pieces of the mathematics in the task, but there is no connection between the parts” (s. 31). Alltså, försökspersonen visar upp brottstycken av kunskaper, som inte tycks hänga ihop. Resonemanget klassificeras även i detta fall som algoritmiskt och lotsat. Således, en typisk procedurell kunskap.

Även fler studerande intervjuades. Den övergripande slutsatsen som Bergqvist, et al. (2003) drog var att ”In many situations the students simply solved the task by applying a correct algorithm.” (s. 37). Så procedurer spelade en central roll i elevernas lösningsstrategier. Val av korrekt procedur blir då avgörande. Bergqvist, et al. (2003) menade att “In the analysis we found that six out of seven students chose their strategies on only or mainly surface property considerations, and focused on using more or less well mastered algorithms.” Så ytliga kriterier var avgörande för val av procedur och redan väl inövade procedurer användes. De testsituationer som användes borde varit rutinsituationer för eleverna.

3.9.3 Cirkelns ekvation

Många elever tror att cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 1$ representerar en funktion. Ett kriterium som de tycks använda är att uttrycket skall innehålla den oberoende variabeln x. Det är därför många elever inte anser att till exempel $y = 3$ är en funktion, eftersom x saknas i uttrycket (Barnes, 1998; Bakar & Tall, 1992; Ferrini-Mundy & Graham, 1994).



Begreppet kontinuitet har för många elever betydelsen att kurvan eller grafen fortsätter. Funktionen $y = \sqrt{1 - x^2}$ för $0 \leq x \leq 1$ åskådliggörs grafiskt som i figuren.

Kvartsbågen som representerar funktionen menar många elever skall fortsätta och bilda en komplett cirkel (Tall, 1997). Elevers förmåga att tolka grafer är ofta rätt begränsad, speciellt besvärligt tycks det vara att utgå från en graf eller kurva och skapa nödvändig information (Dunham & Osborne, 1991; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; Wainer, 1992). Många missuppfattningar om grafisk representation florerar och eleverna har därför svårigheter att tolka grafer och kurvor och anknyta tolkningen till fysiska begrepp och vardagliga företeelser (Trowbridge & McDermott, 1980; Barclay, 1985; Cates, 2000; Dugdale, 1993; Mokros & Tinker, 1987).

Arcavi, (1994) studerade elever uppfattningar av symboler. En av försökspersonerna, en elev skulle bestämma ekvationen för en cirkel på vilken följande punkter låg (a, b), $(-a, b)$ och $(0, 0)$. Detta sätt att ange punkterna med parametrar förvillade försökspersonen som var van vid den allmänna formen av cirkelns ekvation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ där a och b representerar koordinaterna för cirkelns medelpunkt. I den givna uppgiften var a och b i stället koordinater för punkter på cirkeln. Försökspersonen övervann denna svårighet och betecknade medelpunktens koordinater med (m, n) i stället och tre ekvationer kunde ställas upp.

$$(a - m)^2 + (b - n)^2 = r^2$$
$$(-a - m)^2 + (b - n)^2 = r^2$$
$$m^2 + n^2 = r^2$$

Genom att sätta den första och andra ekvationen lika fås $m \cdot a = 0$. Eleven kände till att antingen är $m = 0$ eller också är $a = 0$ men kunde först inte avgöra vilket som var det korrekta. Parametern a kunde ju inte vara noll då den representerade en koordinat för en godtycklig punkt. Alltså var det m som var lika med noll. Detta upptäckte eleven efter en stund (Arcavi, 1994). Resultatet indikerar att elevernas vana vid ensidiga beteckningar kan förorsaka onödiga svårigheter.

3.10 En eller flera begreppsmodeller för samma begrepp

Tidigare inlärda begrepp är utgångspunkten vid inlärning av nya begrepp. De nya begreppsattributen erfars i relation till tidigare begreppsattribut och jämförs för att det skall vara möjligt att avgöra om de skiljer sig från de tidigare. De attribut som skiljer sig åt benämns särskiljande och kan lättare erfaras om kontexten varieras. För att ett nytt begrepp skall läras in, krävs ett upprepat erfarande. Det kan ibland vara svårt att avgöra om ett attribut verkligen tillhör begreppet eller om det är den del av kontexten. Mot denna bakgrund är det viktigt att kontexten varieras så att det går att urskilja vilka attribut som inte återkommer i de olika kontexterna från de som är gemensamma och återkommer. De är då sannolikt en del av begreppets egenskaper. Inlärningen underlättas om elever görs uppmärksamma på de gemensamma attributen och på själva begreppet. Det är alltså avgörande för inlärningen att ett begrepp förekommer i flera olika problemkontexter.

Då begrepp studeras i skolan används begreppsmodeller för att förenkla inlärningen. För integraler används ofta area under en graf som modell. Det är då viktigt att hålla i minnet att detta är endast ett av flera sätt att representera en integral, exempelvis är sträckan lika med integralen av hastigheten med avseende på tiden, $s = \int h(t)\, dt$. Om flera begreppsmodeller används i undervisningen samtidigt kan det vara svårt för eleverna att avgränsa de olika modellerna och avgöra vilka attribut som tillhör respektive modell. Bentley (2008a) benämner detta fenomen, *interferens*. Så om flera modeller används samtidigt kan de ha en störande inverkan på varandra.

Även vissa egenskaper hos modellerna kan vara *oförenliga* för eleverna. Exempel på oförenliga modeller är då area under grafen representerar eller rent av är integralen och sträckan som integralen av hastigheten med avseende på tiden. En area och sträcka är två helt olika storheter, som är oförenliga.

Då olika procedurella modeller används i olika kontexter blir åtskillnaden mellan kontexterna och mellan modellerna än tydligare och minskar elevernas möjligheter att uppfatta begreppsliga samband. Det är då stor risk att kunskapen blir likt isolerade öar utan inbördes samband.

Användningen av flera begreppsmodeller för ett och samma begrepp kan ibland ge en rikare uppfattning av ett begrepp men det är också stor risk att de matematiska sammanhangen inte framträder tillräckligt tydligt för eleverna eller att begreppsuppfattningen blir en blandning av två modeller.

3.11 Övergeneraliseringar

Erfarenhetsbaserade eller intuitiva regler kan av elever transfereras till områden eller situationer där de inte hör hemma. Sådana övergeneraliseringar kan ligga bakom elevers misstag. Reglerna kan ha används av läraren i syfte att underlätta för eleverna vid beräkningar och har därför oftast en procedurell karaktär. Eleverna kan även själva ha erfarit ett mönster av något slag som sedan abstraherats till en regel som används i en situation eller sammanhang i vilket den inte kan tillämpas (Stavy & Tirosh, 2000). I en procedurellt inriktad undervisning är sannolikt övergeneraliseringar mer frekventa än i en konceptuellt inriktad. I den senare knyter begreppen ihop olika kontexter och utgör ett slags facit för transfer, önskad såväl som oönskad.

Bagni (2000) fann att övergeneraliseringar även förekom på högre nivåer i skolsystemet. De elever som han undersökte var mellan 18 och 19 år. Derivatan av en summa av funktioner, $f(x) + g(x) = f'(x) + g'(x)$, är ju lika med summan av derivatorna. Han fann då att elever lätt övergeneraliserade detta till att även gälla multiplikation av två funktioner $f(x) \cdot g(x)$ och då blev derivatan produkten av derivatorna $f'(x) \cdot g'(x)$ istället för den korrekta produktregeln $f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$. Detta är också exempel på övergeneraliseringarnas procedurella natur.

Om de serier eleverna får erfara i undervisningen inte väljs med omsorg så att till exempel samtliga har termer som går mot noll och är konvergenta kan eleverna felaktigt generalisera detta villkor för konvergens som endast är nödvändigt till att bli ett tillräckligt villkor. Den harmoniska serien kan tjäna som exempel på en serie vars termer går mot noll men där serien inte är konvergent utan divergerar (Bagni, 2005).

3.12 Grafritande räknares påverkan på resultatet

Forskningen visar att användningen av grafritande räknare kan förbättra elevers prestationer inom algebra (Groves, 1994; Stacey, 1994). Man har tidigare trott att användningen av räknare skulle kunna försämra elever förmåga till att utföra beräkningar och hindra en begreppslig förståelse (California Department of Education, 2006; Wade, 2006). I själva verket har det visat sig att sättet att använda räknarna har avgörande betydelse för elevernas resultat (Khoju, Miller, & Jaciw, 2005; Dimock & Sherron, 2005; Kilpatrick et al., 2001) och att lämplig användning kan leda till förbättrad begreppslig förståelse (Kamii & Dominick, 1998). Kilpatrick et al. (2001) uttrycker detta, "the question, therefore, is not whether but how calculators should be used" (s. 356).

Oavsett användning av räknare eller ej så kan lärarnas uppfattning om matematikens beskaffenhet, om den ses som en samling regler, vilka skall tränas eller som ett medel för problemlösning i vilket begrepp är centrala verktyg, avgöra undervisningens framgång (Thompson, Philipp, Thompson & Boyd, 1994). Dimock och Sherron (2005) menade att "…examine the use of the graphing calculator in contexts where the teacher's demonstrated goal was to improve deep conceptual understanding of students." Motstridiga resultat har tidigare erhållits om resultatet av grafritande räknares användning och analysen av dessa visar att undersökningarna ofta har varit traditionella och fokuserat procedurella färdigheter. Det är därför viktigt att studera användningens resultat då inriktningen av undervisningen varit konceptuell och då räknarens användning anslutit till detta (Wendlinski, 2009).

3.13 ”The Expert Reversal Effect”

Denna effekt är ett fenomen, som uppstår då elever lärt sig något och kan utföra det, det vill säga då de behärskar en förmåga, och sedan förlorar denna förmåga. Det är inte en fråga om att precis ha klarat att utföra den utan eleverna kan utföra den på ett väl inövat sätt. Kalyuga, Ayres, Chandler och Sweller, (2003) benämner denna förlust av en förmåga för ”the expert reversal effect”. Effekten kan också uppstå efter relativt kort tid som några dagar. Orsakerna kan givetvis vara glömska men detta kan knappast vara huvudorsaken efter bara några dagar. Vendlinski (2009) fann i sin studie av ett undervisningsexperiment att elever, som några dagar tidigare haft förmåga att skriva korrekta linjära ekvationer två dagar senare efter procedurell undervisning inte kunde klara detta. Eleverna hade först fått konceptuellt inriktad undervisning om linjära ekvationer och alla behärskade då att konstruera linjära ekvationer. Därefter följde ett antal lektioner med procedurell inriktning och då eleverna testades efter denna lektionssvit två dagar senare så hade en tredjedel förlorat förmågan. Den andra gruppen i undervisningsexperimentet hade först fått procedurell undervisning och därefter konceptuellt inriktad. Någon sådan tillbakagång kunde inte iakttas i denna grupp. Så Vendlinski's slutsats var att ”the expert reversal effect” kunde dyka upp och vara verksam i undervisningssekvenser som inleddes med konceptuellt inriktad undervisning och fortsatte med procedurellt medan effekten inte var verksam om undervisningen inleddes procedurellt. Det är naturligtvis svårt att avgöra efter ett begränsat experiment huruvida innehållets karaktär har någon betydelse eller om undervisningen inriktning som sådan betyder mest.

3.14 Sammanfattning

Forskningen visar alltså att två huvudinriktningar av skolmatematiken existerar, procedurell och konceptuell. I den procedurella fokuseras procedurer, ofta i enstaka sammanhang medan i den konceptuella begrepp. I den senare knyts olika delar av matematiken ihop eftersom konceptuell kunskap underlättar transfer från ett sammanhang till ett annat.

Undervisningen i grundskolan har huvudsakligen en procedurell inriktning i Sverige, medan den konceptuella inriktningen är dominerande i Hong Kong och Taiwan, två länder som kvalificerats sig bra i TIMSS-mätningar. I en konceptuellt inriktad undervisning förekommer även träning av procedurer men detta sker då i flera olika kontexter.

Flera internationella forskningsprojekt visar att läromedel också kan ha en procedurell inriktning.

Undervisningens inriktning speglar sig i lösningsmönster på test. Eftersom procedurell undervisning resulterar i isolerade lokala kunskaper ofta bundna till specifika kontexter har lösningsmönstren en liknande karaktär, spridda enstaka uppgifter är lösa. Den konceptuella undervisningen knyter däremot ihop olika sammanhang med övergripande begrepp eller kärnfulla matematiska principer och tränar därmed transfer systematiskt. Detta gör att lösningsmönstren ser annorlunda ut med betydligt fler uppgifter lösta, som rör ett och samma begrepp eller område. I TIMSS 2007 uppvisade svenska elever i årskurs 8 ett lösningsmönster i vilket i princip ingen elev hade löst samtliga de uppgifter, som testade algebraiska begrepp, medan ungefär hälften av eleverna i de två ostasiatiska länderna löste samtliga av dessa uppgifter.

I TIMSS Advanced 2008 förekom undervisningsuppehåll för D-kursens elever innan testen genomfördes. I en forskningsgenomgång visas att matematik tillhör de ämnen, som är särskilt känsliga för sådana uppehåll. Elevprestationerna sjunker påtagligt efter sådana uppehåll. Procedurell kunskap är dessutom mer känslig för uppehåll än konceptuell.

Begreppsmodeller används i undervisningen för att underlätta elevers lärande. Modellernas kvalité är därför avgörande för hur elever tillägnar sig begreppen. Fyra kriterier används för kvalitetsgranskningar. Strukturell validitet mäter hur väl den matematiska strukturen representeras av modellen. Ekologisk validitet fångar hur väl modellen ansluter till eleverna erfarenheter i stort. Enkelhetsvaliditet beskriver modellens enkelhet och operationell validitet dess grad av vägledning vid beräkningar.

Inom algebran är variabeln det centrala begreppet, vars närmare betydelse avgörs av kontexten. Elever kan förstå och missförstå detta begrepp på flera olika sätt. Missuppfattningarna är icke-symbolisk representation, sifferrepresentation och konkret objektsrepresentation. Uppfattningen icke-symbolisk representation innebär att variabeln inte har någon symbolisk betydelse överhuvudtaget, den ignoreras. Sifferrepresentation betyder att variabeln representerar en siffra och inte ett tal. I konkret objektrepresentation kan variabel ses som exempelvis en apelsin. I en ekvationskontext kan variabeln antingen uppfattas som ett specifikt okänt tal eller som en generell talbeteckning. I en funktionskontext skall variabeln ses som en generell talbeteckning, vilken på en gång representerar alla tal i definitionsområdet. Inom topologin representerar variabeln elementen i en mängd, vilka inte ens behöver vara tal. Elever kan ha flera parallella uppfattningar om begrepp.

Usiskin (1999) har beskrivit skillnaderna mellan skolalgebra och universitetsalgebra. Algebra kan uppfattas på fyra olika sätt, som generaliserad aritmetik, som procedurer för problemlösning, som relationer mellan storheter och som topologiska strukturer.

Studier i algebra har stor betydelse för fortsatta studier i naturvetenskap och teknik, då det abstrakta tänkandet i algebran utgör en av hörnstenarna i dessa ämnen. Men baksidan av detta är att få elever klarar av att få godkänt på dessa kurser i USA. Mer än 90 procent blir underkända. Så algebran är snarare en barriär mot fortsatta studier. Orsaken till detta är, menar Wendlinski (2009), den procedurella inriktningen av undervisningen. Eleverna ser matematiken som en samling isolerade, meningslösa procedurer, som skall memoreras och inte förstås.

Funktionsbegreppet är centralt i gymnasieskolans matematikundervisning. En funktion ses som en tillordning eller relation mellan elementen i definitionsområdet och värdeområdet. Mot ett element i definitionsområdet får svara högst ett i värdeområdet. Flera begreppsmodeller förekommer för funktioner, maskinmodellen, avbildningsmodellen och uttrycksmodellen. Var och en med sina för- och nackdelar enligt de fyra kvalitetskriterierna.

Funktioner har många olika egenskaper, som studeras i gymnasieskolans olika kurser. Elever har olika missuppfattningar om vad som är en funktion, speciellt gäller detta grafer. Vissa grafer uppfattas inte representera funktioner, exempelvis ses inte $y = 4$ som en funktion. Även funktionsuttryck, i vilka x saknas, ses sällan som funktioner. Elever är oftast tränade att gå från ett funktionsuttryck till att konstruera en graf. Det visade sig vara förenat med problem att gå åt andra hållet, från graf till funktionsuttryck och att därvid tolka funktioners nollställen.

Funktioners kontinuitet är ett annat område inom vilket elever har diffusa uppfattningar. Den dynamiska uppfattningen av gränsvärde, att om x går mot a så närmar sig $f(x)$ värdet A men når det aldrig, har visat sig vara problematisk. Vid förståelse av kontinuitet är detta speciellt problematiskt för $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ då funktionen inte bara skall närma sig värdet utan också anta det.

Förståelsen av gränsvärden spelar också en stor roll i flera begrepp som rör funktioners egenskaper och begreppet derivata. I definitionen av derivatan för en funktion ingår gränsvärdesbegreppet på ett avgörande sätt. Elever tycks, emellertid, vara benägna att bland ihop skillnader i grafers lutning, derivata, med skillnader mellan funktionsvärden. Även andra hopblandningar förekommer som begreppet hastighet, vilken är tidderivatan av avståndet, med avståndet. En ikonisk uppfattning av grafer noterades, vilken innebär att grafen representerar förflyttningsvägen och inte förflyttningens beroende av tiden. Elever tycks också tro att funktioners minimi- och maximivärden fås genom att derivatan är noll. Att derivatan är noll är endast ett nödvändigt villkor för ett lokalt extremvärde.

Även för primitiva funktioner och integraler spelar gränsvärdet en avgörande roll. Integralbegreppet introduceras ofta som en över- och undersumma av rektanglar vilka täcker arean över och under en positiv graf. Därefter går denna indelning mot oändligt smala rektanglar så att integralen erhålls. Elever tror då att arean blir noll eftersom rektanglarna blir så smala. Det faktum att integraler introduceras med positiva grafer gör också att elever får svårigheter då funktioner vars graf ligger under x-axeln skall integreras och deras integral bestämmas. Undervisningen av integraler är oftast procedurellt inriktad, vilket framgår av en enig forskarkår.

Två huvudprinciper finns för introduktion av de trigonometriska funktionerna, sinus och cosinus. Den första principen har en mer procedurell karaktär och utgår från tillämpningar av de trigonometriska teoremen i rätvinkliga trianglar. Den andra tar sin utgångspunkt i enhetscirkeln och har en mer begreppslig inriktning. Många forskare påpekar att undervisningen av dessa funktioner har en alltför procedurell inriktning. Omfattande undervisningsexperiment visar att retentionen av procedurell undervisning av trigonometriska funktioner efter ett år är låg.

Serier och talföljder är relaterade till varandra. En series successiva summor bildar en talföljd men även seriens termer kan bilda en talföljd. Aritmetiska och geometriska serier skall behärskas av gymnasieskolans elever. I en ändlig serie involveras inte gränsvärdesbegreppet men i oändliga serier och oändliga talföljder har förståelsen för gränsvärden avgörande betydelse. Elevers förståelse av serier störs ofta av att de tror att oändliga serier som består av oändligt många termer, har en oändligt stor summa. Visuella representationer som visar att serien är begränsad kan ha avgörande betydelse. Ofta har eleverna huvudsakligen erfarit serier vars termer bildar en avtagande talföljd, vilket kan leda till en annan missuppfattning att det är ett tillräckligt i stället för ett nödvändigt villkor att termerna går mot noll.

Inom området geometri förekommer många centrala begrepp och procedurer. Vinkelbegreppets koppling till rotation förorsakar många elever problem och det tycks vara rotationen i sig som är problemet. Den internationella forskningen har redan tidigare påpekat svårigheterna.

Räta linjen och dess ekvation undervisas oftast procedurellt, vilket leder till svaga resultat speciellt på sikt. I undervisningsexperiment har konceptuell inriktning prövats med ett mer lyckat resultat. Svenska forskare har också med ett antal fallstudier visat att eleverna behandlar uppgifter rörande räta linjen procedurellt. Misstagen verkar framförallt bero på att delar av procedurer glömts samt på förväxlingar. Försökspersoner visar upp brottstycken av kunskaper, som inte tycks hänga ihop. Resonemanget klassificeras som algoritmiskt och lotsat. Således, en typisk procedurell kunskap.

Många elever tror att cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 1$ representerar en funktion. Ett kriterium, som de tycks använda, är att uttrycket skall innehålla den oberoende variabeln x. Elever har svårigheter att tolka kurvor till fysiska begrepp. Även invanda ensidiga beteckningar i ekvationer kan vålla elever onödiga problem om de dyker upp i annat sammanhang och med delvis annan betydelse.

Användningen av flera olika begreppsmodeller för ett och samma begrepp kan orsaka elever problem om modellernas egenskaper stör varandra eller så blir begreppsuppfattning en blandning av de två modellernas egenskaper. Vissa modeller innebär inskränkningar i uppfattningen av begreppet. Exempelvis då integralen ses som arean under en positiv graf med en positiv area som följd. Då eleverna senare stöter på en graf under x-axeln vet de inte hur den skall hanteras.

Övergeneraliseringar är oönskad transfer av kunskaper från ett område till ett annat. Erfarenhetsbaserade eller intuitiva regler kan av elever överföras till områden eller situationer där de inte hör hemma och kan ligga bakom elevers misstag. Exempelvis kan regeln för derivering av en summa av två funktioner övergeneraliseras till att även gälla en produkt av två funktioner.

Grafritande räknare kan användas i undervisningen för att få den mer begreppsligt inriktad. Utan en begreppslig inriktning kan positiva effekter utebli.

”The reversal effect” är ett fenomen, som uppstår, då elever på ett väl inövat sätt lärt sig något, alltså då de behärskar en förmåga, och sedan förlorar denna förmåga. Orsakerna kan givetvis vara glömska men detta kan knappast vara huvudorsaken om effekten visar sig efter bara några dagar.

Del 2

Undersökningens genomförande och resultat

Del 2. Undersökningens genomförande och resultat

Del 2 inleds med kapitel 4, som avhandlar studiens problemformulering och syfte. I kapitel 5 beskrivs metodens tillämpning. I det följande kapitlet redogörs för studiens resultat.

I det fjärde kapitlet, som rör syftet framhålls den fördjupade analysen av gymnasieelevernas matematikkunskaper med inriktning på procedurer och begrepp. Vidare är syftet att studera och jämföra skillnader mellan gymnasieelevernas kunskaper i TIMSS 1995 och i TIMSS Advanced 2008. Slutligen skall utifrån beskrivningar av kunskapens beskaffenhet slutsatser dras om undervisningens inriktning.

I det femte kapitlet beskrivs först grunderna för hur analysen av testuppgifter gått till och därefter tas bland annat upp lösningsmönster och hur den matematiska kunskapens beskaffenhet speglas i dessa.

I kapitel 6 presenteras resultatet av djupanalysen i olika innehållsliga områden som olikheter, funktioner och dess egenskaper, formler, gränsvärden, serier, komplexa tal och geometri. Några av de frisläppta uppgifterna i TIMSS Advanced 2008 ingick också i TIMSS 1995, vilket möjliggör jämförelser mellan de två mättillfällena. Vidare redovisas beskaffenheten hos elevernas kunskaper inom algebra, differential- och integralkalkyl samt geometri. Lösningsmönster hos olika grupper av uppgifter har undersöktes. Utifrån de mönster som framkommer, är det möjligt att dra slutsatser om karaktären på elevernas kunskaper och undervisningens utformning. Exempelvis löste eleverna i TIMSS Advanced 2008 två spridda uppgifter av sex, som testade algebra, medan resultatet 1995 visade att fyra av sex uppgifter löstes.

Kapitlet avslutas med en sammanfattning av resultaten.

Läsanvisning

Lärare och lärarutbildare rekommenderas att läsa kapitlen 4 och 5 kursivt medan stor möda bör läggas på resultatkapitlet, där elevers frekventa misstag redovisas. Det är oftast möjligt med relativt enkla medel motverka att dessa misstag uppstår.

4 Problemformulering och syfte

Matematisk kunskap är inte enbart hierarkiskt strukturerad, utan består av nät av ömsesidigt beroende kunskapsdelar där begrepp, principer och metakognitiva procedurer utgör de sammanbindande länkarna. Här har den konceptuella och procedurella inriktningen av undervisningen olika roller. I en procedurell inriktning fokuseras mycket på lokala beräkningar utan begreppslig förankring. Den procedurella inriktningen belyser därför inte i någon högre grad, hur olika moment i matematiken förståelsemässigt bygger på varandra eller är sammanlänkade med begrepp. En konceptuell undervisning däremot inriktas mer på förståelse av begrepp och generella matematiska principer, så att olika moment på detta sätt sammanlänkas.

4.1 Syfte

I denna studie är alltså avsikten att belysa svenska gymnasieelevers kunskapsuppbyggnad. På vad sätt skiljer sig resultaten på testuppgifter och sekvenser av testuppgifter mellan åren 1995 och 2008? Finns det några typiska lösningsmönster, som kan förklara eller belysa skillnaderna i resultaten?

Syftet är:

- att ytterligare belysa svenska elevers matematikkunskaper med inriktning på procedurer och begrepp
- att studera och jämföra skillnader mellan TIMSS 1995 och TIMSS Advanced 2008
- att utifrån kunskapens beskaffenhet samt tidigare forskning dra slutsatser om undervisningens inriktning

5 Metod

I första avsnittet beskrivs hur analysen av testuppgifterna har genomförts. Därefter ges en redovisning av de vetenskapliga metoderna, vilka använts i denna studie.

5.1 Analys av testuppgifter

I TIMSS Advanced 2008 finns ett antal frisläppta uppgifter, vilka också ingått i specialistundersökningen i TIMSS 1995. Dessa uppgifter utgör ungefär 40 procent av alla testuppgifterna.

De tre olika uppgiftstyperna är klassificerade efter hur lösningarna ska redovisas. Den första typen består av flervalsuppgifter. I den andra skall eleverna endast redovisa ett svar, medan i den tredje typen av uppgifter skall även lösningarna redovisas. Efter bedömningen av elevlösningarna i respektive land stansas de och redovisas som datafiler. Speciellt enkelt är det att analysera flervalsuppgifterna, då detta kan göras med dataprogram. Distraktorerna representerar oftast inte vilka slumpmässiga fel som helst utan har sina rötter i missuppfattningar av begrepp eller inkorrekta tillämpningar av procedurer. Missuppfattningarna och de inkorrekta tillämpningarna är oftast kända från tidigare forskning och kan därför utan svårighet identifieras. Hänsyn har tagits till gissningar (Deras påverkan på frekvensfördelningen har studerats med Chi^2-test).

Bedömning av uppgifter, som endast kräver svar, har skett efter TIMSS-projektets internationella bedömningsmall. Alla elevsvar har dock inte kunnat förutses och finns därför inte med i mallen.

Den tredje typen av uppgifter har erbjudit en rikare beskrivning av elevernas lösningsstrategier. I dessa dokumenterade elevlösningar har det då varit möjligt att med hög precision se olika tillämpningar av beräkningsprocedurer och det har även varit möjligt att se hur olika uppfattningar av begrepp kommit till uttryck.

Precisionen i dokumentationen av elevlösningar varierar givetvis och därmed kan också tolkningen vara mer eller mindre precis. Även om en lösning är väl dokumenterad, kan det ibland vara svårt att kausalt binda den till en speciell begreppsuppfattning eller till en speciell tillämpning av en procedur. Om begreppsuppfattningen eller proceduren tidigare är känd, kan detta avsevärt underlätta en sådan kausal analys. Samma svar och lösningar kan sannolikt inte hela grupper av elever prestera slumpmässigt och därför har slutsatser alltid baserats på större grupper av elever. Inte desto mindre är det viktigt att konstatera, att denna studie grundar sig på antagandet, att elevers lösningar speglar deras uppfattningar om begrepp och deras tillämpningar av procedurer.

5.2 Kvalitativ innehållsanalys och statistiska metoder

Den kvalitativa innehållsanalysen i denna studie har sina rötter i den internationella forskningen om skolmatematiken. Tidigare rapporter inom området har visat på forskning, som kan ligga till grund för slutsatser utifrån analysen av enskilda uppgifter. De flesta av slutsatserna utgår ifrån kända förhållanden, vilka tidigare redovisats i den internationella forskningen. En viktig utgångspunkt vid analysen har varit de två kunskapsslagen, procedurell och konceptuell. Som redovisats i kapitlet ”Teoretiska förutsättningar” så har en kombination av kvalitativ innehållsanalys och statistiska analyser använts. Efter det att typiska misstag identifierats, så sker en statistisk analys där frekvenser och relativa frekvenser av lösningskategorier bestäms.

En grupp av uppgifter måste ha gjorts av samma elever och därför komma från samma testblock eller testhäfte. Denna analys visar frekvensen och den relativa frekvensen för varje enskilt lösningsmönster, såsom alla uppgifter lösta, alla utom en lösta eller enstaka uppgifter lösta. Har elever frekvent löst alla uppgifter eller alla utom en, är det sannolik att de besitter konceptuell kunskap och att deras undervisning haft den inriktningen. Har de däremot löst enstaka spridda uppgifter, är det sannolikt, att de har procedurell kunskap, som inte transfererats till olika kontexter och att de har haft en procedurell undervisning.

För att bestämma beskaffenheten hos elevers kunskaper i matematik kan inte annat än denna form av kvalitativ analys användas. Den utvidgade fenomenografiska teoriramen erbjuder en sådan ram inom det postpositivistiska paradigmet, vilket i sin tur tillåter en kombination av kvalitativa och kvantitativa analyser, vilka är nödvändiga för denna typ av djupanalys. Utan en sådan kombination skulle troligen inte lösningsmönstren kunnat studeras utan alltför stora forskningsinsatser.

6 Resultat

I TIMSS Advanced 2008 testades gymnasieelevers kunskaper om olikheter, funktioner, formler, gränsvärden, serier, komplexa tal och geometriska begrepp. Några av de frisläppta uppgifterna i TIMSS Advanced 2008 ingick också i specialistundersökningen i TIMSS 1995. Detta möjliggjorde jämförelser mellan de två mättillfällena.

I syfte att avgöra beskaffenheten hos elevernas kunskaper inom algebra, differential- och integralkalkyl samt geometri så studerades deras lösningsmönster, vilket innebar, att frekvenser av olika konstellationer av lösningar av uppgifter undersöktes. För att studera en grupp av elevers lösningsmönster krävs, att deras testhäften har innehållit uppgifter från ett och samma block av de frisläppta uppgifterna. Utifrån de mönster som framkommer, är det möjligt att dra slutsatser om karaktären på elevernas kunskaper och undervisningens utformning.

Kapitlet avslutas med en sammanfattning av resultaten.

6.1 Olikheter

Olikheten i uppgiften nedan (M6_02) består av ett rationellt uttryck. Som vanligt skall nämnaren i rationella uttryck vara skild från noll. Detta betyder att $x \neq 2$. Det kan konstateras, att de kunskaper, som behövs för att lösa denna olikhet, mer än väl täcks av kursplanerna i D- och E-kursen. I kursplanen för D-kursen sägs att ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning”. Med de kunskaper, som detta uppnåendemål föreskriver, kan uppgiften lösas. För lösningen används derivering av en kvot samt tillämpning av denna regel vid problemlösning. Dock kan konstateras att tillämpa kunskaper i ett obekant sammanhang innebär för de flesta elever en ökad svårighet (Selden, et al., 1989; 1994).

M6_02

	Tot. 2008
1 poäng	30,2%
Fel svar	59,9%
Ej svar	9,9%

2

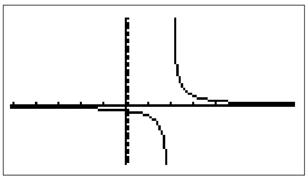
$$\frac{x+1}{x-2} > 1$$

Vilka värden på x är lösningar till ovanstående olikhet?

Svar: ______________

MA23135

En möjlig lösningsstrategi är att studera motsvarande funktion $f(x) = \frac{x+1}{x-2} - 1$ som efter förenkling till gemensamt bråkstreck blir $f(x) = \frac{3}{x-2}$. Då denna funktion är större än noll är olikheten uppfylld. Funktionens derivata är negativ då $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$, vilken är negativ för alla x. Funktionen är alltså strängt avtagande. För $x < 2$ är funktionen mindre än 0 och för $x > 2$ så är den större än noll. Då $x \to 2-0$, så går $f(x) \to -\infty$ och då $x \to 2+0$ så går $f(x) \to +\infty$. Alltså finns en asymptot för $x = 2$. För att olikheten skall vara uppfylld krävs ju att $f(x) > 0$, vilket gäller då och endast då $x > 2$. Det är alltså nödvändigt att uppfatta variabeln som en generell talbeteckning.



Med en grafritande räknare kan snabbt en överblick över funktionens graf ge besked om att funktionen är positiv endast då $x > 2$ Som lösning på uppgiften krävdes inte någon fullständigt redovisad lösning utan endast ett svar.

Ungefär en tredjedel av eleverna lyckades lösa uppgiften korrekt, medan två tredjedelar misslyckades. Så en ganska stor grupp av elever behärskade inte detta uppnåendemål i D-kursen.

6.2 Funktioner

Testuppgifterna omfattade flera olika egenskaper hos funktioner. I första avsnittet analyseras hur eleverna förstår sammansatta funktioner. Därefter analyseras hur eleverna tolkar grafer, hur de förstår och tillämpar kontinuitet, deriverbarhet och derivator samt primitiva funktioner och integraler.

6.2.1 Sammansatta funktioner

I första uppgiften (M1_01) testades alltså sammansatta funktioner, det vill säga en funktion av en funktion. Uppgiften gavs i TIMSS Advanced 2008 och i TIMSS 1995. I uppnåendemålen för D-kursen nämns att ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning.” Så sammansatta funktioner är ett moment inom ramen för D-kursen.

Variabeln x får alltså i en sådan kontext en annan betydelse än enbart en generell talbeteckning. I $g(x)$ betyder x en annan funktions värde, $g(f(x))$. Variabeln kan alltså, förutom att vara en generell talbeteckning, även beteckna

1

Funktionerna f och g definieras som $f(x) = x - 1$ och $g(x) = (x+3)^2$.

$g(f(x))$ är då lika med

Ⓐ $(x-1)(x+3)^2$

Ⓑ $(x+3)^2 - 1$

Ⓒ $(2x-2)^2$

Ⓓ $(x+2)^2$

Ⓔ $x^2 + 8$

MA13001

M1_01

	Tot. 2008	Tot. 1995
A	25,6%	21,8%
B	14,5%	12,6%
C	6,3%	2,8%
D*	43,8%	59,6%
E	5,9%	2,6%
Ej Svar	3,9%	0,6%

* markerar rätt svarsalternativ

funktionsvärden. Detta innebar för eleverna en extra svårighet jämfört med icke-sammansatta funktioner.

Distraktorerna i uppgiften var av två slag. Alternativen b) och d) representerade sammansatta funktioner, medan de övriga distraktorerna representerade kombinationer av multiplikation och addition av funktionerna. Om eleverna valde något av de senare alternativen, så indikerar det brist på förståelse för att variabeln kan representera funktionsvärden.

Beteckningarna i uppgiften underlättade emellertid inte förståelsen, då den oberoende variabeln x i $f(x)$ och $g(x)$ och inte är den samma. I matematisk litteratur förekommer olika variabelbeteckningar för sammansatta funktioner som $z = g(u)$ och $u = f(x)$. Sammansättningen blir då mer naturlig och logisk genom att u i $z = g(u)$ ersätts med $u = f(x)$. Detta beteckningssätt användes också i den andra uppgiften inom detta avsnitt.

Det korrekta alternativet d), $(x + 2)^2$, dvs. $g(f(x))$ visade, att eleverna förstått, att variabeln x i $g(x)$ kan representera en annan funktions $f(x)$ värden. I TIMSS Advanced 2008 valde knappt hälften av eleverna detta alternativ medan en majoritet gjorde det i TIMSS 1995. Distraktorn $(x + 3)^2 - 1$, som istället representerar den sammansatta fuktionen $f(g(x)$ valdes av en betydligt mindre andel elever båda åren. De elever som utifrån en medveten förståelse valde denna distraktor hade tydligen förstått variabelns vidgade betydelse från att representera en generell talbeteckning till att även representera en annan funktions värde. Distraktorn $(x - 1)(x + 3)^2$, som kunde fås genom att multiplicera de båda funktionsuttrycken, valdes 2008 av en dryg fjärdedel av eleverna och 1995 av en dryg femtedel. Den tredje distraktorn c), $(2x - 2)^2$, var summan av det första funktionsuttrycket och det andra utan kvadrering. Därefter hade summan kvadrerats och ett teckenfel tillkommit. En mycket liten andel elever attraherades båda åren av denna distraktor. Distraktorn $x^2 + 8$, som kunde erhållas om funktionsuttrycken adderades och om x^1-termerna ignorerades, valdes även den lågfrekvent.

En minskning av lösningsfrekvensen med knappt 15 procent mellan åren kan konstateras. Endast hälften av eleverna behärskade detta uppnåendemål i TIMSS Advanced 2008.

I nästkommande uppgift (M07_04), som endast förekom i TIMSS Advanced 2008, användes det mer relevanta skrivsättet för funktionerna $f(x)$ och $g(u)$. Ett minimivärde för den sammansatta funktionen $g(f(x))$ skulle bestämmas. Även denna uppgift täcks av samma mål som i den föregående, ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning.”

Eftersom det i uppgiften förutsätts att en minimipunkt existerar, så är ett nödvändigt villkor, att den sammansatta funktionens derivata har ett nollställe i punkten. Derivatan av den sammansatta funktionen är

$$g'(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 7}}$$

Det enda nollstället är tydligen $x = 0$, vilket ger $g(0) = \sqrt{7}$, då $g(x) = \sqrt{2x^2 + 7}$. Detta nollställe motsvarar alternativ d), som valdes av störst andel elever. Att bestämma minimivärdet av en sammansatt funktion kan inte anses vara en rutinuppgift, som eleverna tränat att lösa, utan en speciell uppgift där bland annat

24 För funktionen f gäller att $f(x) = x^2 + 4$. För en annan funktion g gäller att $g(u) = \sqrt{2u-1}$. Bestäm minimivärdet för $g\left(f(x)\right)$.

Ⓐ 0

Ⓑ $\sqrt{3}$

Ⓒ $\sqrt{\frac{7}{2}}$

Ⓓ $\sqrt{7}$

MA23133

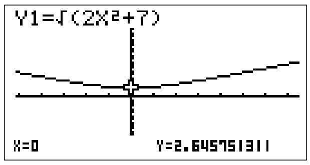
M07_04

	Tot. 2008
A	12,0%
B	23,7%
C	22,8%
D*	24,0%
Ej svar	17,5%

* markerar rätt svarsalternativ

kedjeregeln måste tillämpas. Den lägre lösningsfrekvensen stöder också denna bedömning.

Med en grafritande räknare kan snabbt konstateras, att en minimipunkt existerar för $x = 0$. Ett närmevärde på y-koordinaten går också att få, vilket kan vara en kontroll av beräkningarna.



Distraktorn a), 0, motsvarar inte y-koordinaten utan x-koordinaten för minimipunkten, det vill säga derivatans nollställe och prickades in relativt lågfrekvent. Däremot valdes distraktorn b), som representerar ett räknefel, $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, istället för $\sqrt{2 \cdot 4 - 1} = \sqrt{7}$, av ungefär samma andel, som föll för det korrekta alternativet. Distraktorn c) representerar misstagen att inte beakta den inre derivatan av den sammansatta funktionen vid deriveringen och att inte beakta en negativ term i uttrycket. Distraktorn blir då $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+7} = 0$, vilket ger $x = \sqrt{\frac{7}{2}}$. Även denna distraktor attraherade en ganska stor andel elever. Begreppsligt sett representerar distraktorn c) ett allvarligare misstag, då den inre derivatan i kedjeregeln inte beaktats. Det är detta som skiljer en derivata av en sammansatt funktion från en derivata av en icke sammansatt.

Alltså behärskade cirka en fjärdedel av eleverna uppnåendemålet för derivering av sammansatta funktioner.

6.2.2 Grafer

Funktioners grafer testades inte bara i detta avsnitt utan kom även in som delar av testuppgifter, som behandlade andra matematiska fenomen.

Den första uppgiften (M1_02), som gavs i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995, handlade om en funktion, som definierades av olika funktionsuttryck i olika intervaller av definitionsområdet. Funktionens graf skulle identifieras bland alternativen. I C-kursens uppnåendemål föreskrivs att ”Eleven skall kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.” Dessutom sägs att ”Eleven skall kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt, då funktionen är given genom sin graf”.

M1_02

	Tot. 2008	Tot. 1995
A*	41,4%	67,0%
B	12,3%	5,4%
C	7,2%	6,0%
D	10,4%	5,9%
E	22,1%	14,2%
Ej svar	6,7%	1,5%

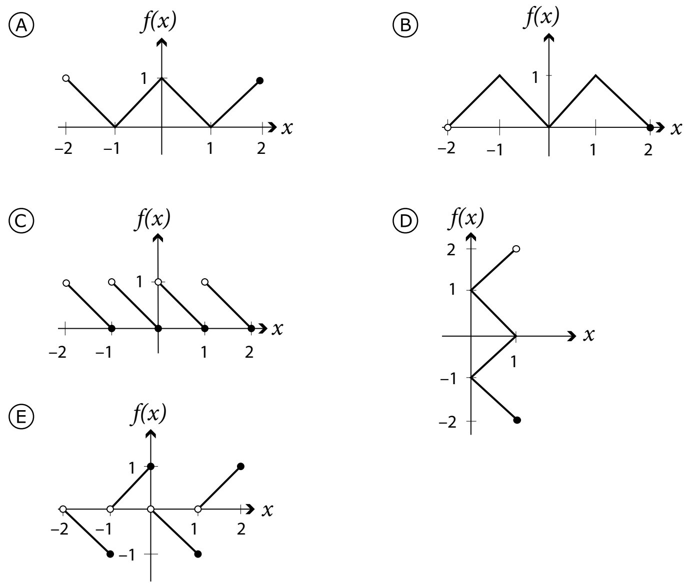
* markerar rätt svarsalternativ

2

I en av nedanstående figurer visas grafen till funktionen *f*, som definieras av

$$\begin{aligned} f(x) &= -x-1 && \text{om} \quad -2 < x \leq -1 \\ f(x) &= x+1 && \text{om} \quad -1 < x \leq 0 \\ f(x) &= -x+1 && \text{om} \quad 0 < x \leq 1 \\ f(x) &= x-1 && \text{om} \quad 1 < x \leq 2 \end{aligned}$$

Markera rätt figur.



MA13002

Den internationella forskningen visar, att elever oftast tränas att gå från funktionsuttrycket till att konstruera grafen (Leinhardt et al., 1990). Då detta var möjligt i denna uppgift, så torde detta kunna leda till en relativt hög lösningsfrekvens.

Från de fyra funktionsuttrycken i uppgiften kan alltså slutsatsen dras, att funktionen består av kombinationer av fyra linjära segment, vilka har de båda riktningskoefficienterna –1 och +1. Utifrån detta faktum kan alternativ c) uteslutas, eftersom ju alla segmenten där har samma riktningskoefficient. Denna distraktor var också lågfrekvent i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995. I alternativ b) kommer riktningskoefficienterna i omvänd ordning, alltså +1 kommer före –1, vilket inte stämmer med funktionsuttrycken. Därför kan detta alternativ uteslutas. Det valdes frekvent 2008 men lågfrekvent 1995. Alternativ d) kan också uteslutas, eftersom *x*- och *y*-axlarna har kastats om där. De fyllda ringarna i grafen innebär, att värdet där är funktionsvärdet och en ofylld ring att värdet inte är lika med funktionsvärdet. Funktionsvärdet $f(-1)$ skall enligt uttrycket vara 0, vilket inte är fallet i alternativ e) utan –1. Distraktorn e) innehåller segment med korrekta riktningar, men skärningarna med *x*-axeln är inkorrekta. På denna grund utesluts distraktorn e), som emellertid attraherade en förhållandevis stor andel elever 2008 medan den 1995 var något mindre.

Då återstår endast det korrekta alternativet a), i vilket samtliga villkor är uppfyllda. En relativt stor andel, ungefär två tredjedelar av eleverna, valde detta 1995 medan en betydlig minskning hade skett till år 2008, då endast drygt två femtedelar fastnade för alternativet. Det hade alltså skett en minskning mellan åren på drygt 20 procent. Att gå från ett funktionsuttryck till att bestämma vilken graf, som är den korrekta, är alltså betydligt lättare än att bestämma funktionsuttrycket från grafen. Funktioner, som den i uppgiften, vilka definieras på olika sätt för olika intervall, ökar dock svårighetsgraden för eleverna (Carpenter et al., 1981; Stein & Leinhardt, 1989; Markovits et al., 1986; Kerslake, 1977; 1981; Zalslavsky, 1987; 1988; Schoenfeld et al., 1990).

Drygt hälften av eleverna behärskade alltså inte dessa två av C-kursens uppnåendemål.

Uppgiften (M1_09) nedan gavs både i TIMSS Avanced 2008 och TIMSS 1995. Det efterfrågades hur många heltalskoordinater, som ligger på funktionens graf. Ett av målen i A-kursen belyser detta ”Eleven skall kunna tolka och hantera algebraiska uttryck, formler och funktioner som krävs för problemlösning i vardagslivet och i studieinriktningens övriga ämnen.” Så det som krävs är en viss förmåga att tolka och hantera funktionen.

9

Hur många punkter med heltalskoordinater ligger på grafen till funktionen $y = \frac{12}{x}, x > 0$?

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) oändligt många

MA13009

M1_09

	Tot. 2008	Tot. 1995
A	5,1%	4,1%
B	9,7%	6,4%
C*	38,8%	59,8%
D	40,0%	29,2%
Ej svar	6,5%	0,5%

* markerar rätt svarsalternativ

Först översätts vad heltalskoordinater på grafen betyder för funktionsuttryckets beskaffenhet. Det kan konstateras, att om y skall vara ett heltal, så måste x-koordinaten också vara ett heltal, som delar talet 12, så att resultatet blir ett heltal. För x-koordinater större än 12, så blir funktionsvärdet alltid mindre än ett. Sålunda handlar det om att fastställa vilka tal, som delar 12 med resten noll. Punkterna är (1; 12), (2; 6), (3; 4), (4; 3), (6; 2) och (12; 1). Detta är 6 punkter, vilket svarar mot det korrekta alternativet c). Det valdes av ungefär två femtedelar av eleverna i TIMSS Advanced 2008 och av nästan två tredjedelar i TIMSS 1995, en skillnad på praktiskt taget 20 procent. Enligt Markovits et al. (1986) har elever uppenbara svårigheter, vad gäller förståelse av diskreta funktioner som till exempel funktioner, som bara antar heltalsvärden.

Observera att även x-koordinaten skall vara ett heltal. Distraktorn d), oändligt många, representerar sannolikt rationella värden på x, vilka kan göra att y resulterar i ett heltal. Om exempelvis $x = \frac{1}{2}$ så blir $y = 24$. Då blir emellertid endast den ena koordinaten ett heltal. Tydligen har en större andel elever gjort detta misstag 2008 än 1995. Skillnaden är nästan 15 procent.

Övriga distraktorer, som inte representerar några begreppsliga misstag utan endast utgör storleksmässigt tänkbara alternativ, valdes tillsammans relativt lågfrekvent 2008 och 1995.

Ungefär två femtedelar av eleverna visade, att de behärskade detta uppnåendemål i A-kursen.

I nästa uppgift (M7_03), som gavs endast i TIMSS Advanced 2008, skulle ett antal konstanter *a*, *b* och *c* fastställas genom att utnyttja de givna punkternas koordinater på funktionens graf. Kunskaperna, som behövs för att lösa uppgiften, finns i målsättningen för C- och E-kurserna. I C-kursens uppnåendemål sägs ”Eleven skall kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering.” I E-kursens sägs det att ”Eleven skall kunna räkna med komplexa tal skrivna i olika former samt kunna lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter även med hjälp av faktorsatsen.” Så innehållet är väl täckt i de båda uppnåendemålen.

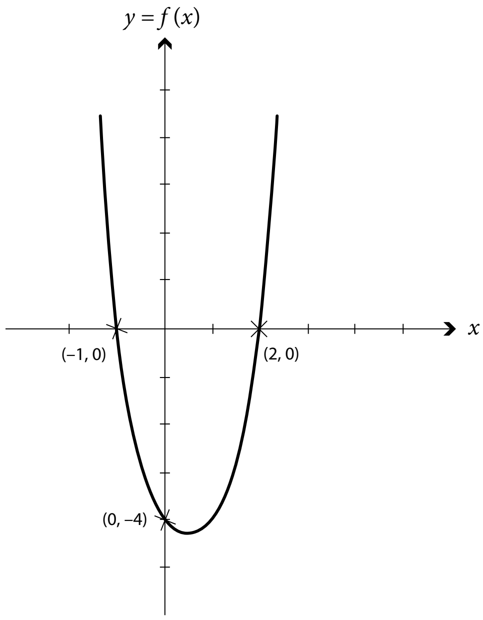
Eftersom polynomfunktionen, som representerar en parabel, har nollställena $x = –1$ och $x = 2$, så gäller enligt faktorteoremet, att $f(x) = k(x + 1)(x – 2)$, där konstanten k avgör grafens form, ju större värde på k desto vidare blir parabeln. För $x = 0$ blir $f(0) = –2k$ men enligt grafen är $f(0) = –4$, vilket medför att $k = 2$. Funktionen $f(x)$ blir då $2x^2 – 2x – 4$, vilket innebär, att $a = 2$, $b = –2$ och $c = –4$.

Ett annat alternativ att lösa uppgiften är genom insättning och beräkning av funktionsvärdena. Eftersom $f(0) = –4$, så kan c bestämmas, $c = –4$. Då har punkten, i vilken grafen skär y-axeln i –4, använts. De övriga två punkterna används för att bestämma a och b. Då $f(–1)$ beräknas fås $a – b – 4 = 0$ och för

M7_03

	Tot. 2008
1 poäng	8,1%
Fel svar	37,4%
Ej svar	54,5%

23



I figuren ovan visas grafen till funktionen f, där $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bestäm konstanterna a, b och c.

Redovisa hur du kommit fram till ditt svar.

$f(2)$ fås $4a + 2b - 4 = 0$. Om den första ekvationen multipliceras med 2 fås följande:

$$\begin{array}{rl} & 2a - 2b - 8 = 0 \\ + & \underline{4a + 2b - 4 = 0} \\ & 6a \qquad -12 = 0 \end{array}$$

Detta innebär, att $a = 2$ och $b = -2$ och att funktionen f blir $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$. De flesta elever, som löste uppgiften, löste den på detta sätt. De kunskaper som behövs för denna lösningsstrategi ingår i B-kursen, ”Eleven skall kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former samt lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder”. Eleverna borde alltså ha lärt sig att lösa linjära ekvationssystem tidigt. Detta tycks dock inte vara fallet.

En ganska stor andel elever lyckades beräkna $c = -4$, men lyckades däremot inte få fram de övriga konstanterna alternativt fick dem inkorrekta. En något större andel misslyckades helt med uppgiften.

De flesta uppgifter, som eleverna har erfarenhet av, handlar ju om att från ett funktionsuttryck bestämma en graf och inte tvärt om som i denna uppgift. Detta gör, menade Janvier (1987d), att elever i allmänhet saknar tillräcklig träning för att kunna lösa denna typ av uppgifter korrekt. Resultatet på uppgiften är även en bekräftelse på Zalslavskys (1988) resultat, att elever kan ha svårigheter att översätta kvadratiska funktioner från en graf till ett funktionsuttryck. Uppgiften kan inte heller ses som en rutinuppgift, något som skulle kunna förklara den låga lösningsfrekvensen (Selden, et al., 1989; 1994).

6.2.3 Kontinuitet, deriverbarhet och derivator

Området testas med sju testuppgifter, som framför allt berör deriverbarhet och derivator. I den första uppgiften (M3_05) behandlas kontinuitet och deriverbarhet.

Begreppet kontinuitet förekommer inte explicit i kursplanerna. I B-kursens uppnåendemål står det, att ”Eleven skall kunna förklara vad som kännetecknar en funktion samt kunna ställa upp, tolka och använda några icke-linjära funktioner som modeller för verkliga förlopp och i samband därmed kunna arbeta både med och utan dator och grafritande hjälpmedel.” Tolkningen av icke-linjära funktioner innefattar självklart ett så centralt begrepp som kontinuitet. Den dynamiska uppfattningen av gränsvärden kan emellertid hindra elevers förståelse av begreppet kontinuitet (Tall, 1996). Många elever uppfattar inte heller konstanta eller delvis konstanta grafer som funktioner (Marnyanskii, 1975; Markovits et al., 1986; Barnes, 1988). Redan vid själva åsynen av uppgiften uppstår alltså problem för många elever.

Uppgiften var med både i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995. För att funktionen skall vara kontinuerlig i det öppna intervallet $-3 < x < +3$ krävs, att funktionen är kontinuerlig i varje punkt i intervallet. För att vara kontinuerlig i en punkt krävs att höger- och vänstergränsvärdena i punkten båda är lika med funktionsvärdet. Av funktionens graf framgår att så inte är fallet för $x = 0$, då $\lim_{n \to +0} f(x) = f(0) = 2$ och $\lim_{n \to -0} f(x) = 0$. Eftersom höger- och vänstergränsvärdena är olika, så är funktionen diskontinuerlig i $x = 0$. I punkterna $x = 2$ och $x = -1$ är funktionen däremot kontinuerlig, då höger- och vänstergränsvärdena där är lika. I TIMSS Advanced 2008 var det något mindre än en fjärdedel av eleverna, som löste deluppgift A korrekt, medan det 1995 var en dryg tredjedel, en skillnad på cirka 15 procent.

M3_05 A

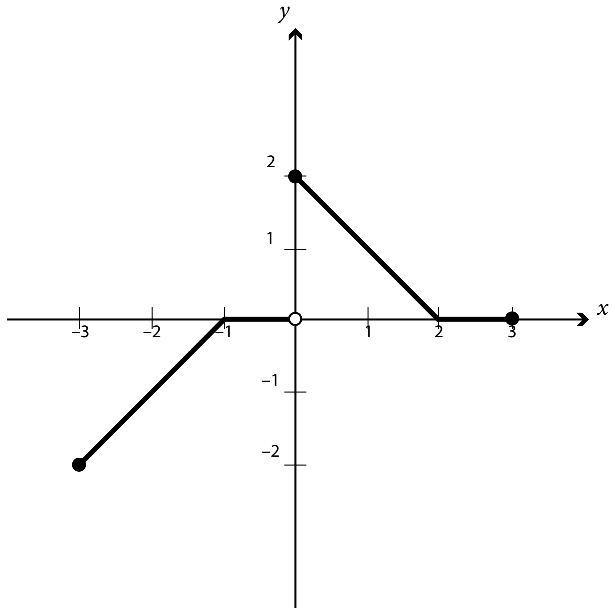
	Tot. 2008	Tot. 1995
1 poäng	22,5%	37,4%
Fel svar	51,5%	38,1%
Ej svar	26,0%	24,5%

M3_05 B

1 poäng	3,4%	1,7%
Fel svar	67,0%	72,6%
Ej svar	29,5%	25,7%

25

Funktionen $y = f(x)$, $-3 \le x \le 3$ definieras genom nedanstående graf.



A. För vilket eller vilka värden på x i intervallet $-3 < x < 3$ är funktionen f INTE kontinuerlig?

B. För vilket eller vilka värden på x i intervallet $-3 < x < 3$ är funktionen f INTE deriverbar?

MA13025

I deluppgift B efterfrågas funktionens deriverbarhet. Åtminstone tre uppnåendemål i C-kursplanen tar upp derivata och deriverbarhet. I det första sägs att ”Eleven skall kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf”, i det andra att ”Eleven skall kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt, då funktionen är given genom sin graf” och i det tredje att ”Eleven skall kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel.” I kursplanen för D-kursen sägs att ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning”. Även i E-kursens uppnåendemål återkommer begreppet derivata nu i kombination med problemlösning ”Eleven skall kunna analysera, formulera och lösa problem, som kräver bestämning av derivator och integraler samt beräkna volymer med hjälp av integraler ...”. Så kunskapsområdet är väl täckt i uppnåendemålen.

Stora grupper av elever förväxlar derivata med maximi- och minimipunkter och får därför begreppsliga svårigheter med vad derivatan betyder i ett intervall, där funktionen utgörs av en linje parallell med x-axeln (Bell & Janvier, 1981; Janvier, 1978; McDermott et al. 1987; Preece, 1983b).

Om höger- och vänsterderivatorna existerar och är lika, så är funktionen deriverbar, i annat fall inte. I punkten $x = 2$ är högerderivatan 0 och vänsterderivatan –1, vilka är riktningskoefficienterna för de linjära delarna av funktionen. De båda är olika och följaktligen är funktionen inte deriverbar i punkten (2; 0). I punkten (0; 2) är funktionen inte heller deriverbar, eftersom högerderivatan är –1 och vänsterderivatan 0. Även i punkten (–1; 0) är höger- och vänsterderivatorna olika, 0 och +1. Funktionen är därför inte deriverbar i den punkten heller. I tre punkter är alltså funktionen inte deriverbar (2; 0), (0; 2) och (–1; 0). Ett fåtal elever löste uppgiften korrekt inte bara 2008 utan också 1995.

En dryg tredjedel av eleverna i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 menade, att funktionen var deriverbar i alla punkter utom för $x = 0$. Ett annat misstag, som hade en ännu mer begreppslig bakgrund, framkom, då eleverna ansåg, att funktionen inte var deriverbar i de delar där grafen anslöt till x-axeln. Det var en betydligt mindre andel 2008 jämfört med 1995, som gjorde detta misstag. Eleverna har inte riktigt förstått, vad det innebär, att derivatan är lika med noll i maximi- och minimipunkter. Tangenten i en sådan punkt har nämligen samma riktning som x-axeln (Bell & Janvier, 1981; Janvier, 1978; McDermott et al. 1987; Preece, 1983b). Övriga typer av misstag förekom mer frekvent 2008 än 1995. Endast ett fåtal elever uppnådde de aktuella målen, som finns i tre av gymnasieskolans kurser.

I den kommande uppgiften (M1_06), som gavs i TIMSS Advanced både 2008 och TIMSS 1995 skulle derivatan av en funktion, som var sammansatt, bestämmas. Även i denna uppgift är kunskapsområdet väl täckt i D-kursens uppnåendemål, där det sägs att ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning”. Även i C-kursens sägs att ”Eleven skall kunna härleda deriveringsregler för några grundläggande potensfunktioner, summor av funktioner samt enkla exponentialfunktioner och i samband därmed beskriva varför och hur talet e införs.” Detta betyder, att kedjeregeln borde vara ett naturligt inslag i undervisningen på D-kursen och att eleverna frekvent stött på dess tillämpning på sammansatta funktioner.

Kedjeregeln innebär, att en sammansatt funktion, $f(g(x))$, har en derivata $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Den sammansatta funktionen bestod av de båda funktionerna $f(y) = \frac{4}{\sqrt{y}}$ och $y = g(\mathrm{x}) = 3x - 4$. Den första funktionen kan skrivas $f(y) = 4 \cdot y^{-1/2}$. Dess derivata med avseende på y blir då $f'(y) = -\frac{4}{2}y^{-3/2}$, vilket efter förenkling, insättning och multiplikation med inre derivatan, $g'(x) = 3$, blir $-\frac{4}{2(3x-4)^{3/2}} \cdot 3 = -\frac{6}{(3x-4)^{3/2}}$. Detta motsvarar alternativ d), vilket valdes av knappt en fjärdedel av eleverna 2008 och av drygt en tredjedel 1995. Det var alltså inte någon av-

M1_06

	Tot. 2008	Tot. 1995
A	9,7%	7,3%
B	21,6%	22,9%
C	26,5%	27,6%
D*	26,5%	34,2%
E	7,6%	4,9%
Ej svar	8,1%	3,1%

* markerar rätt svarsalternativ

6

Derivatan av funktionen $\frac{4}{\sqrt{3x-4}}$ är

Ⓐ $12\sqrt{3x-4}$

Ⓑ $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Ⓒ $\frac{-2}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

Ⓓ $\frac{-6}{(3x-4)^{\frac{3}{2}}}$

Ⓔ $6\sqrt{3x-4}$

MA13006

görande skillnad i lösningsfrekvens mellan åren. Att endast drygt en fjärdedel av eleverna löste en uppgift, som berör ett av de centrala avsnitten i D-kursen, skulle kunna förklaras med att uppgifter, som innebär tillämpningar av kedjeregeln och därmed identifikation av vilka de sammansatta funktionerna är, inte kan betraktas som direkta rutinuppgifter. Selden, et al., (1989; 1994) fann ju, att elever presterade bra på uppgifter i bekanta kontexter men mindre bra i mer okända kontexter, i vilka intränade procedurer inte direkt kunde tillämpas.

Distraktorn a) $12\sqrt{3x-4}$ är en primitiv funktion till funktionen i uppgiften i kombination med ett mindre räknefel och valdes relativt lågfrekvent 2008 och 1995. Distraktorn b) fås genom att nämnaren deriveras, som om den vore täljaren utan beaktande av rottecknet. Derivatan av $(3x-4)$ är 3 och hela resultatet blir därmed inkorrekt, $\frac{4}{\sqrt{3}}$. Denna distraktor var ungefär lika frekvent 2008 som 1995. Även distraktorn c), $\frac{-2}{(3x-4)^{3/2}}$, i vilken funktionens inre derivata, 3, inte tagits med, valdes av samma andel elever 2008 som 1995. Dessa andelar elever har därmed visat, att de inte behärskar kedjeregeln. Distraktorn e), $6\sqrt{3x-4}$, har erhållits genom att deriveringsproceduren $D(x^n) = nx^{(n-1)}$ inte följts utan att $D(x^n) = (n+1)x^{(n+1)}$ har följts och genom att den inre derivatan inte har beaktats. En mindre andel elever föll för denna distraktor 2008 och 1995.

I princip kan sägas att uppgiften löstes korrekt ungefär lika frekvent båda åren.

I uppgiften (M6_06), som endast ingick i TIMSS Advanced 2008, skulle en rationell funktion deriveras. I D-kursens uppnåendemål framgår att ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, pro-

6

Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$

Redovisa hur du kommit fram till ditt svar.

MA23159

M6_06

	Tot. 2008
1 poäng	19,7%
Fel svar	70,2%
Ej svar	10,1%

dukt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning." I denna uppgift handlade det om derivering av en kvot av funktioner.

Formeln för derivering av en kvot av två funktioner fanns i testhäftets formelsamling.

Om $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ och $g(x) \neq 0$, så är $f'(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

För $x \neq 1$ gäller då $f'(x) = \frac{3 \cdot (x-1) - (3x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$

Eftersom funktionen har en asymptot för $x = 1$ och $\lim_{x \to 1+0} f(x) \to +\infty$ samt $\lim_{x \to 1-0} f(x) \to -\infty$, så är funktionen inte deriverbar för $x = 1$, då $f(1)$ inte existerar.

Endast en liten andel elever löste uppgiften korrekt. Över tre fjärdedelar misslyckades eller försökte inte trots att ett av D-kursens centrala uppnåendemål berördes. Att reda ut funktioners deriverbarhet, det vill säga derivatans existens, är inte en uppgift i vilken en procedur direkt kan tillämpas. Även den dynamiska uppfattningen av gränsvärden kan vålla problem, då de bibringar eleverna uppfattningen, att till exempel funktionsvärden inte behöver antas. Båda förhållandena kan kasta ljus över den förhållandevis låga lösningsfrekvensen (Selden et al., 1989; 1994; Schwarzenberger & Tall, 1978; Williams, 1991; Cornu, 1992).

Sofia, som studerat grafen i uppgiften (M6_07) från TIMSS Advanced 2008, påstod, att kurvans lutning är densamma i punkterna A och B. Både i C- och i E-kursen finns explicita mål för kunskapsområdet. I C-kursens uppnåendemål sägs att "Eleven skall kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel" och i E-kursens sägs att "Eleven skall kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler samt beräkna volymer med hjälp av integraler".

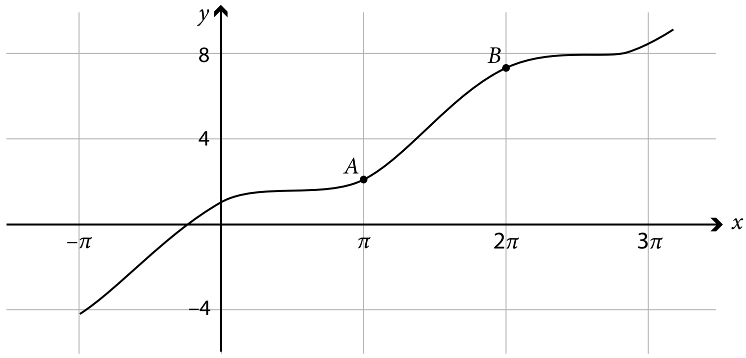
Låt $f(x) = h(x) + g(x)$ och $h(x) = x$ och $g(x) = \cos x$. De båda funktionerna $h(x) = x$ och $g(x) = \cos x$ är deriverbara i de två punkterna A och B med derivatan $f'(x) = 1 - \sin x$. Derivatans värden i punkterna blir då $f'(\pi) = 1 - 0 = 1$ och $f'(2\pi) = 1 - 0 = 1$. Derivatorna i de två punkterna är lika, vilket innebär, att kurvans riktning är densamma där. En knapp fjärdedel av eleverna löste uppgiften korrekt. Således visade det sig, att en knapp fjärdedel av eleverna behärskade dessa uppnåendemål.

Inte heller denna uppgift är av standardkaraktär så att en direkt procedur kan tillämpas. Konsekvensen kan då bli, att lösningsfrekvensen blir låg (Selden et al., 1989; 1994).

M6_07

Tot. 2008	
1 poäng	21,6%
Fel svar	59,5%
Ej svar	18,9%

7



Sofia studerar grafen till funktionen $y = x + \cos x$, som visas här ovanför. Hon påstår att kurvans lutning är samma i punkt *A* som i punkt *B*. Förklara varför hon har rätt.

MA23198

Även nästa uppgift (M6_05), som endast ingick i TIMSS Advanced 2008, berörde en sammansatt funktion $f(x) = e^{\cos x}$ för vilken derivatan skulle bestämmas. Detta berör uppnåendemålen i D-kursen, i vilket det sägs, att ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning”.

Eftersom $D(e^x) = e^x$ och den inre derivatan är $D(\cos x) = -\sin x$ så blir $f'(x) = -e^{\cos x} \cdot \sin x$, vilket motsvarar alternativ d). Detta valde en majoritet av eleverna. I denna uppgift kan kedjeregeln direkt tillämpas. Det är heller ingen tvekan om vilka funktioner som är sammansatta, e^y och $\cos x$. Att avgöra vilka de sammansatta funktionerna är kan dock vara en större svårighet än att till-

M6_05

Tot. 2008	
A	9,3%
B	9,9%
C	21,2%
D*	57,5%
Ej svar	2,0%

* markerar rätt svarsalternativ

5

Bestäm $f'(x)$ då $f(x) = e^{\cos x}$

Ⓐ $e^{\cos x}$

Ⓑ $e^{-\sin x}$

Ⓒ $e^{\cos x} \cdot \sin x$

Ⓓ $-e^{\cos x} \cdot \sin x$

MA23039

lämpa själva kedjeregeln. Men i denna uppgift var det mer givet, vilka de sammansatta funktionerna var, vilket också tycks ha inverkat positivt på lösningsfrekvensen. En förhållandevis stor andel visade, att de behärskade de berörda uppnåendemålen.

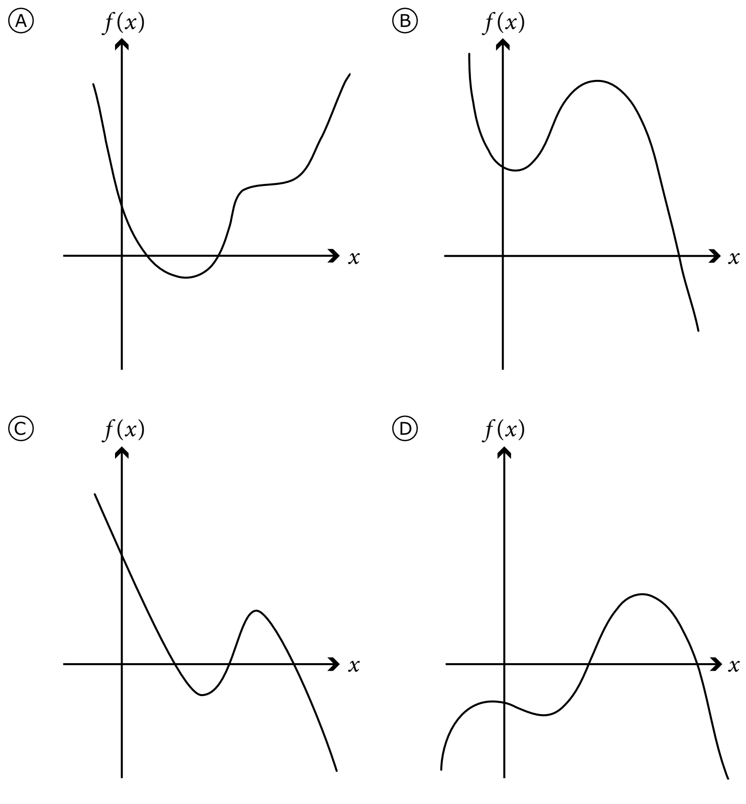
I distraktorn a) $e^{\cos x}$, har inte hänsyn tagits till den inre derivatan. Endast en mindre andel elever valde a). Distraktorn b) $e^{-\sin x}$ har fåtts genom att endast exponenten deriverats. En ungefär lika stor andel fastnade för denna distraktor. Distraktorn c) ligger nära det korrekta alternativet, men minustecknet är utelämnat $e^{\cos x} \cdot \sin x$. En femtedel av eleverna attraherades av denna distraktor.

Även nästa uppgift (M7_06), fanns endast i TIMSS Advanced 2008. I den skulle bestämmas vilken av graferna, som uppfyllde fyra givna villkor, av vilka de två första handlade om storleken på funktionsvärden, det tredje om derivatans värde i punkten med x-koordinaten 5 och det fjärde om andraderivatans värde i samma punkt. Uppgiften testar alltså, om eleverna kan tolka vilken betydelse några funktionsvärden, första derivatan och andra derivatan har för grafens utseende. Detta motsvarar uppnåendemålen i C- och D-kurserna i vilka det sägs, att "Eleven skall kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf", att "Eleven

26

Vilken av graferna A-D uppfyller samtliga nedanstående villkor?

$$f(-1) > 0,\ f(3) < 0,\ f'(5) = 0,\ f''(5) < 0$$



MA23151

M7_06

	Tot. 2008
A	13,8%
B	16,6%
C*	36,2%
D	19,6%
Ej svar	13,8%

* markerar rätt svarsalternativ

skall kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel” samt att ”Eleven skall kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang”. Man kan även tänka sig, att vissa moment från A-kursen kan vara aktuella i uppgiften. Så kunskapsområdet, som testas, är väl täckt.

Eftersom villkoret $f(-1) > 0$ inte är uppfyllt i alternativ d), där funktionen istället är negativ för x = –1 enligt grafen, så kan detta alternativ uteslutas. En dryg femtedel av eleverna observerade uppenbarligen inte detta. Eftersom andraderivatan är negativ i den punkt där förstaderivatan är noll, så är punkten med *x*-koordinaten 5 en maximipunkt. Alternativ a) innehåller inte någon sådan punkt och kan därför uteslutas. En något mindre andel elever insåg inte detta och valde denna distraktor. Eftersom $f(3) < 0$ och 3 ligger till vänster om 5, så måste grafen ligga under *x*-axeln i det intervallet. Detta är inte fallet i alternativ b). Trots detta valdes denna distraktor relativt frekvent. Däremot är samtliga villkor uppfyllda i c), vilket också är det korrekta alternativet. Ungefär en dryg tredjedel av eleverna bestämde sig för det. Så nästan två tredjedelar av eleverna löste inte uppgiften korrekt och visade därmed att de inte behärskade de aktuella uppnåendemålen.

Jämfört med andra uppgifter inom området är lösningsfrekvensen trots allt inte så låg. Likväl måste konstateras att uppgiften delvis är att betrakta som en rutinuppgift. Dock har flera forskare funnit, att elever har svårigheter med att tolka derivator och dess värden (Bell & Janvier, 1981; Janvier, 1978; McDermott et al. 1987; Preece, 1983b; Bergqvist et al., 2003).

I den sista uppgiften (M7_07), som rör kontinuitet, deriverbarhet och derivator, skulle i deluppgift A *x*-koordinaterna för grafens skärning med *x*-axeln bestämmas och i deluppgift B funktionens maximi- och minimivärden. Uppgiften ingick endast i TIMSS Advanced 2008.

Med utgångspunkt i funktionsuttrycket skulle egenskaper hos grafen bestämmas, vilket får betraktas som den strategi, som elever har tränat mest på (Janvier, 1987d). Detta framgår också av uppnåendemålen, vad gäller deluppgift A, i

M7_07 A

	Tot. 2008
1 poäng	10,4%
Fel svar	52,4%
Ej svar	37,2%

M7_07 B

1 poäng	6,7%
Fel svar	47,2%
Ej svar	46,1%

27

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

A. Vilka är *x*-värdena för de punkter där grafen till $f(x)$ skär *x*-axeln?

$x =$ _______________

B. I vilka punkter har grafen till $f(x)$ maximi- och minimivärden?

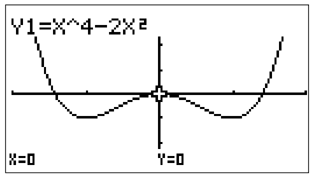
Maximivärde(n): _______________

Minimivärde(n): _______________

MA23035

vilken funktionens nollställen skulle bestämmas. I C-kursens uppnåendemål stipuleras, att ”Eleven skall kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering och i E-kursens att ”Eleven skall kunna räkna med komplexa tal skrivna i olika former samt kunna lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter även med hjälp av faktorsatsen”. Så kunskaperna för deluppgift A är väl beskrivna i uppnåendemålen.

Funktionens nollställen, som efterfrågades i deluppgift A, kan fås genom att funktionen faktoruppdelas $f(x) = x^2(x^2 - 2) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Enligt faktorsatsen gäller då, att funktionen har ett dubbelt nollställe i $x_{1,2} = 0$ och två enkla nollställen i $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Ungefär en tiondel av eleverna hade löst denna deluppgift korrekt. En något större andel hade angivit ett närmevärde av 1,41 eller 1,42, vilket enligt bedömningsmallen inte betraktades som korrekt, då det inte var ett exakt värde. Drygt hälften hade försökt men hade gjort andra typer av misstag. Bagni (2000) fann, att elever kunde ha svårigheter att förstå och acceptera, att en funktion kan ha negativa nollställen som exempelvis $-\sqrt{2}$ Däremot verkade det som om elever uppfattade det positiva nollstället som mer naturligt.



Det går relativt enkelt att få fram funktionens graf med en grafritande räknare. Då syns det, att den skär x-axeln på tre ställen, varav ett är $x = 0$.

Dessutom framgår, att funktionen har två minimipunkter för $x = -1$ och $x = 1$ samt en maximipunkt för $x = 0$. Det går att få y-koordinaterna genom insättning i funktionsuttrycket. I uppgiften fanns inga krav på redovisning av beräkningar.

I deluppgift B efterfrågades alltså funktionens maximi- och minimipunkter. Målen, som behövdes för att lösa denna deluppgift, finns i C-kursens uppnåendemål. Där sägs att ”Eleven skall kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel” samt i D-kursens ”Eleven skall kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang”.

Ett nödvändigt villkor för extrempunkter är, att derivatan är noll i dessa. Om däremot derivatan är positiv i ett intervall, så är strängt växande och om derivatan är negativ, så är strängt avtagande. Med hjälp av derivatans teckenbyte kan då avgöras om punkterna är maximi- eller minimipunkter. Dessutom gäller, att andraderivatan är negativ i en maximipunkt och positiv i en minimipunkt.

Tabell 1 Första- och andraderivatan i och runt funktionens maximi- och minimipunkter

x		-1		0		$+1$	
$f'(x) = 4x(x-1)(x+1)$	–	0	+	0	–	0	+
$f''(x) = 4\sqrt{3}(x - 1/\sqrt{3})(x + 1/\sqrt{3})$	+	+	0	–	0	+	+

Av tabellen framgår, att förstaderivatan har tre nollställen, $x = -1$, $x = 0$ och $x = +1$. Den första punkten och den tredje punkten är minimipunkter, eftersom andraderivatan är positiv där, medan den andra punkten är en maximipunkt, då andraderivatan är negativ där. Maximipunkt är då (0; 0) och minimipunkter (–1; –1) och (+1; –1).

En liten andel elever löste uppgiften korrekt. En något mindre andel fann endast två av punkterna medan en något större endast angett x-värdena och inte y-värdena för punkterna. En stor majoriet misslyckades. Som tidigare påpekats har elever i allmänhet svårigheter med derivata i kombination med maximi- och minimipunkter (Bell & Janvier, 1981; Janvier, 1978; McDermott et al. 1987; Preece, 1983b; Bergqvist et al., 2003). Trots att det kan finnas svårigheter, så måste ju eleverna klara uppnåendemålen, vilket inte var fallet i denna uppgift, då endast knappt 10 procent av eleverna gjorde det.

6.2.4 Primitiva funktioner och integraler

I de fyra uppgifter, vilka berör primitiva funktioner och integraler, efterfrågades primitiva funktioner till några av de elementära funktionerna.

I den första (M6_08), som bara ingick i TIMSS Advanced 2008, skulle en primitiv funktion till en rationell funktion bestämmas. I både D- och E-kursen finns uppnåendemål, som avser primitiva funktioner. I D-kursens kursplan fastslås att ”Eleven skall kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning” och i E-kursens att ”Eleven skall kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler samt beräkna volymer med hjälp av integraler”. För att integraler skall kunna bestämmas krävs att primitiva funktioner bestäms. Så detta handlar om moment, som kan tränas över kursgränserna.

Funktionen kan uppdelas i två bråk

$$\int \frac{x^2+2}{x}\,dx = \int \frac{x^2}{x}\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx = \int x\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx.$$

Den primitiva funktionen blir $\frac{x^2}{2} + 2\ln x + C$ eftersom $x > 0$. Detta svarar mot alternativ b), som är det korrekta. Det valdes av ungefär två femtedelar av eleverna. Trots att uppnåendemålen var tydliga, så behärskade inte mer än hälften av eleverna dem.

I distraktorn a) är $\frac{1}{2}x^2$ korrekt, medan den andra delen $-\frac{2}{x^2}$ är en inkorrekt primitiv funktion till $\frac{2}{x}$. Uttrycket representerar snarare en inkorrekt derivering av x^{-1}. Den andel elever, som fastnade för denna distraktor, visste uppenbarligen inte att $\ln x + C$ är en primitiv funktion till $\frac{1}{x}$. I distraktorn c), $\frac{1}{2}x^2 + \ln 2x + C$ är den första delen korrekt medan den andra är inkorrekt. Tvåan har där inte brutits ut utanför integraltecknet och därför har en inkorrekt primitiv funktion fastställts. En dryg femtedel av eleverna attraherades av detta alternativ. I den sista distraktorn d), $\frac{4}{3}x^3 + 4x^3 + C$ är de båda primitiva funktionerna inkorrekta

M06_08

	Tot. 2008
A	16,3%
B*	40,9%
C	21,5%
D	14,4%
Ej svar	6,8%

* markerar rätt svarsalternativ

8

Bestäm $\int \frac{x^2+2}{x}dx \;\; (x>0)$.

Ⓐ $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^2} + C$

Ⓑ $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln x + C$

Ⓒ $\frac{1}{2}x^2 + \ln 2x + C$

Ⓓ $\frac{4}{3}x^3 + 4x^3 + C$

MA23042

och representerar inget tydligt begreppsligt misstag. Denna distraktor valdes också med lägst frekvens.

I den andra uppgiften (M7_09), som även den bara fanns med i TIMSS Advanced 2008, skulle också en primitiv funktion av en sammansatt funktion bestämmas. Uppnåendemålen i förra uppgiften har relevans även för denna uppgift.

Funktionen e^{1+4x} är sammansatt av exponentialfunktionen och en linjär funktion $t = 1 + 4x$. Exponentialfunktionen är en primitiv funktion till sig själv. Om x löses ut, blir $x = \frac{t-1}{4}$ och om x substitueras i integralen fås

$$\int f(t) \cdot f'(t)dt = \int e^t \tfrac{1}{4}\, dt = \tfrac{1}{4} \int e^t\, dt = \tfrac{1}{4} e^{1+4x} + C$$

Detta motsvarar alternativ a), vilket valdes av en knapp fjärdedel av eleverna. Uppgiften får betraktas som extra svår, då det är fråga om en primitiv funktion till en sammansatt funktion. En knapp fjärdel av eleverna behärskade detta.

29 Bestäm $\int e^{1+4x}dx$

Ⓐ $\frac{1}{4}e^{1+4x} + C$

Ⓑ $e^{1+4x} + C$

Ⓒ $4e^{1+4x} + C$

Ⓓ $e^{x+2x^2} + C$

MA23041

M7_09

	Tot. 2008
A*	22,4%
B	21,1%
C	25,8%
D	9,2%
Ej svar	21,5%

* markerar rätt svarsalternativ

Det mest frekvent valda alternativet var emellertid distraktorn c) $4e^{1+4x} + C$, vilken motsvarar derivatan av funktionen e^{1+4x} och inte en primitiv funktion. Flera forskare menar, att elever löser integrationsuppgifter rent procedurellt och att de egentligen inte vet vad de gör (Tall, 1996; Orton, 1983). Eisenberg (1992) fann även, att få elever är medvetna om, att derivering och integration är inversa processer.

Den näst frekventa distraktorn b), $e^{1+4x} + C$, fastnade ungefär en femtedel av eleverna för. Detta alternativ tar inte hänsyn till den inre derivatan av $1 + 4x$. Om den primitiva funktionen deriveras, skall ju e^{1+4x} erhållas. Den sista distraktorn var lågfrekvent och representerar en korrekt integration av $1 + 4x$ på exponentplats, vilket ger $x + 2x^2$.

Kommande uppgift (M3_04) däremot fanns med i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995. I den skulle en ändlig integral beräknas. Uppnåendemål i D- och E-kursen belyser kunskapsområdet. Det sägs, att ”Eleven skall kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar” och ”kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler samt beräkna volymer med hjälp av integraler”. Följaktligen borde innehållet vara väl behandlat i undervisningen.

M3_04

	Tot. 2008	Tot. 1995
A	8,1%	5,9%
B*	41,5%	54,4%
C	24,6%	15,1%
D	5,8%	4,0%
E	11,1%	16,1%
Ej svar	8,9%	4,5%

* markerar rätt svarsalternativ

24 $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx =$

Ⓐ $-3\frac{1}{8}$

Ⓑ 1

Ⓒ $2\frac{5}{8}$

Ⓓ 4

Ⓔ $4\frac{1}{2}$

MA13024

Genom en uppdelning av integralen fås

$\int_1^2 (x - \frac{1}{x^2}) dx = \int_1^2 x\, dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = {}_1^2\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right] = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1$

vilket innebär, att alternativ b) är det korrekta. Detta alternativ valde också något mer än två femtedelar av eleverna 2008 och mer än hälften 1995, en skillnad på drygt 10 procent. Trots välformulerade mål bakom innehållet så klarade inte hälften av eleverna uppgiften.

Distraktorn a) $-3\frac{1}{8}$ var relativt lågfrekvent båda åren. Den representerar tillsammans med flera distraktorer olika typer av räknefel vid insättning i den primitiva funktionen samt en inkorrekt integration $\frac{1}{x^2}$ av till $\frac{1}{x^3}$. Distraktorn c), $2\frac{5}{8}$, var mer högfrekvent 2008 än 1995, medan distraktorn d), 4, som motsvarar en inkorrekt beräkning av integralen, där de olika delarna adderas i stället för att de två sista subtraheras $\frac{4}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 4$, hade lägst frekvens båda åren. Distraktorn e), $4\frac{1}{2}$, representerar ett rimligt värde men kan inte på ett enkelt sätt beräknas. Den var dock relativt lågfrekvent.

Uppgiften får betraktas vara av rutinkaraktär, vilket kan förklara den inte så låga lösningsfrekvensen.

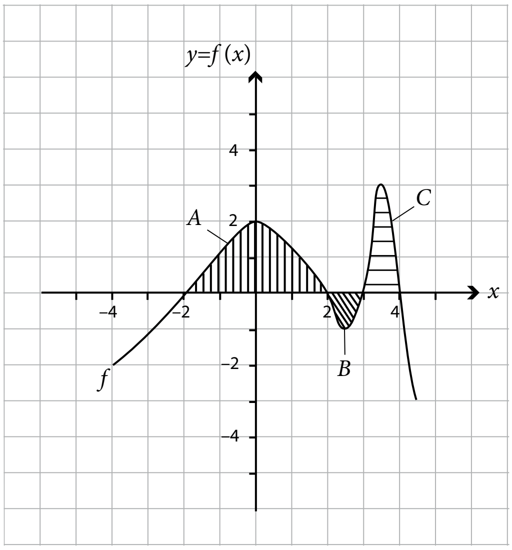
I uppgiften (M7_08), som endast gavs i TIMSS Advanced 2008, skulle en integral beräknas med hjälp av dess grafiska representation. Innehållet berör mest D-kursens uppnåendemål, i vilket det stipuleras, att ”Eleven skall kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar”. Eftersom uppgiften får anses vara grundläggande och mer eller mindre direkt beröra definitionen av integralbegreppet, så täcker formuleringen i målet innehållet.

Integralen $\int_{-2}^4 f(x)\, dx$ kan delas upp i de tre integralerna

$\int_{-2}^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx + \int_3^4 f(x)\, dx$

som var och en kan beräknas med hjälp av de kända områdena A, B och C. Eftersom den mittersta integralen blir negativ, då funktionens värden i intervallet är mindre än noll, så blir resultatet arean av område A minus arean av område

28



Figuren visar grafen till funktionen $y = f(x)$ och tre områden (A, B och C) som begränsas av funktionens graf samt x-axeln. Område A har arean 4,8 areaenheter, område B har arean 0,8 areaenheter och område C har arean 2 areaenheter.

Vilket värde har integralen $\int_{-2}^{4} f(x)dx$?

Ⓐ 5,6

Ⓑ 6,0

Ⓒ 6,8

Ⓓ 7,6

MA23050

M7_08

	Tot. 2008
A	11,2%
B*	26,2%
C	21,1%
D	20,2%
Ej svar	21,3%

* markerar rätt svarsalternativ

B plus arean av område *C*. Då fås 4,8 ae – 0,8 ae + 2 ae = 6 ae, vilket motsvarar det korrekta alternativet b). Detta valdes av ungefär en fjärdedel av eleverna.

Begreppsligt sett är elevernas behandling av den negativa integralen av särskilt intresse. Distraktorn d), 7,6 ae, har erhållits genom att samtliga areor adderats, det vill säga område B har adderats med positivt tecken, 4,8 ae + 0,8 ae + 2 ae = 7,6 ae. Detta kan ha sina rötter i den förenklade modellen av integraler, som används i undervisningen och innebär, att integralen inte bara representerar arean under funktionens graf utan *är* arean (Schneider, 1993; Sierpínska, 1985; 1987). Eftersom areor inte är negativa, adderar eleverna samtliga delintegraler (Ortons, 1983). Denna modell har alltså svag strukturell validitet, då den i sin förenkling förvränger den matematiska verkligheten. En femtedel av eleverna fastnade för denna distraktor.

I de andra två distraktorerna har olika delområden inte medräknats. Distraktorn a), 5,6 ae, innebär, att delområde *C* inte medräknats och att område *B* adderats, 4,8 ae + 0,8 ae = 5,6 ae. Den valdes minst frekvent. I distraktorn c) 6,8 ae, har område *B* inte medräknats, ty 4,8 ae + 2 ae = 6,8 ae. En dryg femtedel av eleverna valde c). En trolig orsak kan vara, förutom det som nämnts angående distraktorn d), att eleverna tror, att negativa areor inte existerar (Schneider, 1993; Sierpínska, 1985; 1987; Ortons, 1983). Med tanke på dessa svårigheter, som kan uppstå i en undervisningssituation, är lösningsfrekvensen inte anmärkningsvärt låg.

6.3 Formler

Tre testuppgifter rörde formler. I den första (M1_03) behandlades två modeller av intäkter vid marknadsföring. Den ingick i både TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995.

M1_03

	Tot. 2008	Tot. 1995
A	8,3%	5,7%
B	8,3%	9,9%
C	12,2%	5,1%
D	7,4%	2,7%
E*	55,3%	70,2%
Ej svar	8,5%	6,4%

* markerar rätt svarsalternativ

3

Intäkten y (Mkr) vid försäljningen av x tusen enheter av en vara kan vid olika marknadsföringsmetoder väntas följa en av följande två matematiska modeller i intervallet $0 < x < 5$:

modell P: $y = 6x - x^2$
modell Q: $y = 2x$

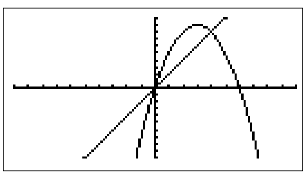
För vilka x-värden blir intäkten enligt modell Q större än intäkten enligt modell P

Ⓐ $0 < x < 4$
Ⓑ $0 < x < 5$
Ⓒ $3 < x < 5$
Ⓓ $3 < x < 4$
Ⓔ $4 < x < 5$

MA13003

Kravet att modell Q skulle ge större intäkter än modell P innebär, att $2x > 6x - x^2$. De kunskaper, som behövs för att lösa uppgiften, finns i D- och E-kursernas uppnåendemål. I D-kursens mål sägs att ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning” och vidare att ”kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler samt beräkna volymer med hjälp av integraler”. Kunskaperna för att lösa uppgiften finns i kursplanerna, men viss transfer behövs för att kunna tillämpa dem på en olikhet eller vid jämförelse av två funktioner.

Efter förenkling fås $x^2 - 4x > 0$ och faktoruppdelning ger $x(x - 4) > 0$, vilken visar, att motsvarande funktion skär x-axeln i 0 och 4. Derivatan är $2x - 4$, vilket innebär, att för $x = 2$ har derivatan ett nollställe. För $x < 2$ är derivatan negativ och för $x > 2$ positiv, vilket betyder, att funktionen först är strängt avtagande och sedan strängt växande. Detta implicerar, att funktionen har en minimipunkt i (2; –4). När grafen skurit x-axeln i $x = +4$, så är den positiv och därmed gäller att $2x > 6x - x^2$, vilket då gäller för $4 < x < 5$, eftersom modellerna var definierade endast i det öppna intervallet $0 < x < 5$.



Även på en grafritande räknare syns att graferna skär varandra i $x = 0$ och $x = 4$ samt att modell Q, $y = 2x$, är större än modell P för $4 < x < 5$.

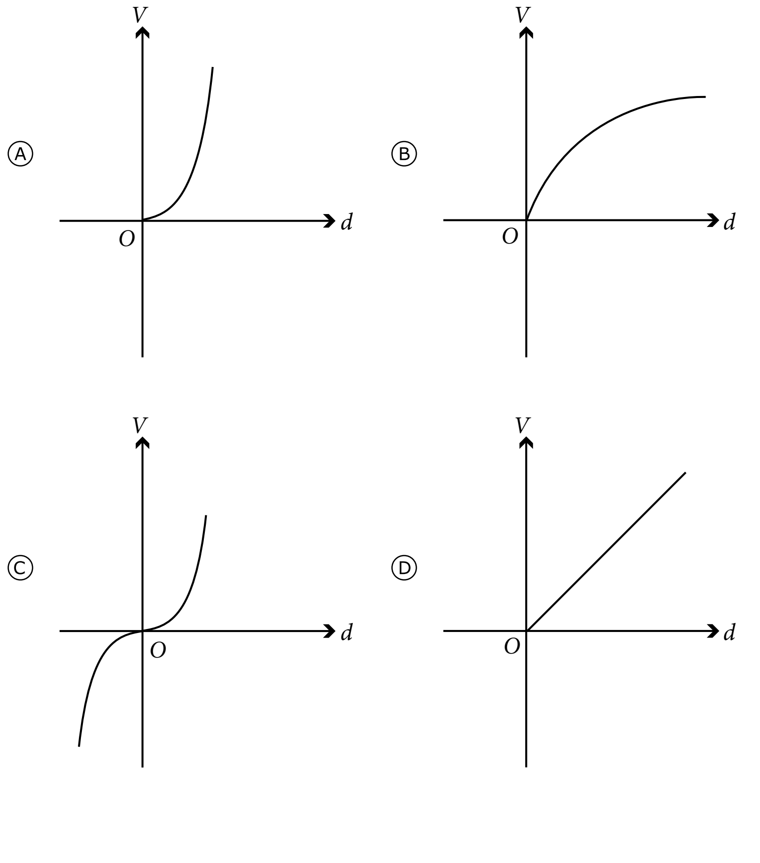
Så alternativ e) är det korrekta, vilket också valdes av en majoritet av elever både 2008 och 1995. Skillnaden i lösningsfrekvens mellan åren på 15 procent är dock påtaglig. Det kan också konstateras, att transfer antagligen inte tränats systematiskt i undervisningen, då drygt 40 procent inte löste uppgiften.

Distraktorn a) $0 < x < 4$ representerar det motsatta förhållandet, det vill säga $2x < 6x - x^2$. Den valdes båda åren av en mindre andel elever, vilket också var fallet med distraktor b) $0 < x < 5$, vilken representerar hela definitionsområdet för modellerna. Alternativ c) $3 < x < 4$ och d) $3 < x < 5$ representerar inga begreppsliga alternativ och valdes 1995 relativt lågfrekvent.

I följande uppgift (M6_03), vilken endast fanns med i TIMSS Advanced 2008, skulle eleverna välja vilken graf, som representerade ballongens volym som en funktion av diametern. Bell och Janvier (1981) menade redan tidigt, att tolkningar av grafer skulle introduceras med fokus på helheten och inte på lokala strukturer. Uppgiften nedan representerar ett sådant försök. Innehållet beskrivs i B-kursens uppnåendemål ”Eleven skall kunna förklara vad som kännetecknar en funktion samt kunna ställa upp, tolka och använda några icke-linjära funktioner som modeller för verkliga förlopp och i samband därmed kunna arbeta både med och utan dator och grafritande hjälpmedel”. Situationen i uppgiften representerar ett verkligt förlopp.

3

En sfärisk ballong blåses upp. Vilken av figurerna nedan visar ballongens volym V som funktion av diametern d?



MA23208

M6_03

	Tot. 2008
A*	41,6%
B	27,2%
C	9,1%
D	20,6%
Ej svar	1,6%

* markerar rätt svarsalternativ

Diametern representerar längdskalan och volymen volymskalan, vilken alltid är proportionell mot kuben på längdskalan, det vill säga $V = k \cdot d^3$. Volymen så väl som diametern är alltid positiv därför kan alternativ c) uteslutas, eftersom negativa delar av kurvan finns med där. Distraktorn valdes av en liten andel elever. Alternativ d) visar ett linjärt förhållande mellan de två storheterna och kan därför också den uteslutas. Drygt en femtedel av eleverna fastnade för detta alternativ, vilket betyder, att de inte känner till karaktären på relationen mellan längdskalan och volymskalan utan tror, att den är linjär. Alternativ a) representerar den positiva delen av en x^3-graf. När d närmar sig gränsen för hur mycket ballongen kan expandera, då är volymökningen som störst. Detta korrekta alternativ valdes av drygt två femtedelar av eleverna. I alternativ b) däremot är volymökningen som minst, då d närmar sig gränsen för expansionen. Alternativ b) representerar inte volymen som en funktion av diametern utan av den inblåsta luftmängden. En dryg fjärdedel av eleverna valde denna distraktor. Ett vanligt fenomen vid tolkning av grafer, som representerar verkliga förlopp, är, att eleverna lätt förväxlar vad variablerna står för med förloppet som sådant. Detta brukar benämnas den ikoniska uppfattningen (Janvier, 1978; Kerslake, 1977, 1981; McDermott et al., 1987; Preece, 1983b; Shultz, et al., 1986; Stein & Leinhardt, 1989). Om eleverna, även i senare kurser, inte skulle ha tränats att tolka funktioner och dess grafer, som beskriver verkliga förlopp, förefaller egendomligt. I E-kursen skall ju differentialekvationer användas som modeller för verkliga förlopp. Med beaktande av att målet finns i B-kursen, så får det betraktas som otillfredsställande, att endast hälften av eleverna löste uppgiften korrekt.

I den tredje uppgiften (M7_05), som endast ingick i TIMSS Advanced 2008, representerade formeln sträckan $s(t)$, som en bil tillryggalagt, då den bromsat i t sekunder. I E-kursens kursplan sägs att ”Eleven skall kunna analysera, formulera och lösa problem som kräver bestämning av derivator och integraler samt beräkna volymer med hjälp av integraler.” Så innehållet finns främst täckt i E-kursen uppnåendemål men mål som berör innehållet finns även i D-kursens kursplan.

M7_05

	Tot. 2008
A	8,6%
B	25,8%
C	30,2%
D*	20,9%
Ej svar	14,5%

* markerar rätt svarsalternativ

25

En bil börjar bromsa när den närmar sig en korsning. När den bromsat i t sekunder har den förflyttat sig sträckan $s(t)$ meter, där $s(t) = -t^2 + 20t$. Hur långt kommer bilen att ha förflyttat sig från dess att den börjar bromsa till dess att den stannar?

Ⓐ –20 m

Ⓑ 10 m

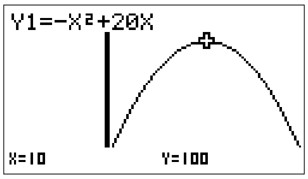
Ⓒ 50 m

Ⓓ 100 m

MA23158

För att lösa uppgiften måste man inte känna till, att hastigheten är tidsderivatan av funktionen för sträckan, $s(t) = -t^2 + 20t$. Funktionen för hastigheten blir då $h(t) = s'(t) = -2t + 20$. Då bilen stannat är hastigheten noll, det vill säga $-2t + 20 = 0$, vilket gäller för $t = 10$. Så efter 10 sekunder har bilen stannat efter inbromsningen. Insättning i $s(t)$ ger $s(10) = -100 + 200 = 100$. Så efter 100 meter har bilen stannat, eftersom den började bromsa vid $t = 0$.

Som också framgår av grafen i figuren så blir inte sträckan längre än 100 meter, vilket betyder att bilen har stannat. Detta sker för $t = 10$ i en maximipunkt, i vilken derivatan är noll, det vill säga bilens hastighet. Sträckan 100 meter motsvarar det korrekta alternativet d), vilket valdes av ungefär en femtedel av eleverna.



Distraktorn a) –20 m representerar ett nollställe till funktionen $s(t)$ men med negativt tecken. En relativt liten andel elever valde denna distraktor bland annat troligen för att den representerar en negativ sträcka, vilket skulle betyda, att när man bromsar börjar bilen omedelbart att backa och stannar först efter 20 meters backande. Slutsatsen av detta är, att eleverna inte kan ha förstått vad –20 m betyder. Distraktorn b) 10 m motsvarar mätetalet för tiden, då hastigheten är noll. Frekvensen var relativt hög, över en fjärdedel av eleverna fastnade för alternativet. Distraktorn c) 50 m valdes av en majoritet av eleverna. Bilens hastighet då den börjar bromsa det vill säga då $t = 0$ var $h(0) = 20$. Detta är inte 20 km/h utan 20 m/s, vilket motsvarar 72 km/h. Valet av distraktor c) kan bero på, att eleverna misstar sig på hastigheten.

McDermott et al. (1987) fann även, att elever blandade ihop begreppen hastighet och avstånd, då en graf inte var involverad. Även då grafer var involverade, erfor Clement (1989), att eleverna fokuserade på hastigheten men misslyckades med att koppla den till en korrekt grafisk egenskap. Trots svårigheterna så är uppnåendemålet tydligt och därför är det otillfredsställande att endast en knapp femtedel löste uppgiften.

6.4 Gränsvärden

Tre gränsvärdesberäkningar testades. Två rörde rationella uttryck och en geometri. Gränsvärden nämns inte explicit i kursplanerna men en förståelse av dessa är en förutsättning för att en rad andra central begrepp skall kunna förstås.

Vid beräkning av ett gränsvärde skall först fastställas huruvida det existerar och därefter skall storleken beräknas. I de tre uppgifterna förutsätts, att gränsvärdena existerar. I den första (M1_04), som ingick i både TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995, går x mot plus oändligheten.

4

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x+1)(x+1)}{3x^2-2}$ har värdet

Ⓐ $-\dfrac{1}{2}$

Ⓑ $\dfrac{2}{3}$

Ⓒ 1

Ⓓ 6

Ⓔ ∞

MA13004

M1_04

	Tot. 2008	Tot. 1995
A	17,2%	17,6%
B*	27,4%	44,4%
C	15,0%	9,7%
D	5,4%	4,0%
E	25,3%	21,9%
Ej svar	9,6%	2,4%

* markerar rätt svarsalternativ

Detta gränsvärde, i vilka x går mot oändligheten, kan lösas genom en omskrivning av uttrycket. Då fås att

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(2x+1)(x+1)}{3x^2-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3x+1}{3x^2-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

Eftersom de övriga termerna, utom 2 respektive 3, i täljaren och nämnaren går mot noll, då x går mot plus oändligheten, så blir resultatet $\frac{2}{3}$. Detta motsvarar alternativ b), som en knapp tredjedel av eleverna valde 2008 och nästan hälften 1995. Återigen en skillnad på 15 procent.

Distraktorn a) $-\frac{1}{2}$, motsvarar misstaget, att de två sista termerna 1 och –2 i täljaren respektive nämnaren i uttrycket $\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-2}$ blir kvar, då $x \to +\infty$. En mindre andel elever valde denna distraktor 2008 och 1995. Distraktorn c), 1, är svår att härleda till ett specifikt misstag men verkar i allmänhet rimlig. Den fastnade en mindre andel av eleverna för båda åren. Distraktorn e) ∞ representerar misstaget att inte skriva om uttrycket och då fås $\frac{+\infty}{+\infty}$, vilket många elever kan få till ∞. Ungefär en fjärdedel valde denna distraktor.

I den andra uppgiften (M6_04), som endast fanns med i TIMSS Advanced 2008, skulle gränsvärdet då $x \to 1$ bestämmas. Detta kan också ske genom en omskrivning av uttrycket i detta fall så att täljare och nämnare faktoriseras.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

En liten andel av eleverna löste uppgiften med omskrivningen medan en något större andel substituerade x med ett tal nära ett, som 1,0001. Det gick också att lösa uppgiften med en grafisk kalkylator. Över hälften av eleverna försökte lösa den men misslyckades.

M6_04

	Tot. 2008
1 poäng	9,7%
Fel svar	52,3%
Ej svar	38,0%

4

Bestäm $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

Redovisa hur du kommit fram till ditt svar.

MA23165

Av allt att döma har inte gränsvärdesbegreppet behandlats tillräckligt i undervisningen. Den kunskap som behövs är inte den generella om gränsvärdens definition utan de kontextuellt betingade procedurer, som gör att uttrycken kan skrivas om, så eleverna resonemangsvis kan lösa uppgifterna med den dynamiska uppfattningen (Schwarzenberger & Tall, 1978; Williams, 1991; Cornu, 1992).

Den tredje uppgiften (M3_07) om gränsvärden berörde även geometri.

27

En regelbunden månghörning med n sidor är inskriven i en cirkel med radien 1.

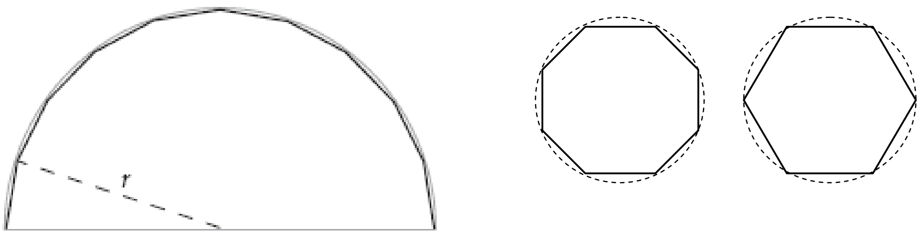
Vilket är gränsvärdet för månghörningens omkrets, då antalet sidor n ökar?

MA13027

M3_07

	Tot. 2008	Tot. 1995
2 poäng	20,4%	31,0%
1 poäng	3,6%	3,9%
Fel svar	36,6%	16,2%
Ej svar	39,5%	48,9%

En inskriven sexhörning i den högra figuren visar, att vid låga värden på n, det vill säga få hörn, så ansluter inte polygonen särskilt bra till cirkeln.



I den mittersta figuren, så närmar sig åttahörningens omkrets cirkelns omkrets. Om man ökar antalet sidor i polygonen kraftigt, så närmar sig polygonens omkrets mer och mer cirkelns omkrets det vill säga 2π eftersom radien var 1 l.e.

Nästan två femtedelar av eleverna i TIMSS Advanced 2008 löste uppgiften helt eller delvis korrekt, medan en betydligt större andel lyckades 1995. Skillnaden i lösningsfrekvens är ungefär 20 procent, ett mönster som går igen i flera uppgifter, som rör geometri.

6.5 Serier

Tre uppgifter rör serier och mönster. I den första (M3_08) skall en formel för seriens summa visas med induktionsbevis. Induktionsbevis bygger på induktionsaxiomet, vilket omfattar tre antaganden. Om det går att visa, att sambandet gäller för $n = 1$ och om det utifrån antagandet, att sambandet gäller för n, går att visa, att det också gäller för $n + 1$, så gäller det för alla naturliga tal, enligt axiomet. Det bör påpekas, att induktionsbevis inte ingår i de svenska kursplanerna för gymnasieskolan.

M3_08

	Tot. 2008	Tot. 1995
1 poäng	2,0%	0,2%
Fel svar	31,3%	6,3%
Ej svar	66,7%	93,5%

28 Man kan visa att $1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ för alla naturliga tal n.

Vilka nödvändiga steg behövs, när man ska bevisa detta påstående genom MATEMATISK INDUKTION? (Du ska inte genomföra beviset.)

MA13028

Som en tillämpning visas dock beviset. För $n = 1$ fås att vänstra ledet (VL) = 1 och att högra ledet (HL) = $\frac{1(4\cdot 1^2 - 1)}{3}$ = 1, så VL och HL är lika och därför gäller sambandet för $n = 1$.

Låt oss anta att sambandet gäller för n. Utifrån detta skall nu bevisas att det gäller även för $n + 1$. För att göra detta bevis adderas $(2n + 1)^2$ till båda led. VL omfattar då serien med termer till $n + 1$. HL blir då $\frac{n(4\cdot n^2 - 1)}{3} + \frac{3(2n+1)^2}{3}$. Efter förenkling blir täljaren $4n^3 + 12n^2 + 12n + 3 = (4n^3 + 8n^2 + 4n) - n + (4n^2 + 8n + 4) - 1 = (n + 1)((4n^2 + 8n + 4) - 1)$. Hela HL blir då $\frac{(n+1)(4(n+1)^2 - 1}{3}$, vilket innebär, att sambandet gäller för $n + 1$. Enligt induktionsaxiomet gäller härmed sambandet för alla n. Uppgiften är inte av rutinkaraktär.

I TIMSS Advanced 2008 löste inga av eleverna uppgiften fullständigt, vilket däremot var fallet 1995, då en liten andel löste den. Lösningar, som var delvis korrekta, presterade en mindre andel elever 2008 och en ännu mindre andel 1995.

I nästa uppgift (M6_01) efterfrågas summan av en geometrisk serie. Uppgiften ingick endast i TIMSS Advanced 2008. I kursplanen för C-kursen sägs att ”Eleven skall kunna använda matematiska modeller av olika slag, däribland även sådana som bygger på summan av en geometrisk talföljd”. Ett sådant mål skall de elever som godkänns har uppnått. I senare kursplaner hänvisas även till tidigare: ”Eleven skall kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser”. Så kunskaper om geometriska serier skall eleverna behärska eftersom de successiva summorna och termerna i en geometrisk serie bildar talföljder.

Två på varandra följande termer i en geometrisk serie bildar en konstant kvot. Så de två termerna a_n och a_{n+1} bildar, om de divideras, en konstant kvot $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.

1

En oändlig geometrisk serie har 3 som första term och $\frac{1}{3}$ som tredje term. Alla termerna i serien är positiva. Vad är seriens summa?

Ⓐ $\frac{27}{8}$

Ⓑ $\frac{10}{3}$

Ⓒ $\frac{9}{4}$

Ⓓ $\frac{9}{2}$

MA23069

M6_01

	Tot. 2008
A	12,8%
B	45,9%
C	7,9%
D*	24,2%
Ej svar	9,3%

* markerar rätt svarsalternativ

Låt den andra obekanta termen i serien vara x. Eftersom kvoten mellan termerna är konstant, kan följande ekvation fås

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{x} \text{ och } x^2 = 1$$

Då termerna är positiva, så används endast den positiva roten $x = 1$. Serien blir då, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ... Att en sådan oändlig serie kan konvergera mot ett ändligt värde, har många elever svårt att inse, eftersom det tillkommer termer hela tiden (Suraweera, 2002; Bagni, 2005). Även den dynamiska uppfattningen av gränsvärdesbegreppet gör, att elever inte tror att gränsvärdet existerar, då summan aldrig nås (Brown, et al., 2002). I uppgiften tycks det dock förutsättas, att gränsvärdet existerar.

Formeln för en geometrisk series summa finns i formeltabellerna i provhäftet, $\lim_{x \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$, där a är seriens första term och r den konstanta kvoten. Insättning av de kända värdena på a och r, 3 och $\frac{1}{3}$ ger

$$\frac{3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2}$$

vilket motsvarar alternativ d). Detta valdes av en knapp fjärdedel av eleverna. Den förhållandevis låga lösningsfrekvensen är inte förvånande med tanke på de missuppfattningar om serier som elever kan ha.

Distraktorn b), som knappt hälften av eleverna valde, kan fås genom att den första och den tredje termen adderas $3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$. Distraktorerna a) och c) valdes förhållandevis lågfrekvent.

Således behärskar endast en fjärdedel av eleverna det uppnåendemål som ingår som ett obligatoriskt moment i C-kursen.

Nästa uppgift (M7_01), som handlade om mönstertänkande, ingick endast i TIMSS Advanced 2008. Potensbegreppet är centralt i uppgiften och av C-kursens kursplan framgår att ”Eleven skall kunna tolka och använda logaritmer och potenser med reella exponenter samt kunna tillämpa dessa vid problemlösning.”

Processen att dela pappret och lägga delarna på varandra genomförs två gånger. Den första delningen kan beskrivas med 2^1 och den andra delningen, som leder till 4 delark, kan beskrivas med 2^2. Om samma process upprepas ytterligare 8 gånger, så ökar exponenten med 8, vilket blir $2^{2+8} = 2^{10} = 1024$. Om tjockleken 0,01 cm beaktas, så blir resultatet 10,24 cm, vilket svarar mot alternativ b). En förhållandevis stor andel elever kryssade för detta alternativ.

M7_01

	Tot. 2008
A	15,4%
B*	57,7%
C	12,6%
D	7,7%
Ej svar	6,6%

* markerar rätt svarsalternativ

21

Ett pappersark med tjockleken 0,01 cm delas på mitten och delarna läggs på varandra. Därefter delas de båda arkhalvorna och delarna läggs på varandra, så att högen blir 4 ark tjock. Hur tjock skulle pappersstapeln bli om samma process upprepades ytterligare 8 gånger?

Ⓐ 0,2 cm

Ⓑ 10,24 cm

Ⓒ 20,48 cm

Ⓓ 32,0 cm

MA23004

Distraktorn c) innebär att processen utförs 11 gånger, vilket motsvarar $0{,}01 \cdot 2^{11} = 20{,}48$. En mindre andel elever attraherades av denna distraktor. Den mest frekventa distraktorn a) kan fås genom att det antal gånger, som processen utförs, $2 + 8 = 10$, multipliceras med tjockleken efter första vikningen 0,02 cm. Detta blir $10 \cdot 0{,}02 = 0{,}2$. Den sista distraktorn d) motsvarar $8 \cdot 4 = 32$ och valdes av den minsta andelen elever. Mönstertänkande tränas framför allt i grundskolan men tillämpningar med potenser ingår i uppnåendemålen i gymnasieskolans C-kurs. Knappt två tredjedelar av eleverna uppnådde detta mål.

6.6 Räkning med komplexa tal

Uppgiften nedan (M7_02), som handlar om förenkling av komplexa tal, gavs endast i TIMSS Advanced 2008. Den testar målet i E-kursen, som säger att ”Eleven skall kunna räkna med komplexa tal skrivna i olika former samt kunna lösa enkla polynomekvationer med komplexa rötter även med hjälp av faktorsatsen”.

M7_02

	Tot. 2008
A	28,9%
B*	21,5%
C	30,1%
D	7,1%
Ej svar	12,4%

* markerar rätt svarsalternativ

22

Vilket av alternativen är lika med $\frac{5}{x}$ då $x = -1 + \frac{1}{2}i$?

Ⓐ $-5+i$

Ⓑ $-4-2i$

Ⓒ $-4+2i$

Ⓓ $4+2i$

MA23063

En vanlig metod att förenkla ett uttryck med ett komplext tal i nämnaren är att multiplicera med konjugatuttrycket av nämnaren, $(\frac{i}{2} + 1)$, så att nämnaren blir ett reellt tal. Då blir

$$\frac{5}{x} = \frac{5}{(\frac{i}{2} - 1)} = \frac{5(\frac{i}{2} + 1)}{(\frac{i}{2} - 1)(\frac{i}{2} + 1)} = \frac{5(\frac{i}{2} + 1)}{-\frac{1}{4} - 1} = \frac{5(\frac{i}{2} + 1)}{-\frac{5}{4}}$$

Om både täljare och nämnare multipliceras med –4 och därefter förkortas med 5, så fås $-4(\frac{i}{2} + 1) = -2i - 4 = -4 - 2i$, eftersom realdel och imaginärdel skrivs i den ordningen. Detta motsvarar alternativ b), som drygt en femtedel av eleverna valde. Distraktorn a) verkar ha valts på grund av, att realdelen –5 är samma som 5 i uttrycket. Distraktorerna c) och d) representerar båda teckenfel. Alternativ d) valdes lågfrekvent, medan c) var det mest frekvent valda. I distraktorn c) verkar det som om eleverna valt ett annat konjugatuttryck än det korrekta, nämligen $1 - \frac{i}{2}$. Det ger resultatet med en inkorrekt beräkning av nämnaren $-4(1 - \frac{i}{2}) = -4 + 2i$

Således klarar en dryg femtedel av eleverna uppnåendemålet i kursplanen.

6.7 Geometri

Eleverna testas med 10 uppgifter inom området geometri. Men även förståelse av andra begrepp testas som riktningskoefficient och ekvationer för kurvor. I den första uppgiften (M1_07) är en triangel inskriven i ett koordinatsystem med basen på x-axeln. De grundläggande geometriska begreppen anses avklarade på A- och B-kurserna. Riktningskoefficient finns implicit beskriven i B-kursens uppnåendemål. Där sägs att ”Eleven skall kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former samt lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder”.

7

En liksidig triangel har en sida längs x-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Summan av de tre sidornas riktningskoefficienter är då

Ⓐ 0

Ⓑ -1

Ⓒ 1

Ⓓ $2\sqrt{3}$

Ⓔ $1+2\sqrt{3}$

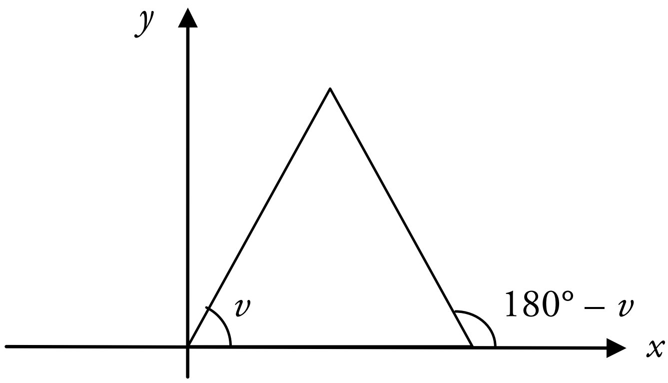
MA13007

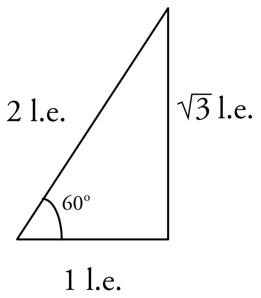
M1_07

	Tot. 2008	Tot. 1995
A*	44,8%	71,6%
B	6,2%	3,7%
C	21,0%	10,8%
D	13,2%	9,3%
E	6,7%	3,6%
Ej Svar	8,1%	1,0%

* markerar rätt svarsalternativ

Eftersom triangeln är liksidig, så är alla vinklar lika stora, alltså 60°. Basens riktningskoefficient är noll, då den ligger på x-axeln. De två andra vinklarna, som representerar lutningen på triangelns två övriga sidor, motsvarar en ytter- och en innervinkel. Då gäller, att om den ena av de två är v, så är den andra $180° - v$. På grund av att riktningskoefficienten är tangens för lutningsvinkeln v, så blir summan av de två riktningskoefficienterna $\tan v + \tan(180° - v)$, vilket blir 0, då $\tan(180° - v) = -\tan v$.





Ett annat sätt att lösa uppgiften är att utgå från förhållandet mellan sidorna i en 30°-60°-90°-triangel. Om hypotenusan, som vetter mot 90°-vinkeln, är 2 l.e., så är kateten, som vetter mot 60°-vinkeln, $\sqrt{3}$ l.e. och den minsta kateten 1 l.e. Detta ger riktningskoefficienten $\sqrt{3}$.

Om man med användning av den stegvisa metoden och med utgångspunkt i origo går fram en l.e. i *x*-led, så krävs det $\sqrt{3}$ l.e. i *y*-led för att träffa på linjen. På motsvarande sätt men genom att gå en l.e. i negativ riktning och $\sqrt{3}$ l.e. uppåt i positiv riktning, så påträffas den andra linjen, som då får riktningskoefficienten $-\sqrt{3}$. Summan av riktningskoefficienterna blir då $0 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$. Så summan av riktningskoefficienterna blir noll, vilket motsvarar alternativ a). Detta valdes av nästan hälften av eleverna i TIMSS Advanced 2008, medan en betydligt större andel valde det 1995. Skillnaden mellan åren är nästan 25 procent. Knappt hälften av eleverna visade att de behärskade dessa mål.

Distraktor b) med riktningskoefficienten –1 motsvarar en lutning av 135°. Endast en liten grupp elever valde detta båda åren. En betydligt större grupp markerade alternativ c), som representerade riktningskoefficienten 1, vilket motsvarar en lutning på 45°. Alternativ d) motsvarar summan av riktningskoefficienterna utan tecken $0 + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Denna distraktor valdes av en mindre andel både 2008 och 1995. Distraktorn e), $1 + 2\sqrt{3}$ utgör en kombination av alternativ c) och d). Den attraherade endast en liten andel elever. Användningen av den stegvisa metoden för beräkning av riktningskoefficienter har en tydlig procedurell inriktning (Bergqvist, et al., 2003).

I den andra uppgiften (M1_08) krävs att eleverna vet vad en median är. Då är det möjligt att rita en figur som nedan. Dessa grundläggande geometriska begrepp finns representerade i A- och B-kurserna, ”Eleven skall ha fördjupat kunskaperna om geometriska begrepp och kunna tillämpa dem i vardagssituationer och i studieinriktningens övriga ämnen”, ”vara så förtrogen med grundläggande geometriska satser och resonemang att hon eller han förstår och kan använda begreppen och tankegångarna vid problemlösning” samt ”kunna förklara, bevisa och vid problemlösning använda några viktiga satser från klassisk geometri. I detta ingår kunskaper om begreppen median, likbent triangel samt rät vinkel.

Eftersom triangeln RPQ är likbent, så är sidorna PQ och RP lika långa. Även basvinklarna vid Q och R är lika stora, 45°. Vidare är PT en median i en likbent triangel, vilket betyder, att den delar sidan QR mitt itu, så att sträckan RT är lika stor som sträckan TQ. Detta innebär också att PT är mittpunktsnormal till QR med räta vinklar till basen QR. Så triangeln QPT är likbent med basen QP. Därmed är

8

Triangeln *PQR* är likbent och har en rät vinkel i *P*. Om *PT* är en median, så har *PT* samma längd som

Ⓐ *PR*

Ⓑ *PQ*

Ⓒ *QR*

Ⓓ *QT*

MA13008

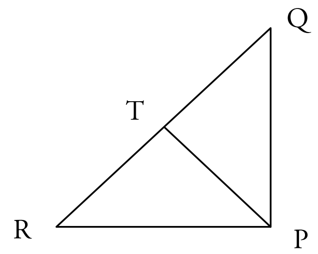
M1_08

	Tot. 2008	Tot. 1995
A	10,7%	5,2%
B	15,5%	5,5%
C	24,8%	13,6%
D*	41,1%	73,9%
Ej svar	8,0%	1,8%

* markerar rätt svarsalternativ

PT = QT. Genom att rita en figur syns detta samband tydligt till och med utan matematiskt resonemang. Något mer än två femtedelar av eleverna valde det korrekta alternativet d) i TIMSS Advanced 2008 medan tre fjärdedelar gjorde det 1995.

I figuren syns att medianen PT måste vara lika lång som QT, då övriga alternativ är uppenbart osannolika. Sidan PR är ju betydligt längre än PT på samma sätt som PQ är det. Även QR är ju betydligt längre. Så hade eleverna vetat, vad en median är, så hade de kunnat rita upp en figur och då sett att PT är lika lång som QT. Eftersom undervisningen tagit upp begreppet i A- eller B-kursen så är det möjligt att eleverna inte har begreppet aktuellt.

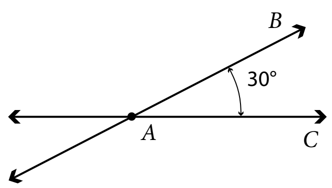


Eftersom distraktorerna är så uppenbart osannolika, så kan en majoritet av gymnasieeleverna i TIMSS Advanced 2008 inte ha vetat vad en median är, eftersom över hälften markerade distraktorerna. I TIMSS 1995 däremot valde inte alls så stor andel dessa distraktorer. Så skillnaden mellan dessa två mätningar visar alltså på en försämring i lösningsfrekvens på något över 25 procent.

I den tredje uppgiften (M3_01) har det tvådimensionella planet lämnats och den ena linjen i figuren roterar i den tredimensionella rymden.

21

Då linjen *AB* roterar kring linjen *AC* så att vinkeln mellan *AB* och *AC* hela tiden är 30°, bildar linjen *AB*



Ⓐ en kon

Ⓑ en cylinder

Ⓒ en spiral

Ⓓ en cirkel

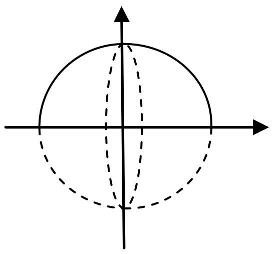
Ⓔ ett klot

MA13021

M3_01

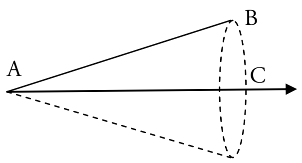
	Tot. 2008	Tot. 1995
A*	74,0%	90,0%
B	2,5%	0,4%
C	6,9%	1,6%
D	12,4%	7,3%
E	2,0%	0,0%
Ej svar	2,2%	0,7%

* markerar rätt svarsalternativ



I Sverige till skillnad från i många andra länder läggs vikt vid att studera volymen av rotationskroppar, som fås, då funktioners grafer roterar runt x-axeln men även runt y-axeln. Exempelvis kan volymen av ett klot beräknas genom integration av en sådan rotationskropp.

Funktionen som beskriver halvcirkelbågen i figuren är $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Skivan med tjockleken dx får då arean $\pi(r^2 - x^2)$. Summeras sedan skivornas volymer från $-r$ till $+r$ fås att $V = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\,dx$ som är lika med $\frac{4\pi r^3}{3}$. Så svenska elever har erfarenheter av rotationskroppar. Det är då inte svårt att se, vilken figur som skapas av att linjerna roterar.



Denna kon motsvarar alltså alternativ a), vilket ungefär tre fjärdedelar av eleverna valde i TIMSS Advanced 2008 medan andelen var ännu större 1995. Detta motsvarar en skillnad på ungefär 15 procent. Distraktorerna var lågfrekventa med undantag för d), som valdes på grund av att eleverna trodde att en cirkel bildades.

Den fjärde uppgiften (M3_06), som handlar om spegling och rotation, ingick både i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995. Både i årskurs 4 och 8 i TIMSS 2007 förekom också uppgifter, som behandlade spegling och rotation. Uppgiften om spegling i årskurs 4 löste över hälften av eleverna (57,5 %). Rotationer däremot var lite svårare och en dryg fjärdedel av eleverna i årskurs 4 löste den uppgiften (27,4 %), medan drygt hälften av eleverna i årskurs 8 löste sin rotationsuppgift i TIMSS 2007 (54,2 %) och ungefär lika många löste den i TIMSS 2003.

M3_06 A

	Tot. 2008	Tot. 1995
1 poäng	18,8%	39,5%
Fel svar	48,0%	37,0%
Ej svar	33,2%	23,5%

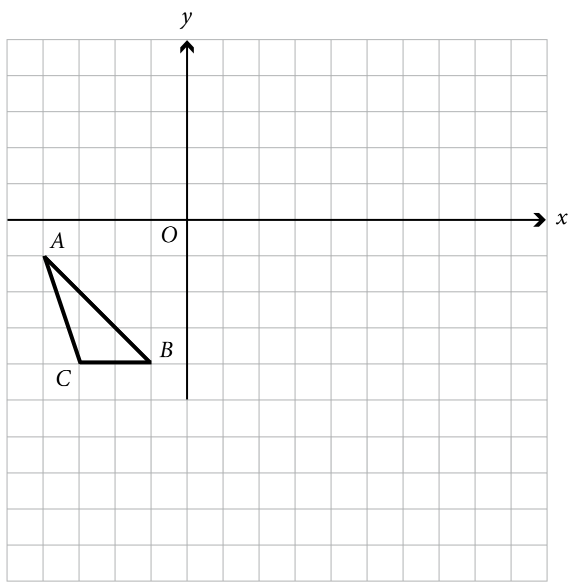
M3_06 B

	Tot. 2008	Tot. 1995
1 poäng	9,7%	11,4%
Fel svar	47,5%	49,4%
Ej svar	42,8%	39,2%

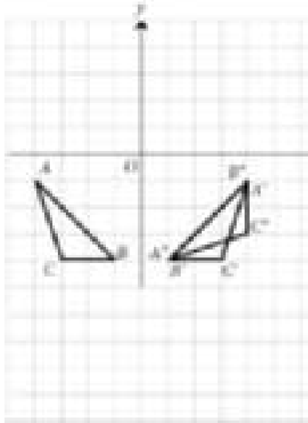
26

A. Triangeln ABC speglas i y-axeln. Rita i diagrammet bilden $A'B'C'$ av triangeln ABC vid denna spegling. Sätt ut A', B' och C'.

B. Triangeln ABC roteras 90° moturs kring origo. Rita i diagrammet triangeln $A''B''C''$, som är bilden av ABC vid denna rotation. Markera A'', B''och C'' i diagrammet.



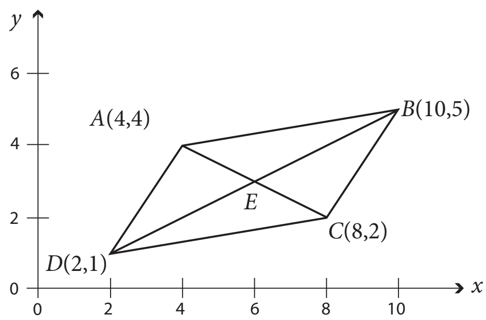
Deluppgift A nedan i TIMSS Advanced 2008 avsåg spegling i en linje, nämligen *y*-axeln. Endast en knapp femtedel av eleverna löste uppgiften korrekt, medan nästan dubbelt så stor andel löste den i TIMSS 1995. Den korrekta spegelbilden $A'B'C'$ är inritad i koordinatsystemet till höger. En mindre andel elever hade speglat triangeln i *x*-axeln i stället för i *y*-axeln. Troligen har eleverna i gymnasieskolan bara stött på spegling i linjer under A-kursen. Därför kan den inte vara lika aktuell några läsår senare.



Deluppgift B i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 avser en rotation av triangeln 90° kring origo. Resultatet av rotationen $A''B''C''$ är inritad i koordinatsystemet till höger. Anmärkningsvärt få elever löste uppgiften både 2008 och 1995. Jämfört med resultatet i årskurs 8, är det en minskning med över 30 procent. Några mindre grupper av elever roterade fel triangel. De roterade $A'B'C'$ i stället för *ABC* och några andra roterade triangeln medurs istället för moturs. I princip tyder lösningsfrekvenserna på, att ingen förändring skett mellan TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995. Rotation, som är ett nyckelbegrepp i vinkelbegreppet, har visat sig särskilt svårt att förstå (Foxman & Ruddock, 1983; Mitchelmore & White, 1998). Begreppet ingår i A-kursens uppnåendemål. Det fenomen, som innebär, att elever tidigare kunnat lösa en viss typ av problem men sedan förlorat denna förmåga, är sedan tidigare känt från den internationella forskningen och benämns “the expert reversal effect” (Kalyuga, Ayres, Chandler, & Sweller, 2003).

Nästa uppgift (M3_09), som ingick i TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 handlar om en parallellogram och dess diagonaler. Av uppgiften framgår bara att det är fråga om en fyrhörning. Först måste det visas, att fyrhörningen har parvis lika långa och parallella sidor för att det skall kunna konstateras, att den är en parallellogram. En av svårigheterna i uppgifter av beviskaraktär är att veta hur mycket, som kan förutsättas och inte behöver bevisas. I B-kursen ingår att ”kunna förklara, bevisa och vid problemlösning använda några viktiga satser från klassisk geometri” samt att ”vara så förtrogen med grundläggande geometriska satser och resonemang att hon eller han förstår och kan använda begreppen och tankegångarna vid problemlösning. Detta måste nu kombineras med kunskaper om räta linjens ekvation i B-kursen samt avståndsformeln som täcks av uppnåendemålet ”kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel”.

29 I fyrhörningen *ABCD* skär diagonalerna *AC* och *BD* varandra i *E*. VISA att *E* är mittpunkt på *AC* och *BD*. Redovisa alla beräkningar.



M3_09

	Tot. 2008	Tot. 1995
2 poäng	8,5%	12,3%
1 poäng	3,3%	8,5%
Fel svar	44,6%	22,0%
Ej svar	43,6%	57,2%

I testhäftet finns ett antal matematiska formler givna, däribland avståndsformeln $d = \sqrt{(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)}$. Om formeln tillämpas på respektive sträcka, så fås att $AB = DC = \sqrt{37}$ och att $DA = CB = \sqrt{13}$. Så sidorna är parvis lika långa. Respektive sidor i trianglarna *DAB* och *DCB* är därför parvis lika långa och därmed är trianglarna kongruenta. Slutsatsen kan då dras, att sidorna i fyrhörningen är parvis parallella och att den därför är en parallellogram. Således är sträckorna *DB* och *AC* diagonaler i parallellogrammen. Linjen, vilken sträckan *DB* ligger på, har ekvationen $y = \frac{x}{2}$ och den som *AC* ligger på, har ekvationen $y = -\frac{x}{2} + 6$. Om ekvationssystemet löses genom att den första ekvationen adderas till den andra fås $2y = 6$, vilket gör att $y = 3$ och $x = 6$. Detta är alltså koordinaterna för punkten E = (6; 3). Det återstår endast att kontrollera om $DE = EB$ och $AE = EC$. Med avståndsformeln fås att $DE = EB = \sqrt{20}$ och att $AE = EC = \sqrt{5}$. Därmed är *E* mittpunkt på *AC* och *BD*. Eftersom så många steg måste tas i beviset av att *E* är diagonalernas mittpunkt, så kan uppgiften knappast karaktäriseras som rutinmässig.

Endast en mindre andel elever löste uppgiften helt korrekt i TIMSS Advanced 2008, medan andelen var större 1995. Uppgiften löstes partiellt 2008 av en mycket mindre andel elever än 1995. Med tanke på uppgiftens karaktär av bevis och krav på tillämpning av ett antal procedurer, exempelvis bestämning av räta linjers ekvationer, får uppgiften anses sakna rutinmässig karaktär (Bergqvist, et al., 2003; Wendlinski, 2009).

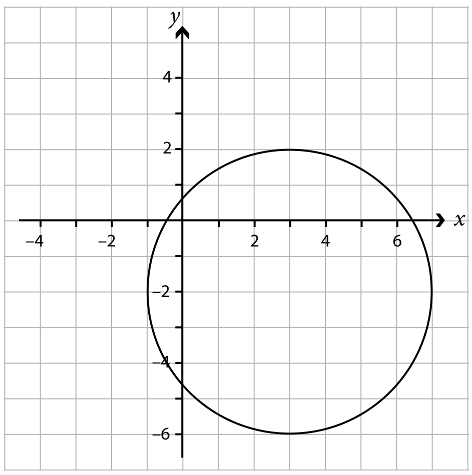
Den sjätte geometriska uppgiften (M6_09), som handlar om cirkelns ekvation, gavs endast i TIMSS Advanced 2008. Kunskaper om cirkelns ekvation täcks av uppnåendemål i B-kusen. Där sägs att ”Eleven skall kunna tolka, förenkla och omforma uttryck av andra graden samt lösa andragradsekvationer och tillämpa kunskaperna vid problemlösning”.

M6_09

	Tot. 2008
A	11,2%
B	15,3%
C	35,4%
D*	28,4%
Ej svar	9,7%

* markerar rätt svarsalternativ

9



Vilken är ekvationen för cirkeln i figuren ovan?

Ⓐ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$

Ⓑ $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

Ⓒ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

Ⓓ $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

För cirkeln, som visas i koordinatsystemet, skall en ekvation bestämmas. Medelpunkten i cirkeln har koordinaterna (3; –2) och den har radien 4 l.e. En cirkel med medelpunkten i origo skulle ha ekvationen $x'^2 + y'^2 = 4^2$. Om koordinatsystemet transformeras så att medelpunkten hamnar i (3; –2), så kan detta ske med koordinattransformationerna $x' = x - 3$ och $y' = y + 2$. Efter insättning i den första ekvationen får då den efterfrågade cirkeln ekvationen $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$ vilken efter förenkling blir $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$. Detta motsvarar alternativ d), vilket en dryg fjärdedel valde. Således visade det sig att en dryg fjärdedel av eleverna behärskade detta mål.

Distraktorerna representerar olika former av teckenfel. Dessutom innebär distraktorn c) en omkastning av tecknen på x- respektive y-termerna. En av punkterna på cirkeln i koordinatsystemet, (–1; –2), satisfierar ekvationen i distraktorn c). Tillsammans med det faktum att denna cirkel har medelpunkten (–3; 2), som är koordinater med omvända tecken till den korrekta lösningen (3; –2), kan detta vara en förklaring till den höga frekvens med vilken den valts. De övriga två distraktorerna valdes med lägre frekvenser.

I denna uppgift skulle en grafisk representation tolkas och en ekvation väljas ut. Att gå från en grafisk representation till en ekvation innebär alltid en ökad svårighet jämfört med att gå från en ekvation till en grafisk representation (Janvier, 1987d; Carpenter et al., 1981; Stein & Leinhardt, 1989; Markovits, et al., 1986).

I nästa uppgift (M6_10), som endast ingick i TIMSS Advanced 2008, skall en elementär trigonometrisk ekvation lösas. Ett sådant innehåll behandlas i D-kursen. I uppnåendemålen står det att ”Eleven skall kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning”.

10

Hur många lösningar har ekvationen $\sin x + \cos x = 2$ i intervallet 0 till 8π?

Ⓐ 0

Ⓑ 2

Ⓒ 4

Ⓓ 8

MA23080

M6_10

	Tot. 2008
A*	44,9%
B	11,9%
C	28,2%
D	11,7%
Ej svar	3,2%

* markerar rätt svarsalternativ

Eftersom sinusfunktionen och cosinusfunktionen båda har ett värdeområde, som omfattar $-1 \leq f(x) \leq +1$, så måste, om summan av dem skall vara 2, båda funktionerna samtidigt anta värdet +1, vilket inte sker samtidigt för samma vinkel. Om $\cos x = 1$ så är $\sin x = 0$, eftersom $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}+x)$. Således saknas lösningar i det avsedda intervallet och det korrekta alternativet är alltså a). Uppgiften kräver, att veta vad sinus- och cosinus-funktionerna kan anta och har därför en rutinmässig karaktär. Nästan hälften av eleverna löste uppgiften korrekt.

Distraktorerna representerar i princip inga begreppsliga alternativ och har valts relativt lågfrekvent förutom c), som har en högre frekvens. Detta kan bero på, att intervallet 0 till 8π innebär, att 4 varv tillryggaläggs, då ett varv är 2π.

Uppgiften har en viss begreppslig inriktning, som tar sin utgångspunkt i enhetscirkeln, och kräver alltså vetskap om vilka värden de två funktionerna kan anta samtidigt. Detta framgår visuellt i enhetscirkeln. Många forskare menar, att den procedurella inriktningen av undervisningen av trigonometriska funktioner är orsak till det bristande resultatet (Davis, 1992; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Skemp, 1987; Kendal & Stacey, 1997; Hirsch, et al., 1991; Blackett & Tall, 1991; Parish & Ludwig, 1994; Weber, 2005). I Sverige föreskrivs i kursplanerna att vägen via enhetscirkeln skall tas. Mer än hälften av eleverna visade att de inte behärskade detta innehåll.

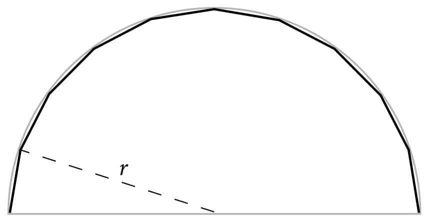
I den åttonde uppgiften (M6_11), som behandlar trigonometriska funktioner, skall bredden på ett fönster bestämmas enligt figuren. Uppgiften ingick endast i TIMSS Advanced 2008. Uppnåendemål i d-kursen täcker innehållet. ”Eleven skall kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel”.

M6_11

	Tot. 2008
A	11,2%
B	15,3%
C	35,4%
D*	28,4%
Ej svar	9,7%

* markerar rätt svarsalternativ

11



Figuren visar ett halvcirkelformat rum, sett uppifrån. En arkitekt sätter in 10 plana fönster i rummet, enligt figuren. Om cirkelns radie är r, vilken av följande ekvationer skulle arkitekten kunna använda för att bestämma bredden på varje fönster?

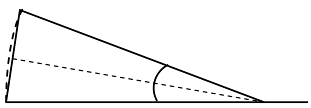
Ⓐ $w = r \sin 9°$

Ⓑ $w = 2r \sin 9°$

Ⓒ $w = r \cos 18°$

Ⓓ $w = 2r \sin 18°$

MA23021



Varje sektor i figuren utgör en likbent triangel där basens längd är det efterfrågade fönstrets bredd. Höjden i triangeln, den streckade i figuren, delar basen mitt itu, eftersom triangeln är likbent.

Den ena av de två rätvinkliga trianglarna, som då bildas, har en medelpunktsvinkel $\frac{180°}{20} = 9°$. Om man tillämpar sinusteoremet för rätvinkliga trianglar på den ena av dessa trianglar, så fås $r \cdot \sin 9° = \frac{w}{2}$, då en sådan triangels bas endast utgör hälften av fönstrets bredd. Detta svarar mot alternativ b), som är det korrekta. Det valdes lågfrekvent. En otillfredsställande liten andel elever lyckades lösa uppgiften korrekt.

Det mest frekventa alternativet var a), som representerar halva fönstrets bredd. Distraktorn c) $w = r \cos 18°$ representerar uttrycket för höjden i den likbenta triangeln och attraherade nästan en tredjedel av eleverna. Den sista distraktorn d) $w = 2r \sin 18°$ innehåller en dubbelt så stor vinkel som i det korrekta alternativet. Det valdes lika frekvent som det korrekta alternativet. Uppgiften är inte av direkt rutinkaraktär.

Den konkreta tillämpningen av en trigonometrisk funktion i en rätvinklig triangel har en procedurell inriktning och är förhållandevis enkel. Den uppenbara svårigheten var troligen, att eleverna inte visste, att höjden i en likbent triangel delar basen mitt itu och att de två trianglarna blir rätvinkliga. Så konstruktionen med höjden var den verkliga svårigheten.

I den nionde uppgiften (M7_10), som endast ingick i TIMSS Advanced 2008, efterfrågades lösningarna till en trigonometrisk ekvation. Lösning av trigonometriska ekvationer behandlas i D-kursen. I uppnåendemålen står det att ”Eleven skall kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning”.

30

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

Vilka är de möjliga värdena på x mellan 0° och 360°?

(A) 30°, 150°

(B) 195°, 345°

(C) 30°, 150°, 210°, 330°

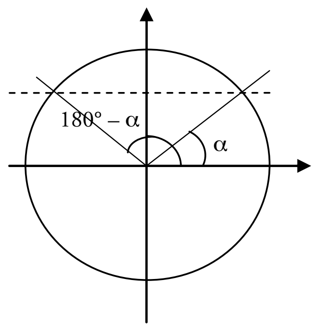
(D) 15°, 75°, 195°, 255°

MA23182

M7_10

	Tot. 2008
A	18,9%
B	10,3%
C	18,5%
D*	34,0%
Ej svar	18,3%

* markerar rätt svarsalternativ



En trigonometrisk ekvation med $\sin x = k$ har alltid minst två lösningar, vilket framgår av enhetscirkeln och definitionen av sinusfunktionen. En y-koordinat svarar alltså mot två olika vinklar α och $180° - \alpha$, vilket framgår av enhetscirkeln.

Den generella lösningen blir då $2x = \alpha + n \cdot 360°$ och $2x = (180° - \alpha) + n \cdot 360°$, eftersom flera varv kan tänkas adderas till vinkeln. Då y-koordinaten var $\frac{1}{2}$ så blir alltså vinkeln $\alpha = 30°$. Den första lösningen blir då efter division med 2 att $x = 15° + n \cdot 180°$, där n kan anta heltalsvärdena 0 och 1, eftersom lösningarna skall hamna i intervallet $0 \leq x \leq 360°$. De första två lösningarna blir 15° och 195°. Motsvarande lösningsprocedur tillämpas på den andra generella lösningen och de två återstående lösningarna blir 75° och 255°. Dessa fyra lösningar motsvarar alternativ d), som lite drygt en tredjedel av eleverna valde. Eftersom de generella lösningsformlerna för trigonometriska ekvationer kunde tillämpas, är uppgiften att betrakta som mer eller mindre rutinmässig. Många elever kan emellertid i detta fall ha erfarit en mer konceptuell undervisning med hjälp av enhetscirkeln vilket kan ha underlättat lösandet. Trots detta visar alltså resultatet att knappt två tredjedelar av eleverna inte nått målet.

Distraktorn a) motsvarar den allmänna lösningen, då inte halva vinkeln beaktas, y-koordinaten $\frac{1}{2}$ ger de två lösningarna 30° och 150°. Nästan en femtedel av eleverna valde denna distraktor. Alternativ b) utgörs av 195° och 345° vilket svarar mot 180° + 15° och 360° – 15° Distraktorn valdes relativt lågfrekvent.

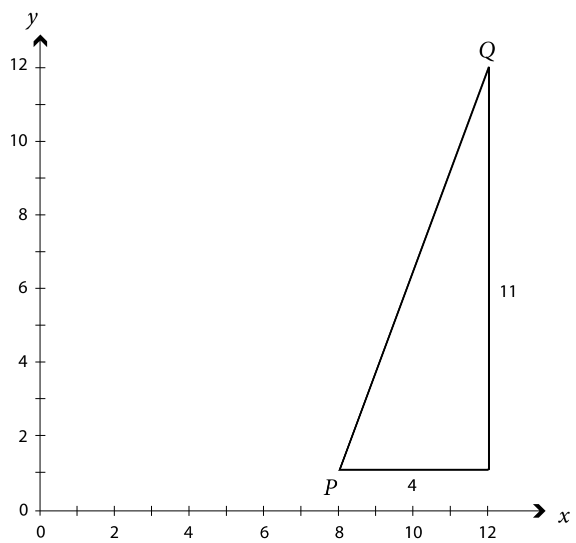
Valet av dessa två distraktorer visar, att eleverna inte insett, att fyra lösningar finns och att $n \cdot 360°$ blir $n \cdot 180°$, då det gäller $2x$, det vill säga den dubbla vinkeln. I distraktorn c) har inte vinkeln, som svarar mot y-koordinaten $\frac{1}{2}$, dividerats med två, som borde varit fallet, då det är fråga om $2x$. Först erhålls 30° och 180° + 30° = 210° samt 180° – 30° = 150° och 150° + 180° = 330°. Nästan en femtedel av eleverna valde denna distraktor. Valet av distraktorer med två lösningar visar, att en andel av eleverna tillägnat sig trigonometri mer procedurellt eftersom sin $2x$ måste ha två lösningar och koefficienten framför x innebär, att ytterligare två lösningar finns i intervallet $0 \leq x \leq 360°$. Sammanlagt finns alltså fyra lösningar.

I den sista uppgiften (M7_11) behandlas parallellitet. Det skall avgöras huruvida en linje genom punkterna *A* och *B* är parallell med sträckan *PQ*. Uppgiften fanns endast i TIMSS Advanced 2008. Detta innehåll behandlas i B-kursen men återkommer på flera sätt i övriga kurser. I Uppnåendemålen sägs ”Eleven skall kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former samt lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder”.

M7_11

	Tot. 2008
1 poäng	14,9%
Fel svar	38,6%
Ej svar	46,5%

31



En rät linje *l* går genom punkterna *A* (1,–2) och *B* (3, 4).
Är linjen *l* parallell med *PQ*?

Motivera ditt svar.

Då och endast då linjen och sträckan har samma riktningskoefficient är de parallella. Riktningskoefficienten fås genom formeln k = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Efter insättning fås att linjen har riktningskoefficienten 3. Sträckan *PQ* däremot har riktningskoefficienten $\frac{11}{4} = 3\frac{1}{4}$. Eftersom riktningskoefficienterna är olika, så är linjen och sträckan inte parallella. Huvuddelen av de elever, som löste uppgiften korrekt, löste den på detta sätt. Några få elever visade, att vinkeln mellan linjen och sträckan inte var 0°. En knapp tredjedel av eleverna menade, att linjen och sträckan inte var parallella men hade felaktig motivering för sin ståndpunkt. En dryg fjärdedel hade en korrekt uppfattning av linjens och sträckans parallellitet men angav ingen motivering. Övriga elever hade inte löst uppgiften korrekt.

För att motivera ståndpunkter i matematik krävs ofta en viss begreppslig förståelse. Riktningskoefficienter och räta linjens ekvation lärs dock oftast procedurellt (Bergqvist, et al., 2003; Wendlinski, 2009), vilket kan kasta ljus över den förhållandevis låga lösningsfrekvensen. Detta till trots är det ett uppnåendemål som långt mer än hälften av eleverna inte behärskar.

6.8 Brist på måluppfyllelse

Uppnåendemålen i flera av gymnasieskolans kurser testades i TIMSS Advanced 2008. I A-kursen var det framförallt mål rörande geometriska begrepp som behandlades. Dessa mål behärskade eleverna inte alls. En stor majoritet av elever kunde inte lösa de berörda uppgifterna. I B-kursen var det några fler av målen som berördes. Exempelvis var målet om klassisk geometri med, räta linjens ekvation och cirkelns ekvation. Några fler elever behärskade dessa mål men aldrig mer än hälften inte.

På C-kursen var 10 uppnåendemål berörda. Flera mål testades med flera uppgifter exempelvis uppnåendemålet att ”Eleven skall kunna ställa upp, förenkla och använda uttryck med polynom samt beskriva och använda egenskaper hos några polynomfunktioner och potensfunktioner”. I det fallet var lösningsfrekvenserna runt 60 procent. Nästa mål berördes också av två uppgifter ”Eleven skall kunna ställa upp, förenkla och använda rationella uttryck samt lösa polynomekvationer av högre grad genom faktorisering”, vilka låg betydligt lägre, under 20 procent. Övriga tre uppnåendemål berörde alla tre, två uppgifter var. Inte i något fall visade det sig att mer än hälften av eleverna behärskade dessa mål.

Inom D-kursens berördes sex uppnåendemål, vilka testades med 14 olika uppgifter. Målet som rörde introduktion av trigonometriska funktioner med hjälp av enhetscirkeln tycktes behärskas av en knapp hälft av eleverna. Däremot var det sämre med att kunna bestämma sidor och vinklar i en rätvinklig triangel. Lite drygt 10 procent uppvisade kunskaper om detta. Ett av de mera centrala målen i D-kursen ”Eleven skall kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning” testades med fem uppgifter. Anmärkningsvärt nog behärskade mindre än hälften av eleverna detta uppnåendemål. Inte heller några av de andra målen som rörde andraderivatan, primitiva funktioner och integraler behärskades av någon större grupp än hälften av eleverna.

Av E-kursens uppnåendemål testades i princip två. Det första rörde faktorsatsen, som en fjärdedel hade kunskaper om. Det andra uppvisade ett varierat resultat på två uppgifter. Den ena uppgiften klarade tre fjärdedelar av eleverna och den andra en tredjedel. I den med högre lösningsfrekvens visade det sig vara möjligt att direkt tillämpa en inövad procedur.

Det kan förefalla som om få uppgifter berörde E-kursens innehåll men man måste också beakta det första målet som finns i alla kursplaner utom A-kursens, nämligen att ”Eleven skall kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser”. Generellt kan sägas att flera mål i senare kurser bygger på mål i tidigare kurser.

6.9 Lösningsmönster

I detta avsnitt jämförs lösningsmönstren för de frisläppta uppgifterna, det vill säga de i block 1, 3, 6 och 7. Lösningsfrekvenserna från de frisläppta uppgifterna i TIMSS Advanced 2008 presenteras i tabellerna nedan. I block 1 och 3 finns även lösningsfrekvenser från uppgifter i TIMSS 1995 tillgängliga, eftersom dessa uppgifter gavs även då.

I block 1 har följande uppgifter analyserats ”Sammansatt funktion” (MA13001), ”Identifiera funktionens graf” (MA13002), ”Funktionens heltalskoordinater” (MA13009), ”Användning av kedjeregeln” (MA13006), ”Förutsägelse av två jämförda modeller” (MA13003) och ”Bestäm gränsvärdet av funktionen” (MA13004). Tabell 1 visar lösningsfrekvenserna för de olika uppgifterna. De relativa frekvenserna varierar mellan 30 procent och i något fall något över 50 procent för TIMSS Advanced 2008. Men detta är en förrädisk bild. Det är inte 30 procent av eleverna, som löst samtliga uppgifter. Som framgår av tabell 2 nedan så har ytterst få elever löst samtliga uppgifter korrekt, medan en större andel inte löst någon av uppgifterna korrekt. Typvärdet är två lösta uppgifter, vilket en fjärdedel av eleverna lyckades med. Tabell 1 skall tolkas så att en elev kan ha löst en av uppgifterna men inga andra. En annan elev kan ha löst tre uppgifter men inga andra. Genom att bara titta på lösningsfrekvenserna får vi lätt en alltför positiv bild av situationen.

Trots den förrädiska bilden kan det vara intressant att jämföra resultaten mellan de två åren 2008 och 1995. Av tabell 1 framgår att lösningsfrekvenserna inom områdena algebra, differential- och integralkalkyl med något enda undantag är mer än 15 procent lägre 2008 än 1995. Vad gäller uppgifter, som kräver användningen av kedjeregeln, så är skillnaden mindre.

I ett försök att ytterligare belysa skillnader i relativa lösningsfrekvenser har uppgifterna utifrån sin karaktär klassificerats, som rutinuppgifter eller icke rutinuppgifter. Rutinuppgifter är huvudsakligen uppgifter, som de flesta elever förutsätts ha stött på tidigare och i vilka en procedur mer eller mindre rutinmässigt kan tillämpas så att uppgiften kan lösas. Icke rutinuppgifter är uppgifter som flertalet elever inte stött på tidigare och kräver att transfer tillämpas.

Tabell 1 Relativa lösningsfrekvenser (%) av 6 uppgifter i block 1, TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995, n = 934

Uppgifter	TIMSS Advanced 2008	TIMSS 1995	Uppgiftens karaktär
Sammansatt funktion (MA13001)	45,7	60,0	Rutin
Identifiera funktionens graf (MA13002)	44,3	68,1	Rutin
Funktionens heltalskoordinater (MA13009)	41,3	60,1	Icke rutin
Användning av kedjeregeln (MA13006)	29,1	35,3	Icke rutin
Förutsägelse av två jämförda modeller (MA13003)	60,5	75,0	Rutin
Bestäm gränsvärdet av funktionen (MA13004)	30,4	45,5	Icke rutin

Ett mönster framträder, som visar att lösningsfrekvensen är lägre för icke rutinuppgifter, vilket indikerar, att undervisningen kan ha haft en procedurell inriktning inom detta område.

En mer rättvisande bild av elevernas kunskaper finns emellertid i tabell 2. Drygt hälften av eleverna har löst två uppgifter eller färre. Det är alltså så, att merparten av eleverna har löst spridda uppgifter, vilket framgår av att antalet olika mönster, som framför allt de elever som löst tre, två eller en uppgift korrekt, fördelar sig på. Totalt har eleverna visat upp 62 av 64 möjliga lösningsmönster.

Tabell 2 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 6 uppgifter i block 1, TIMSS Advanced 2008, n = 934

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
6	28	3,0	1
5	84	9,0	6
4	149	16,0	14
3	165	17,7	19
2	232	24,8	15
1	187	20,0	6
0	89	9,5	1
Totalt	**934**	**100,0**	**62 (64)**

*ej viktade

Denna fördelning kan bero på, att eleverna har öar av procedurella kunskaper, som är kontextuellt bundna och att transfer av procedurer till delvis obekanta problemsituationer förekommer sparsamt. Hälften av uppgifterna är av icke rutinkaraktär och kräver alltså transfer. Hade matematiska principer och begrepp, vilka knyter ihop olika kontexter och underlättar transfer, förståtts, så hade lösningsmönstren sannolikt varit mer sammanhängande med ett typvärde, som varit betydligt större.

Även TIMSS Advanced 1995 har analyserats och resultatet presenteras i tabell 3 nedan.

Tabell 3 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 6 uppgifter i block 1, TIMSS 1995, n = 999

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
6	77	7,7	1
5	218	21,8	7
4	224	22,5	14
3	191	19,1	19
2	170	17,0	14
1	96	9,6	5
0	23	2,3	1
Totalt	**999**	**100,0**	**61 (64)**

*ej viktade

Av tabellen framgår att typvärdet är fyra lösta uppgifter, två lösta uppgifter fler än för TIMSS Advanced 2008. Som jämförelse kan också sägas att den andel elever, som löst två uppgifter eller färre, är mindre än en tredjedel 1995 men större än hälften 2008, en påtaglig skillnad. Andelen elever som i TIMSS 1995 löst fem uppgifter eller fler är nästan 30 procent medan motsvarande andel i TIMSS Advanced 2008 är 12 procent. Antalet lösningsmönster, som använts för att nå resultatet totalt sett, är ungefär det samma.

Så den slutsats, som kan dras av denna jämförelse, är att den procedurella inriktningen av undervisningen har fortsatt mellan dessa år och fördjupats ytterligare. Ett förhållande som Tall (1996) generellt varnat för tidigt. (Se gärna avsnitt 3.7.5).

I det tredje blocket har analysen omfattat de tre uppgifterna ”Var är funktionen inte kontinuerlig” (MA13025A), ”Var är funktionen inte deriverbar” (MA13025B) och ”Beräkna integralen” (MA13024). I tabell 4 visas en jämförelse av de relativa lösningsfrekvenserna för TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995. Den i block 1 beskrivna skillnaden mellan åren är inte lika stor i de tre uppgifterna i block 3. Speciellt intressant är uppgiften, som testar deriverbarhet. Den har i princip inga elever förstått varken 2008 eller 1995.

De två första uppgifterna är att betrakta som icke rutinmässiga. Den internationella forskningen visar att begreppen kontinuitet och deriverbarhet sällan undervisas konceptuellt. Då integrationen omfattar enkla polynomfunktioner av rutinkaraktär, som i den tredje uppgiften, så blir lösningsfrekvensen betydligt högre.

Tabell 4 Relativa lösningsfrekvenser (%) av 3 uppgifter i block 3, TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995, n = 934

Uppgifter	TIMSS Advanced 2008	TIMSS 1995	Uppgiftens karaktär
Var är funktionen inte kontinuerlig (MA13025A)	30,3	49,5	Icke rutin
Var är funktionen inte deriverbar (MA13025B)	4,9	2,3	Icke rutin
Beräkna integralen (MA13024)	45,7	56,9	Rutin

Som nämnts tidigare kan en tabell med bara relativa lösningsfrekvenser ge ett alltför positivt intryck, då endast en liten andel elever löste alla tre uppgifterna korrekt (1,7 %). Resultatet av analysen av lösningsmönster presenteras i tabell 5. En ganska stor andel elever löste inte någon uppgift korrekt. Typvärdet är en uppgift korrekt löst, ett resultat som två femtedelar av eleverna nådde.

Resultatet av analysen av lösningsmönster i block 3 TIMSS Advanced 2008 bekräftar resultatet från analysen av block 1. Nästan 80 procent av eleverna har löst högst en uppgift.

Tabell 5 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 3 uppgifter i block 3, TIMSS Advanced 2008, n = 737

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
3	13	1,7	1
2	140	19,0	3
1	302	41,0	3
0	282	38,3	1
Totalt	**737**	**100,0**	**8 (8)**

*ej viktade

Resultatet av analysen av lösningsmönster i TIMSS 1995 visas i tabell 6 nedan. En förskjutning av de relativa frekvenserna uppåt kan noteras men typvärdet är detsamma, nämligen en löst uppgift. Dock var andelen elever som löst en uppgift markant högre och andelen som inte löst någon uppgift betydligt mindre. Det måste konstateras att antalet elever som gjorde uppgifterna i block 3 i TIMSS 1995 var relativt sett få i förhållande till de, som gjorde motsvarande uppgifter i TIMSS Advanced 2008. Därför bör viss försiktighet iakttas vad gäller slutsatser.

Tabell 6 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 3 uppgifter i block 3, TIMSS 1995, n = 232

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
3	4	1,7	1
2	60	25,9	2
1	132	56,9	3
0	36	15,5	1
Totalt	**232**	**100,0**	**7 (8)**

*ej viktade

Analysen av block 6 har omfattat sex uppgifter, nämligen: “Bestäm derivatan av en rationell funktion” (MA23159), ”Varför är lutningen samma i punkterna A och B” (MA23198), ”Bestäm derivatan av en exponentialfunktion” (MA23039), ”Bestäm integralen av uttrycket” (MA23042), ”Volymen som en funktion av diametern” (MA23208) och ”Bestäm gränsvärdet av uttrycket” (MA23165). I tabell 7 nedan visas de relativa lösningsfrekvenserna för uppgifterna i TIMSS Advanced 2008. Dessa uppgifter i block 6 gavs inte i TIMSS 1995. Variationen i lösningsfrekvens går från 15 procent till närmare 60 procent. Uppgifter av rutinkaraktär har högre lösningsfrekvens, så mönstret från de föregående två blocken upprepas. Exempelvis kräver en korrekt beräkning av gränsvärden en speciell omskrivning av uttrycket. Det är ju mer ett lyckligt sammanträffande, om eleven stött på en sådan omskrivning tidigare. Att bestämma derivatan av en sammansatt exponentialfunktion är sannolikt de flesta elever bekanta med sedan tidigare.

Tabell 7 Relativa lösningsfrekvenser (%) av 6 uppgifter i block 6, TIMSS Advanced 2008, n = 293

Uppgifter	TIMSS 2008	Uppgiftens karaktär
Bestäm derivatan av en rationell funktion (MA23159)	21,8	Icke rutin
Varför är lutningen samma i punkterna A och B (MA23198)	26,6	Icke rutin
Bestäm derivatan av en exponentialfunktion (MA23039)	58,9	Rutin
Bestäm integralen av uttrycket (MA23042)	44,1	Rutin
Volymen som en funktion av diametern (MA23208)	42,5	Rutin
Bestäm gränsvärdet av uttrycket (MA23165)	15,8	Icke rutin

I tabell 8 nedan visas resultatet av analysen av lösningsmönster. Typvärdet var i detta fall inte två som förut utan endast en löst uppgift. En fjärdedel av eleverna hade alltså löst endast en uppgift av sex möjliga uppgifter. Av antalet olika förekommande mönster att döma (47 av 64) så är de lösta uppgifterna mycket spridda. Detta visar att eleverna huvudsakligen har procedurella kunskaper kopplade till specifika problemsituationer.

Tabell 8 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 6 uppgifter i block 6, TIMSS Advanced 2008, n = 293

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
6	1	0,3	1
5	31	10,6	5
4	33	11,3	9
3	53	18,1	13
2	63	21,5	13
1	74	25,4	5
0	38	13,0	1
Totalt	**293**	**100,0**	**47 (64)**

*ej viktade

I block 7 har gruppen, som består av uppgifterna ”Minimivärde av en sammansatt funktion” (MA23133), ”Bestäm värdena på konstanterna A, B och C i funktionen” (MA23141), ”Vilken graf uppfyller villkoren” (MA23151), ”Bestäm funktionens nollställen” (MA23035A), ”Bestäm funktionens maximi- och minimipunkter” (MA23035B), ”Bestäm den primitiva funktionen” (MA23041), ”Bestäm värdet av en ändlig integral” (MA23050) och ”Sträckan en bil kör under inbromsning” (MA23158), analyserats.

Först redovisas de relativa lösningsfrekvenserna samt en klassificering av uppgifternas karaktär i tabell 9. De flesta uppgifterna är av icke rutinkaraktär. Man kan ju tycka, att bestämma värdet av en ändlig integral borde vara en uppgift av rutinkaraktär. Men den graf det är fråga om innehåller negativa tillskott, då den bitvis ligger under *x*-axeln. Det är känt från tidigare forskning, att eleverna inte nödvändigtvis är bekanta med denna situation, då de inte har stött på det tidigare (Schneider, 1993; Sierpínska, 1985; 1987; Ortons, 1983).

Tabell 9 Relativa lösningsfrekvenser (%) av 8 uppgifter i block 7, TIMSS Advanced 2008, n = 504

Uppgifter	TIMSS 2008	Uppgiftens karaktär
Minimivärde av en sammansatt funktion (MA23133)	29,2	Icke rutin
Bestäm värdena på konstanterna A, B och C i funktionen (MA23141)	17,8	Icke rutin
Vilken graf uppfyller villkoren (MA23151)	41,9	Rutin
Bestäm funktionens nollställen (MA23035A)	16,6	Icke rutin
Bestäm funktionens maximi- och minimi- punkter (MA23035B)	12,4	Icke rutin
Bestäm den primitiva funktionen (MA23041)	28,5	Icke rutin
Bestäm värdet av en ändlig integral (MA23050)	33,1	Icke rutin
Sträckan en bil kör under inbromsning (MA23158)	24,5	Icke rutin

För att få en mer fullvärdig bild av elevernas lösningsmönster presenteras resultatet av analysen i tabell 10 nedan. Av tabellen framgår att ingen elev löste samtliga uppgifter korrekt. Typvärdet är två lösta uppgifter av åtta möjliga. Det antal olika lösningsmönster, som kombinationer av två korrekt lösta uppgifter förekommer i, är 19. Generellt kan också sägas att de lösta uppgifterna fördelar sig spritt över ett stort antal olika kombinationer, 76. De föregående lösningsmönstren inom algebra, differential- och integralkalkyl bekräftas av resultatet av denna analys.

Tabell 10 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 8 uppgifter i block 7, TIMSS Advanced 2008, n = 140

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
8	0	0	0
7	2	1,7	2
6	5	2,4	5
5	13	9,3	11
4	16	11,5	12
3	25	17,9	18
2	42	30,0	19
1	22	15,7	7
0	16	11,5	1
Totalt	**141**	**100,0**	**76 (236)**

*ej viktade

Den sammanfattande slutsatsen, som kan dras, är att elevernas kunskaper i algebra, differential- och integralkalkyl huvudsakligen är av procedurell natur. Till stor del saknas den förståelse, som gör att eleverna kan använda och tillämpa procedurer och begrepp i nya situationer, alltså transferera kunskaper.

I tabell 11 presenteras de relativa lösningsfrekvenserna på de uppgifter, som ingår i området geometri.

Tabell 11 Relativa lösningsfrekvenser (%) av 6 uppgifter i block 1 och 3, TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995, n = 234

Uppgifter	TIMSS Advanced 2008	TIMSS 1995	Uppgiftens karaktär
Summan av sidornas lutning i en liksidig triangel (MA13007)	48,9	72,3	Rutin
Längden av medianen PT är lika med (MA13008)	44,9	75,2	Rutin
Form skapad av roterande linje (MA13021)	75,6	90,7	Rutin
Spegling av triangeln ABC (MA13026A)	28,3	51,6	Icke rutin
Rotation av triangeln ABC (MA13026B)	17,0	18,8	Icke rutin
Bevisa att E är mittpunkt i parallellogram (MA13029)	21,1	48,6	Icke rutin

I TIMSS 1995 är flera av frekvenserna relativt höga, en till och med över 90 procent, medan ”rotation av en triangel” märker ut sig negativt med en låg lösningsfrekvens. Skillnaderna i lösningsfrekvens rör sig i allmänhet om cirka 25 procent mellan åren med något undantag. I TIMSS Advanced 2008 är alltså lösningsfrekvenserna avsevärt lägre. Jämfört med algebra, differential- och integralkalkyl så är lösningsfrekvenserna inom geometri dock något högre. Ett märkligt resultat är, att lösningsfrekvenserna för uppgiften ”rotation av en triangel” är ungefär lika stora båda åren. Lösningsfrekvenserna är dessutom lägre än för årskurs 4 och 8 i grundskolan i TIMSS 2007. Detta är desto märkligare, då vinkelbegreppet normalt definieras med en begreppsmodell, i vilken rotation ingår som en viktig komponent. Uppgiften ”form skapad av roterande linje” har dessutom en förhållandevis hög lösningsfrekvens. Detta har sina rötter i, att särskilt rotationskroppar studerats i E-kursen. Någon koppling till uppgiften ”rotation av en triangel” finns inte, vilket torde bero på, att det är fråga om en annan typ av rotation i den senare uppgiften. De förhållandevis höga lösningsfrekvenserna skall jämföras med lösningsmönstren i tabell 12 nedan.

Tabell 12 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 6 uppgifter i block 1 och 3, TIMSS Advanced 2008, n = 234

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
6	3	1,3	1
5	20	8,5	5
4	42	17,9	10
3	60	25,7	14
2	50	21,4	7
1	49	20,9	6
0	10	4,3	1
Totalt	**234**	**100,0**	**44 (64)**

*ej viktade

Eleverna har alltså löst spridda uppgifter med typvärdet 3. Detta typvärde är högst bland de olika områdena med en relativ frekvens på drygt en fjärdedel fördelade på 14 olika lösningsmönster. Utifrån detta typvärde kan konstateras att kunskaperna i geometri tycks något mer sammanhängande jämfört med de andra områdena. Detta indikerar alltså en något mer begreppsligt inriktad undervisning i geometri än inom de andra områdena i gymnasieskolans matematik.

Det har även varit möjligt att jämföra lösningsmönstren i TIMSS Advanced 2008 med TIMSS 1995 även om antalet elever i den senare varit betydligt färre. Resultatet av lösningsmönsteranalysen av TIMSS 1995 presenteras i tabell 13. En tydlig skillnad framträder, typvärdet är 4 lösta uppgifter med en förhållandevis hög lösningsfrekvens. Samtliga elever har löst två uppgifter eller fler. Dessutom har antalet lösningsmönster minskat från 44 till 23, vilket dock kan bero på det färre antalet elever som deltog i dessa block i TIMSS 1995.

Det måste emellertid konstateras att fler elever löst fler uppgifter, vilka berör samma område, geometri, i TIMSS 1995 jämfört med motsvarande område i TIMSS Advanced 2008.

Tabell 13 Resultatet av en analys av lösningsmönster av 6 uppgifter i block 1 och 3, TIMSS 1995, n = 75

Antal uppgifter lösta	Frekvens	Relativ frekvens*(%)	Antal olika mönster
6	5	6,7	1
5	14	18,7	4
4	29	38,7	6
3	14	18,7	7
2	13	17,3	5
1	0	0	0
0	0	0	0
Totalt	**75**	**100,0**	**23 (64)**

*ej viktade

Således indikerar jämförelserna mellan TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 att undervisningen fått en mer procedurell prägel på senare år. Denna utveckling tycks fortgå i framförallt algebra, differential- och integralkalkyl men även till viss del i geometri. När undervisningens resultat blir sämre menar Tall (1996) att lärarna kompenserar detta genom att ytterligare förenkla innehållet i undervisningen och ännu mer fokuserar på hur man gör när man löser en uppgift utan begreppslig förankring av lösningsproceduren. Han menar att detta är matematikens onda cirkel och att försämringen kommer att fortgå om lärarna inte blir medvetna om vilka mekanismer som opererar. (Se gärna avsnitt 3.7.5).

6.10 En jämförelse mellan D- och E-kursernas resultat

De elever som fortsatt och valt att läsa E-kursen har troligen gjort detta utifrån bättre förutsättningar än de elever som inte läst vidare. Alltså ett positivt urval av elever har gått vidare till studier på E-kursen. Som nämnts i forskningsöversikten har många D-kurs-elever slutat sin matematikundervisning terminen innan testningen i TIMSS Advanced 2008 ägde rum i april 2008 och en del av eleverna har till och med avslutat D-kursen i slutet av årskurs 2. Sådana undervisningsuppehåll leder ofta till försämrade prestationer på test, visar forskningen (Cooper, et al., 1996). Skillnaderna i lösningsfrekvenser varierar mellan åren från upp till 40 procent avseende ”identifiering av en funktions graf” till några få procent på uppgiften ”bestämningar av gränsvärden”. Uppgiften om deriverbarhet, ett centralt moment i gymnasieskolans matematik, löstes i princip inte av någondera elevgruppen. Däremot var skillnaden mer påtaglig rörande uppgiften ”beräkna integralen”, som ungefär 25 procent fler elever på E-kursen löste. Vissa uppgifter har troligen upplevts så svåra, att en takeffekt kan ha nåtts som exempelvis i uppgiften ”bestäm derivatan”.

Avsnittet geometri märker ut sig på ett positivt sätt. Skillnaderna i lösningsfrekvens är mer konstanta och generellt sett mindre, i medeltal runt 15 procent. Med tanke på E-kursens innehåll är detta inte så konstigt, då differentialekvation och komplexa tal studerats. En förhållandevis hög lösningsfrekvens förekommer på uppgiften ”form skapad av roterande linje” för både E- och D-kursen.

Alltså skillnaderna i lösningsfrekvenser mellan E- och D-kursen är varierande. D-kursen ligger konstant lägre, men på några uppgifter är dock lösningsfrekvenserna ungefär lika. Inom området geometri är skillnaderna genomsnittligt något lägre mellan kurserna än jämfört med skillnaderna inom algebra, differential- och integralkalkyl.

6.11 Sammanfattning

För att få ökad överblick så läggs tyngdpunkten i sammanfattningen först på funktioner och deras egenskaper och därefter på geometri.

Drygt hälften av eleverna i TIMSS Advanced 2008 insåg inte, att en variabel även kan beteckna en funktions värde. Detta framgick, då sammansatta funktioner skulle förenklas. Dock bör påpekas att beteckningarna i den ena uppgiften faktiskt försvårade elevernas förståelse.

Knappt en femtedel av eleverna uppvisade kännedom om faktorteoremet, som visar en funktions nollställen. Då eleverna i en uppgift skulle jämföra två intäktsmodeller, så använde emellertid en liten andel faktorteoremet.

Kontinuitet, en annan central egenskap hos funktioner, skulle avgöras i några kritiska punkter på en graf. En knapp tredjedel av eleverna klarade detta.

Funktioners deriverbarhet behärskades endast av en mindre andel elever. Detta var speciellt tydligt, då det skulle bestämmas, i vilka punkter en funktion *inte* var deriverbar. Det förutsattes dock, att funktionerna var deriverbara i flertalet uppgifter.

Beräkningar av derivator av ett antal funktioner behärskade eleverna bättre. En förhållandevis stor andel elever verkade bekanta med de elementära funktionernas derivator och deras primitiva funktioner. Vad beträffar tolkningar av funktioners grafer, förstaderivator och andraderivator, så var detta uppenbarligen svårare. Vid lösandet av de mer generellt formulerade uppgifterna så klarade endast en liten andel elever dessa tolkningar. Vid lösandet av mer kontextuellt inriktade uppgifter däremot, som man kan misstänka att eleverna fått behandlade i undervisningen, var lösningsfrekvensen betydligt högre. Ett hastighetsproblem löstes av endast en fjärdedel av eleverna. I problemet krävdes att de skulle känna till, att hastigheten är tidsderivatan av sträckan och att denna derivata skall vara noll, då en bil står still. Resultatet indikerar alltså, att tillämpningen av kunskaperna inte utvecklats tillräckligt.

Den inre derivatan vid derivering av sammansatta funktioner visade sig vara ett av de större problemen. Endast en knapp tredjedel av eleverna visade sig behärska kedjeregeln. Det kan dock misstänkas, att eleverna behärskar själva regeln, men att de inte riktigt har vetskap om, när den skall tillämpas och att de inte heller kan urskilja vilka de sammansatta funktionerna är. I en uppgift framgick det extra tydligt, vilka de sammansatta funktionerna var. Lösningsfrekvensen var följdenligt betydligt högre än i de andra uppgifterna, nästan 60 procent.

Beräkningar av primitiva funktioner och integraler visade sig förhållandevis oproblematiska. Dock kom lösningsfrekvenserna aldrig över 60 procent. En avgörande kunskap, som att integralen kan tolkas som ett mått på arean under en funktions graf, verkade många elever ha missförstått. Då grafen låg under x-axeln trodde en stor andel elever, mer än hälften, att tillskottet, som integralen skulle få, inte kunde vara negativt utan måste vara positivt eller noll.

Gränsvärden av rationella uttryck klarades av en knapp tredjedel av eleverna. I vissa fall var lösningsfrekvenserna ännu lägre. Även då geometriska figurer var inblandade, så ändrades inte lösningsfrekvensen.

Den första uppgiften om serier handlade om induktionsbevis, vilket i princip inga elever klarade. Skälet till detta är, att induktionsbevis inte ingår i gymnasieskolans kursplan. En geometrisk series summa löste en fjärdedel av eleverna korrekt, medan mönstertänkande som tränats i grundskolan gick betydligt bättre och klarades av något mindre än två tredjedelar.

Förenkling av uttryck med komplexa tal, som endast ingår i E-kursens kursplan, gick följdriktigt inte så bra. En fjärdedel av eleverna lyckades med denna förenkling.

Inom området geometri fanns flera åtskilda begrepp i uppgifterna. Riktningskoefficient och avstånd i koordinatsystem behärskades på ett varierande sätt. När riktningskoefficienter mer rutinmässigt skulle beräknas, så klarade hälften av eleverna detta, men då avstånd och riktningar ingick i geometriska bevis gick det betydligt sämre. Cirkelns ekvation, som bygger på att punkterna befinner sig på ett konstant avstånd från medelpunkten, bestämdes utifrån en figur i ett koordinatsystem. En tredjedel av eleverna behärskade detta.

Ganska uppenbart var att flertalet elever inte visste vad begreppet median betydde, som visade sig i en uppgift, där några sträckor i en rätvinklig triangel skulle jämföras.

Ett glädjande resultat var, att tre fjärdedelar av eleverna identifierade vilken geometrisk kropp, som skapades av att en linje roterade kring en annan linje. Detta har nog sina rötter i, att rotationskroppars volymer ingår som en väsentlig del i den svenska kursplanen. Däremot då en triangel skulle roteras runt origo i ett koordinatsystem, så gick det inte lika bra, en fjärdedel av eleverna lyckades lösa uppgiften korrekt.

Med trigonometriska ekvationer lyckades eleverna på ett varierat sätt. Den ena, som var en mer elementär ekvation, löste nästan hälften av eleverna medan den andra som var mer begreppsligt orienterad, löstes av endast ett fåtal elever. Tillämpning av sinusteoremet i en rätvinklig triangel gick betydligt bättre, nästan hälften av eleverna klarade det.

Måluppfyllelsen visade sig vara bristande. Undantagsvis visade det sig att mer än hälften av eleverna behärskade de mål som skulle uppnås. Särskilt de tunga målen i D-kursen visade på tydliga brister.

Skillnader i elevprestationer vid jämförelse av TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 var påtagliga men varierande. Något speciellt delområde inom algebra, differential- och integralkalkyl, vilket eleverna i TIMSS Advanced 2008 behärskade sämre, går inte att peka ut, då skillnaderna i lösningsfrekvenser mellan de båda åren på varje uppgift var mer eller mindre konstanta, något mer än 15 procent. Så slutsatsen är, att resultaten i algebran är sämre. Men inom området geometri var skillnaden mellan TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 närmare 25 procent, om än varierande på enskilda uppgifter. I vissa fall var det nästan ingen skillnad alls medan i andra en betydligt större.

Skillnader i elevprestationer vid jämförelse av E- och D-kursen visar, att D-kursen ligger konstant betydligt lägre med några undantag, där lösningsfrekvenserna är ungefär lika. Genomgående är skillnaderna mindre inom området geometri.

Analysen av lösningsmönster för TIMSS Advanced 2008 visar, att spridda uppgifter lösts inom de undersökta blocken, som vart och ett bestod av sex till åtta uppgifter. Typvärdet var en eller två lösta uppgifter i block, som testade begreppsligt sammanhängande områden. I princip hade inga elever löst samtliga uppgifter inom något block. Så elevernas kunskaper är huvudsakligen av procedurell natur. Inom området geometri kan dock konstateras att vissa drag av begreppslig förståelse finns på grund av att typvärdena var något högre där. Den slutsats som kan dras är dock att gymnasieskolans matematikundervisning huvudsakligen haft en procedurell inriktning.

Analysen av lösningsmönster för TIMSS 1995 visar på mer sammanhängande lösningsmönster än för TIMSS Advanced 2008, både i algebra, differential- och integralkalkyl samt geometri då typvärdena genomgående var högre 1995.

Del 3

Diskussion och referenser

Del 3. Diskussion och referenser

I diskussionskapitlet presenteras först studiens centrala resultat, som framför allt tar upp skillnaden mellan en undervisning inriktad på inlärning av procedurer och en inriktad på förståelse av matematiska begrepp. Utifrån lösningsfrekvenserna och misstagens beskaffenhet kan konstateras att eleverna inte behärskar de centrala momenten i gymnasieskolan, om funktioners kontinuitet, deriverbarhet och derivata samt bestämning av integraler. I en uppgift, som behandlade deriverbarhet menade till exempel en stor grupp elever att funktionen inte var deriverbar i det intervall där den anslöt till *x*-axeln. Också den dynamiska förståelsen av gränsvärdesbegreppet tycks ha orsakat flera problem, speciellt rörande kontinuitet.

Orsakerna till det försämrade resultatet mellan 1995 och 2008 redovisas i avsnittet ”Det centrala resultatet” och utgörs framförallt av försämringen i grundskolan mellan 1995 och 2003 samt den procedurella inriktningen av undervisningen och kunskapen där. Även det undervisningsuppehåll som gymnasieeleverna i D-kursen varit utsatta för spelar en viss roll. Men den fortsatta utvecklingen mot procedurell undervisningen i gymnasieskolan kan också förklara försämringen mellan de båda åren.

Resultatets relation till tidigare forskning gås därefter igenom. Tidigare forskning bekräftas huvudsakligen. Det måste dock konstateras att huvuddelen av de misstag som gymnasieeleverna gör är beskrivna i den internationella forskningen redan på 1980-talet. En fråga som man ställer sig är varför dessa cirka 30 år gamla forskningsresultat inte nått ut till lärarna i våra gymnasieskolor så att de kunde ha beaktats i undervisningen.

Exempelvis är en svårighet att förstå att en graf, som är intervallvis konstant, representerar en funktion. Dessutom är det problem med den dynamiska tillämpningen av gränsvärden samt de negativa konsekvenserna av att ensidigt gå från funktionsuttryck till grafisk representation beskrivna på 1980-talet. I kursplanernas uppnåendemål har dock dessa problem beaktats.

Slutligen redovisas studiens begränsningar, argumentationen för att syftet nåtts samt lämplig framtida forskning i ljuset av denna studies resultat.

Det avslutande kapitlet innehåller referenser.

Läsanvisning

Lärare och lärarutbildare uppmanas att framför allt studera sammanfattningen av det centrala resultatet samt resultatets relation till tidigare forskning. Övriga avsnitt kan studeras mer kursivt.

7. Diskussion

Diskussionskapitlet är så disponerat att först avhandlas det centrala i resultatet, därefter relateras resultatet till tidigare relevant forskning. Vidare analyseras studiens begränsningar, där reliabilitet och validitet bedöms, vilket följs av en argumentation för att studiens syfte har nåtts. Slutligen ges förslag på framtida forskning i ljuset av resultaten av denna studie.

7.1 Det centrala resultatet

Det resultat, som framkommit av djupanalysen, visar att gymnasieelevers kunskaper på D- och E-kursen åtminstone kan ses ur tre perspektiv. Ur ett perspektiv som innebär förberedelser för fortsatta studier kan matematik ses som en slags inträdesbiljett till tekniska och naturvetenskapliga utbildningar då matematiken också är ett centralt redskap inom motsvarande yrken. Framför allt är den procedurella inriktningen av gymnasiestudierna oroande, vilken tycks vara ett mer generellt problem för en stor del av västvärlden. Bristen på begreppsligt kunnande hämmar transfer och därmed kreativitet och kan medföra att nya produkter och uppfinningar inte utvecklas lika lätt i framtiden. Så Sverige har ur ett internationellt konkurrensperspektiv hamnat på efterkälken.

Ur ett mer skolcentrerat perspektiv är själva förklaringen till det sjunkande resultatet centralt för att effektiva förbättringsåtgärder skall kunna sättas in. Ju högre precision i beskrivningarna av vad eleverna har för problem desto större möjlighet att sätta in effektiva åtgärder.

Förklaringen till det sjunkande resultatet från TIMSS Advanced 1995 till TIMSS Advanced 2008 är trefaldig. Först kan konstateras att elevernas förutsättningar från grundskolan inte höll tillräcklig kvalité. Enligt mätningen i TIMSS 2003 i årskurs 8 så motsvarade minskningen i kunskaper från TIMSS 1995 ungefär ett års studier. Det var eleverna, som gick i grundskolan årskurs 8 ett år efter denna nedgång och som därefter fortsatt i gymnasieskolan och som 2008 gick i gymnasieskolans D- och E-kurser i matematik. Djupanalysen, som gjorts angående elevernas matematikkunskaper i TIMSS 2007/2003, visar på allvarliga brister inom området algebra och förståelsen av variabelbegreppet är speciellt problematisk. Variabelbegreppet är också ett centralt begrepp i gymnasieskolans matematikundervisning inte minst på C-, D- och E-kurserna.

Den andra förklaringsgrunden rör det undervisningsuppehåll, som D-kursens elever får på grund av att kursen avslutas redan på hösten. En omfattande forskningsgenomgång visar att just matematikkunskaper är särskilt känsliga för undervisningsuppehåll och om undervisningen huvudsakligen varit procedurellt inriktad så påverkas möjligheten att memorera kunskaperna särskilt negativt till skillnad om den varit mer konceptuellt inriktad. I resultatet beskrivs den procedurella kunskapen hos eleverna. Denna kunskap har sin grund i en undervisning, som huvudsakligen varit procedurellt inriktad. På grund av den procedurellt inriktade undervisningen så har D-kursens undervisningsuppehåll varit en mer bidragande orsak till det försämrade resultatet än om undervisningen varit konceptuell, även jämfört med TIMSS Advanced 1995 då mätningarna inte påverkades av ett undervisningsuppehåll.

Den tredje orsaken rör elevkunskapens beskaffenhet och vilka områden, som visat sig särskilt problematiska. Minskningen har varit störst inom området geometri, grovt uttryckt runt 25 procent mellan 1995 och 2008. För uppgifter, som inte innebär en direkt rutinmässig tillämpning av en procedur, är lösningsfrekvenserna generellt sett lägre. I exempelvis en uppgift skulle det visas att en fyrhörning var en parallellogram då hörnens koordinater var givna. Denna uppgift hade en lösningsfrekvens på mindre än 20 procent, medan lösningsfrekvensen var högre på uppgifter, som eleverna kunde förutsättas ha omfattande erfarenheter ifrån. I en uppgift roterade en linje runt en annan linje i den tredimensionella rymden. Lösningsfrekvensen var över 75 procent på den. En uppgift om rotation, som också ingick i TIMSS 2007/2003 och där hälften av eleverna löste den, klarade gymnasieeleverna betydligt sämre, endast en knapp femtedel lyckades lösa den. Det måste också påpekas att det mesta av innehållet som rör geometri klaras av relativt tidigt i A- och B-kurserna. Visserligen kommer en del geometri in då trigonometriska funktioner och satser studeras i D-kursen men troligen finns ingen medveten eller systematisk samordning av dessa moment trots kursplanernas föreskrifter.

Inom området algebra, differential- och integralkalkyl var minskningen i lösningsfrekvenser mellan åren 1995 och 2008 ungefär 15 procent. Ibland upp mot 20 procent. I en uppgift skulle eleverna utifrån ett funktionsutryck bestämma vilken graf som representerade en funktion, en typ av tolkning som de flesta elever enligt forskningen tränat mycket på. Lösningsfrekvensen i TIMSS 1995 var då drygt 68 procent medan den i TIMSS Advanced 2008 sjunkit till drygt 44 procent.

Utifrån lösningsfrekvenserna och misstagens beskaffenhet kan konstateras att eleverna inte behärskar de centrala momenten i gymnasieskolan, om funktioners kontinuitet, deriverbarhet och derivata samt bestämning av integraler. I en uppgift, som behandlade deriverbarhet menade en stor grupp elever till exempel att funktionen inte var deriverbar i det intervall där den anslöt till x-axeln.

Den dynamiska förståelsen av gränsvärdesbegreppet tycks ha orsakat flera problem, speciellt rörande kontinuitet.

I TIMSS 1995 var lösningsmönstren mer sammanhängande än de i TIMSS Advanced 2008. Detta pekar på att utvecklingen mot en mer procedurellt inriktad undervisning tycks fortgå. Den onda cirkel, som Tall (1996) varnat för, nämligen att lärares svar på svaga elevresultat är att försöka förenkla matematiken än mer och att den procedurella inriktningen då blir än skarpare, tycks redan vara en realitet.

Djupanalysen visar också att över hälften av eleverna i gymnasieskolan inte behärskar de uppnåendemål som föreskrivits. Så bristen på måluppfyllelse är påtaglig.

Det tredje perspektivet från vilket resultatet kan ses rör elevernas utbildningssituation. På grund av den procedurellt inriktade undervisningen slås relativt stora elevgrupper ut och klarar inte att fortsätta sina studier som de tänkt. Den procedurella inriktningen menar Tall (1996) är att uppfatta som ett misslyckat sätt att förenkla matematiken för eleverna. Han hävdade att eleverna då får svårigheter att besvara begreppsligt inriktade frågor och lärarna kompenserade detta med att ställa mer procedurellt inriktade frågor, som de visste att eleverna kunde besvara. Detta är den onda cirkeln av procedurell undervisning och inlärning, som kan leda till ännu en mer procedurellt inriktad undervisning och ännu fler procedurellt inriktade frågor.

7.2 Resultatet i relation till tidigare forskning

De procedurella och konceptuella strukturerna av matematisk kunskap, som Rittle-Johnson och Wagner Alibali (1999) definierade, visade sig användbara som analysinstrument i denna djupanalys. Svenska gymnasieelevers kunskaper i matematik visade sig vara av huvudsakligen procedurell natur dock kan konstateras att inom området geometri fanns mer konceptuella inslag. Resultatet visar också att procedurell kunskap inte utan vidare kan generera konceptuell kunskap. Hade detta varit fallet hade troligen en mer omfattande begreppslig förståelse exponerats av eleverna. Denna del av resultatet står också i överensstämmelse med vad Rittle-Johnson och Wagner Alibali (1999), Rittle-Johnson, Siegler och Alibali (2001) och Bentley (2008a) tidigare rapporterat, nämligen att procedurell kunskap endast undantagsvis kan generera konceptuell kunskap.

Att från konceptuell kunskap generera procedurell har rapporterats som en betydligt mer frekvent företeelse (Bransford, 1979; Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Shepard, 2001), något som inte synts i resultatet av denna djupanalys, i vilken konceptuell kunskap visat sig lågfrekvent.

Det fenomen, som Delazar (2003) beskrivit, att procedurer från flera olika kontexter eller problemsituationer kan sammanfattas med en övergripande gemensam princip, metakognitiv procedur, kan rimligen inte, att döma av resultatet, vara särskilt frekvent. Detta hade förutsatt en extensiv träning av att lösa uppgifter i olika kontexter. Däremot pekar resultatet mer mot att procedurer lärs och tillämpas utan förståelse som Delazar (2003) och Giaquinto (1995) beskrivit. Kieran (2003) menar att förståelse av procedurer är viktigt för att de skall kunna tillämpas korrekt och Kilpatrick et al. (2001) menade att utgångspunkten för studier i algebra borde vara observationer av hur tal formar mönster och sedan generaliserade talmönster. Att döma av resultatet är detta inte särskilt vanligt i Sverige.

Det internationella uppropet att inrikta matematikundervisningen mot mer förståelse (Douglas, 1986; Steen, 1989; Tall 1991; Tucker 1988; Vinner, 1989) tycks ha klingat mer eller mindre ohört i Sverige. Undervisningen i gymnasieskolans D- och E-kurser verkar vara till den allra största delen procedurellt inriktade. Detta påpekande är i sig inget nytt, redan tidigare har röster höjts för att få en mer förståelse inriktad undervisning. Exempelvis påpekade Alfred North Whitehead (1911) detta tidigt.

Konsekvensen av en procedurellt inriktad undervisning är att eleverna kommer att lära sig en massa isolerade detaljer utan inbördes sammanhang. Om då uppgifterna är tillrättalagda så kan det verka som eleverna klarar sig bra men så fort uppgifterna avviker från invanda mönster misslyckas eleverna (Douglas, 1986; Steen, 1989; Tucker 1988; Vinner, 1989; Tall, 1988; 1996; Zimmermann, 1991; Eisenberg, 1992; Selden, Mason & Selden, 1989; 1994). Detta är fallet i TIMSS Advanced 2008, där de flesta uppgifterna inte är av rutinkaraktär och med låga lösningsfrekvenser som följd. Detta problem har med all säkerhet grundlagts i grundskolan, vilket en djupanalys av Bentley (2009b) också bekräftat.

Generellt sett gäller att procedurell kunskap visar sig genom att spridda testuppgifter löses och konceptuell kunskap leder till mer sammanhängande lösningsmönster (Rittle-Johnson & Wagner Alibali, 1999; Bentley, 2008a; Bentley, 2009a). Resultatet visar att spridda uppgifter lösts med typvärdena en eller två av sex respektive åtta uppgifter lösta, vilket tydligt pekar på en procedurell struktur i elevernas matematiska kunskaper. Även i TIMSS 1995 syns denna struktur men inte lika påtagligt. Typvärdena var fyra uppgifter lösta av sex inte bara för algebra, differential- och integralkalkyl men också geometri.

Forskningsgenomgången visar att undervisningsuppehåll har avgörande betydelse för elevernas prestationer på test speciellt gällande matematik med en procedurellt inriktad undervisning (Cooper, et al., 1996). D-kursens uppehåll har troligen påverkat resultatet negativt. Dock måste påpekas att E-kursens elever troligen utgör ett positivt urval jämfört med D-kursens elever.

Att döma av de misstag elever uppvisat i lösningarna av testuppgifterna så har begreppsmodeller av låg strukturell validitet använts på ett oreflekterat sätt. Den strukturella validiteten, som är ett viktigt kvalitetskriterium, är ett mått på hur väl den matematiska strukturen bevaras i den förenkling, som modellen representerar. Även operationell validitet har visat sig vara av betydelse (Charles, Nason & Cooper, 1999). De modeller som används för funktionsbegreppet visade sig medföra att elever hade svårigheter att avgöra om en graf representerade en funktion eller ej. I en uppgift som behandlade en funktions kontinuitet och deriverbarhet, i vilken funktionen var intervallvis konstant orsakade detta extra svårigheter för många elever (Leihardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Schoenfeld, Smith och Arcavi, 1990). De två begreppsmodeller för funktioner, maskinmodellen och mängddiagrammodellen som används i undervisningen, ger inte heller någon vägledning i detta fall.

Även den dynamiska modellen av gränsvärdesbegreppet visade sig kunna ställa till problem för andra centrala begrepp som kontinuitet och deriverbarhet, vilket också framkom i ovanstående nämnda uppgift. Flera elever menade också att funktionen inte var deriverbar i den del av grafen som anslöt till *x*-axeln då ingen koefficient framför x existerade där, vilket bekräftar resultat från flera forskare (Marnyanskii, 1975; Markovits et al., 1986; Barnes, 1988).

Inget har framkommit, som stöder de resultat som några forskare kommit fram till (Lovell, 1971; Markovits et al. 1986; Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989) att elever ibland tror att funktioner måste vara ett-till-ett-avbildningar.

Översättningar mellan funktionsuttryck och graf, utgår oftast från funktionsuttrycket och utifrån det skall grafen bestämmas (Janvier, 1987d; Carpenter et al., 1981; Stein & Leinhardt, 1989; Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986; Kerslake, 1977; 1981; Zalslavsky, 1987; 1988). Resultaten på flera övningar bekräftar detta. I en uppgift (M1_02) var funktionsuttrycket givet och eleven skulle avgöra vilken graf som var den korrekta. Alltså en tolkning från uttryck till graf med en förhållandevis hög lösningsfrekvens som konsekvens. I en annan uppgift (M7_03) gick tolkningen andra vägen från graf till funktionsuttryck och lösningsfrekvensen var lägre.

Markovits, et al. (1986) beskrev elevers problem med att förstå och hantera diskreta funktioner, exempelvis sådana som endast antar heltalsvärden. I en sådan uppgift i vilken antalet heltalskoordinater skulle bestämmas var lösningsfrekvensen runt 40 procent i TIMSS Advanced 2008 och något högre över 60 procent i TIMSS 1995. Resultatet bekräftar delvis resultatet från Markovits, et al. (1986).

Bagni (2000) beskrev svårigheter, som elever uppvisade vid användning av faktorsatsen. Dessa bekräftades också i uppgift (M7_03) i vilken faktorsatsen behövde tillämpas.

Begreppet derivata konstaterade många forskare var problemfyllt. Framför allt fann elever det svårt att tolka derivatans betydelse och värde från en graf (Bell &

Janvier, 1981; Janvier, 1978; McDermott, Rosenquist & vanZee, 1987; Preece, 1983b; McDermott et al., 1987; Clement, 1989; Janvier, 1978; Kerslake, 1977, 1981; McDermott et al., 1987; Preece, 1983b; Shultz, Clement & Makros, 1986; Stein & Leinhardt, 1989; Widjaja & Heck, 2003). Resultatet bekräftar dessa forskningsresultat. Då uppgifter (exempelvis M3_05) med funktioner som var konstanta i intervall testades var lösningsfrekvenserna låga och misstagen som exponerades var att derivatan inte existerade i sådana intervall. Även svårigheter att förstå att tidsderivatan av en funktion, som beskriver sträckans förändring, är hastigheten, exponerades (M7_05). Även den så kallade ikoniska uppfattningen av grafer framkom i en uppgift rörande uppblåsning av en ballong (M6_03). Så flera av de i forskningen tidigare beskrivna elevmissuppfattningarna bekräftades i djupanalysen.

Bergqvist, et al., (2003) undersökte i sin studie hur elever på naturvetenskapligt program resonerade då de löste ett problem om en andragradsfunktions minsta och största värde i ett slutet intervall. Flera elever trodde, att ett största och minsta värde i ett intervall innebar att derivatan måste vara noll, trots eleverna hade tillgång till grafritande räknare. Denna djupanalys bekräftar de slutsatser Bergqvist, et al. drog. I flera uppgifter underlättade användningen av grafritande räknare lösningarna så mycket att uppgifterna framstod som alltför enkla (M6_02; M7_04; M7_07; M1_03; M7_05). Detta förutsätter emellertid en utvecklad förmåga att tolka grafer, något som beskrivits på ett omfattande sätt i forskningslitteraturen. (Se ovanstående stycke).

Den modell, som används vid introduktion av integralbegreppet och primitiva funktioner, i vilken integralen ses som ett storleksmått på ytan under en positiv graf, gav negativa effekter i en uppgift (M7_08) då integralen av en funktion, vars graf även bitvis låg under *x*-axeln, skulle bestämmas (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997). Över hälften av eleverna trodde att den del av funktionen, som låg under *x*-axeln skulle ignoreras eller att arean skulle adderas med positivt tecken. Om denna modell inte kompletteras eller förtydligas av läraren så måste både den strukturella och operationella validiteten anses som låg. Även den dynamiska modellen av gränsvärdesbegreppet kan vålla problem vid introduktion av integraler. Schneider (1993) beskriver hur elever uppfattade att allt fler rektanglar behövdes för att täcka ytan under grafen och då blev rektanglarna allt smalare för att till slut, då indelningen gick mot oändligheten, så trodde eleverna att de blev linjer, vars area var noll och då blev hela arean noll. En annan missuppfattning fann Sierpínska (1985; 1987). Hon menade att elever trodde att gränsvärden aldrig nådde fram utan fortsatte oavbrutet, en uppfattning som också hade sina rötter i den dynamiska uppfattningen av gränsvärden. Om inte integralbegreppet förstås så tillämpas beräkningar av det procedurellt. Då kan problem som det ovan nämnda orsaka onödiga svårigheter.

Även Tall (1996), Orton (1983) och Eisenberg (1992) fann att integraler lärdes in utan någon särskild begreppslig förståelse. I uppgiften (M7_08; M7_09) med funktionen vars graf var negativ i ett intervall exponerades denna brist på förståelse då, som nämnts tidigare, över hälften av eleverna ignorerade denna del av grafen eller adderade arean med positivt tecken istället för negativt. En tredjedel av eleverna löste uppgiften korrekt. I andra uppgifter av mer rutinkaraktär var den relativa lösningsfrekvensen högre upp mot 50 procent i TIMSS Advanced 2008 men ännu högre i TIMSS 1995 (M6_08; M3_04). Detta resultat bekräftar det Selden, Mason och Selden (1989; 1994) fann, att elever presterade bra på uppgifter i bekanta kontexter men i en mer okänd kontext, i vilken intränade procedurer inte direkt kunde tillämpas, minskade lösningsfrekvensen. Även Bentleys jämförande djupanalys av elevers kunskaper i Sverige, Hong Kong och Taiwan i TIMSS 2007 bekräftas av detta resultat (Skolverket, 2009).

Trots att kursplanerna föreskriver att trigonometriska funktioner skall introduceras med hjälp av enhetscirkeln, en modell vilken anses vara mer begreppslig inriktad, så hade huvuddelen av elevgruppen i urvalet uppenbara svårigheter att beräkna en sida i en rätvinklig triangel då en vinkel och hypotenusan var kända (M6_11). Denna del av resultatet bekräftar bara delvis tidigare forskning inom området. Många forskare efterlyser en mer konceptuellt inriktad introduktion av de trigonometriska funktionerna med hjälp av enhetscirkeln (Davis, 1992; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Skemp, 1987; Kendal & Stacey, 1997; Hirsch et al., 1991; Blackett & Tall, 1991; Parish & Ludwig, 1994; Weber, 2005). Trots att en sådan introduktion rimligen har ägt rum för de flesta elever hade de alltså uppenbara svårigheter att lösa denna uppgift. Däremot var lösningsfrekvenserna något högre för trigonometriska ekvationer, nästan hälften av eleverna löste dessa (M6_10; M7_10).

Konvergensen av oändliga serier och talföljder har visat sig svåra att förstå (Bagni, 2000a; 2005; Suraweera, 2002; Brown et al., 2002). Många elever kan inte förstå att värdet kan bli ändligt. Även den dynamiska modellen av gränsvärde gör att elever inte tror detta. Gränsvärdet uppnås aldrig. Ibland används andra representationsformer exempelvis indelningar av kvadrater. Men om eleverna inte har tillräcklig erfarenhet av dessa kan det vara kontraproduktivt (Duval, 1995; D'Amore, 2001). En uppgift behandlade en oändlig geometrisk serie, vars första och tredje term var givna. En majoritet av eleverna adderade dessa två termer och valde därför en distraktor. Slutsatsen av detta är att de flesta elever inte är bekanta med serier och talföljder som är ett av uppnåendemålen i C-kursen.

I geometri är vinkelbegreppet centralt i både grundskolans och gymnasieskolans kursplaner. Tidigare forskning har visat att begreppet är svårförståeligt för en majoritet av elever (Mitchelmore & White, 1998; Foxman och Ruddock, 1983). Vridning spelar en central roll och förståelse av den är en förutsättning för förståelse av vinkelbegreppet. Själva vridningen tycks alltså vara det svåraste. Vridningar testades i två uppgifter med olika kontext. I den första uppgiften roterade en linje i tre dimensioner runt en annan linje och beskrev därvid en kon. Lösningsfrekvensen var en av de högsta i TIMSS Advanced 2008, mer än tre fjärdedelar av eleverna löste uppgiften (M3_01) korrekt. Medan en annan uppgift (M3_06B) i vilken en triangel skulle roteras runt origo 90 i ett koordinatsystem hade betydligt lägre lösningsfrekvens, mindre än 20 procent. Motsvarande uppgift i årskurs 8 i TIMSS 2007 hade ungefär dubbelt så hög lösningsfrekvens. Den första uppgiften representerar en kontext som eleverna har färsk erfarenhet av då de beräknar rotationskroppars volymer med hjälp av integraler. Den andra uppgiftens kontext har de möjligen stött på i A- eller B-kursen men troligtvis inte senare. Det intressanta är hur kontextbundna elevlösningarna tycks vara, vilket i sin tur indikerar undervisningens procedurella inriktning. Trots att eleverna verkar välbekanta med rotation i en kontext kan de inte överföra den till en annan.

Wendlinski (2009) fann i ett experiment med procedurell och konceptuell undervisning om räta linjens ekvation att en konceptuell inriktning förbättrade elevers förmåga att teckna räta linjens ekvation. Även Bergqvist et al, (2003) djupintervjuade svenska gymnasieelever om bland annat räta linjens ekvation. De medverkande elevernas kunskaper visade sig var procedurellt strukturerad. I en uppgift (M1_07) i TIMSS Advanced 2008 där summan av tre riktningskoefficienter skulle bestämmas klarade nästan hälften av eleverna detta medan i en annan uppgift (M7_11), i vilken en sträckas och en linjes lutning skulle jämföras klarade ungefär en fjärdedel detta. Den senare uppgiften innebar inte enbart en direkt tillämpning av invanda procedurer. Även då en fyrhörning skulle bevisas vara en parallellogram ingick räta linjens ekvation (M3_09). En än mindre andel elever löste denna uppgift då kunskaper från flera olika områden måste kombineras. Ett sådant krav på transfer, som fanns i denna uppgift, gör att lösningsfrekvenserna sjunker. Så resultatet i denna studie harmonierar med ovan beskrivna forskning.

Även kurvor och inte grafer behandlades i en uppgift (M6_09). Den handlade om att utifrån en cirkel ritad i ett koordinatsystem bestämma dess ekvation. En knapp tredjedel av eleverna lyckades med detta. Elevers förmåga att tolka grafer eller kurvor och skapa nödvändig information är rätt begränsad (Dunham & Osborne, 1991; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; Wainer, 1992). Många missuppfattningar florerar och eleverna har därför svårigheter att anknyta tolkningen till fysiska begrepp och vardagliga företeelser (Trowbridge & McDermott, 1980; Barclay, 1985; Cates, 2000; Dugdale, 1993; Mokros & Tinker, 1987). Även ovana beteckningar kan vålla problem (Arcavi, 1994). Den relativt låga lösningsfrekvensen på uppgiften stödjer den tidigare forskningen inom området.

En övergeneralisering, som bygger på elevernas egna erfarenheter eller på icke genomtänkta val av exempel, är i själva verket en icke önskvärd transfer (Stavy & Tirosh, 2000). Misstagen i uppgiften (M7_08) då integralen av en funktion skulle bestämmas i ett givet intervall. Den area, som var under *x*-axeln, adderade många elever utan negativt tecken, ett förhållande som kan ha sina rötter i en övergeneralisering sedan introduktionen av integralbegreppet.

7.3 Studiens begränsningar

Testen i TIMSS Advanced görs under mycket kontrollerade former. De tre olika typerna av testuppgifter innebär att olika hänsyn behöver tas för att reliabiliteten skall bli tillfredställande.

Flervalsuppgifterna innebär i princip inga svårigheter vid bedömningen. Uppgifter med krav på endast svar bedömdes huvudsakligen utifrån rätt eller fel. Olika feltyper kan ibland också klassificeras. Utrymmet för subjektiv bedömning är dock mycket litet.

För uppgifter, i vilka redovisning av fullständiga lösningar krävs, tillämpas medbedömarprincipen. Likheten i bedömningarna, som är ett mått på interbedömarreliabiliteten, var mycket hög. Dessa bedömningar ligger till grund för den statistiska redovisningen.

Konstruktionsvaliditet är ett mått på hur väl de skapade kategorierna fångar upp samtliga elevlösningarna. Eftersom endast exponerad förståelse av begrepp och tillämpning av procedurer studerats, har en bristfällig elevlösning setts som icke fullt exponerad förståelse eller tillämpning.

Extern validitet beskriver i vilken grad resultatet är generaliserbart till populationen som helhet. Då skolor, som varit grunden för samplingen, valts ut slumpmässigt och en, möjligen två elever, per klass haft samma testuppgifter blir eleverna i princip slumpmässigt valda. Eftersom antalet elever ur TIMSS Advanced 2008 och TIMSS 1995 som studerats är något mindre än 40 procent av hela urvalet, så är detta på gränsen till, vad man skulle kunna acceptera för att generalisera resultatet till hela elevpopulationen. Men eftersom det inte är avgörande om 10 eller 20 procent av eleverna gör samma typ av misstag utan snarare att en stor andel av eleverna i population gör detta misstag, exakt hur stor är av mindre betydelse, för misstaget måste ändå rättas till och man måste förhindra att det uppstår på nytt.

Resultaten visade sig också harmoniera med tidigare forskning på området och speciellt misstagen har tidigare beskrivits av forskningen med början redan på 1980-talet. Detta stärker också den externa validiteten.

Givetvis hade det varit önskvärt med ett ännu större antal elevlösningar, som hade kunnat analyseras. Då hade säkerheten i slutsatserna ökat ännu mer. Om enstaka uppgifter testar en företeelse måste viss försiktighet karaktärisera slutsatserna. Ett sådant större antal elevlösningar skulle dock inte ha varit möjligt att analysera inom den givna tidsramen.

Testuppgifterna har ju varit utformade för att jämföra poäng i olika länder som en indikation på elevers prestationer i matematik och inte primärt för denna typ av djupanalys av elevers kunskaper. Det hade varit önskvärt att fler uppgifter, som avser mäta elevers kunskaper om ett och samma begrepp i olika kontexter, i större utsträckning hade ingått i samma block. Detta är ett önskemål som kanske kan beaktas i kommande TIMSS projekt.

Forskningsgenomgången har på grund av tidsramarna inte kunnat göras fullständig. Den forskning som refereras kan mer ses som exempel på resultat inom de olika områdena. Emellertid skall konstateras att forskningen om hur gymnasieelever förstår begrepp och behandlar procedurer är relativt sett sparsam. Flera av forskarna som refereras har dock varit tongivande inom området under lång tid. Fler refererade forskningsrapporter inom området geometri hade varit önskvärt.

7.4 Syftet har nåtts

Syftet var alltså först att ytterligare belysa svenska elevers matematikkunskaper med inriktning på procedurer och begrepp. Då varje enskild uppgift har analyserats har elevers kunskaper till grund för lösningarna redovisats. Även de misstag och missuppfattningar som kunnat härledas har beskrivits. Lösningsmönsteranalysen har vidare visat hur eleverna löst spridda uppgifter framförallt i TIMSS Advanced 2008 medan i TIMSS 1995 något mer sammanhängande mönster noterats. Detta tillsammans med karaktären på misstagen på testuppgifterna och lösningsfrekvenserna på icke-rutinuppgifter indikerar en huvudsakligen procedurell undervisning i gymnasieskolan. Denna inriktning har under senare år blivit mer påtaglig.

Den andra delen av syftet var att studera och jämföra skillnader mellan TIMSS 1995 och TIMSS Advanced 2008. Som redan nämnts visade lösningsmönsteranalysen på en tydlig skillnad mellan dessa båda mätningar. I TIMSS Advanced 2008 var inriktningen mer påtaglig än 1995. En annan skillnad som redovisats för var och en av de frisläppta uppgifterna var den betydligt högre lösningsfrekvensen 1995 oftast upp mot 20 procent högre dock med några undantag. Karaktären på misstagen var ungefär de samma men omfattningen var oftast mindre.

Den tredje delen av syftet var att utifrån kunskapens beskaffenhet samt tidigare forskning dra slutsatser om undervisningens inriktning. Den tidigare forskningen som redovisats rörande undervisningens inriktning i några av de ostasiatiska länderna har fastlagt genom ett stort antal analyserade lektioner att undervisningen där har en konceptuell inriktning. Genom en lösningsmönsteranalys har Bentley (2009a) kunnat visa att elever i Hong Kong och Taiwan uppvisar ett sammanhängande lösningsmönster på en grupp av uppgifter som testar ett och samma begrepp medan elever i Sverige löser spridda uppgifter. Procedurell kunskap, som den internationella forskningen visat innebär att elever har isolerade öar av framförallt procedurer som kan tillämpas i invanda sammanhang, kännetecknas alltså av ett lösningsmönster med spridda lösta uppgifter. Utifrån denna forskning kan slutsatsen dras om undervisningens inriktning i matematik i gymnasieskolans D- och E-kurser. Undervisningen kännetecknas huvudsakligen av en procedurell inriktning, vilken på senare år blivit alltmer påtaglig. Detta är en trend som finns i större delen av västvärlden.

7.5 Framtida forskning

Den mest angelägna framtida forskningen i Sverige är att försöka kartlägga hur det är möjligt att bryta den onda cirkel som Tall (1996) beskriver. Sämre elevprestationer leder till att lärare förenklar innehållet så att elever med sämre kunskaper skall kunna lära sig det. Dessa förenklingar leder troligen till instruktioner som har en mer procedurell inriktning. Gör så här när du skall lösa denna uppgift. Förståelsen finns inga förutsättningar att ta upp menar Tall. Hur skulle det vara möjligt att bryta den utvecklingstrend. ”Belief systems”, som Thompson beskrivit 1996, är en förklaringsgrund. En bra inledning på en sådan forskning skulle vara att först göra en omfattande och detaljerad kartläggning av gymnasielärare uppfattningar om ämnets beskaffenhet och hur de ser på undervisningen och problem som är förknippade med den.

8 Referenser

Arcavi, A., (1994). Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*. No. 14(3), FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

Aspinwall, L., Shaw, K., L. & Presmeg, N. (1997). Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections Between a Function and its Derivative. *Educational Studies in Mathematics*. No. 33, pp. 301–317.

Bagni, G.,T. (2000a). Difficulties with Series in History and in the Classroom. In Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*. The ICMI Study, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 82–86.

Bagni, G.,T. (2000b). "Simple" Rules and General Rules in Some High School Students' Mistakes. *Journal für Mathematik Didaktik*. No. 21(2), pp. 124–138.

Bagni, G.,T. (2005). Infinite Series from History till Mathematics Education. *Normat – Nordisk Matematisk Tidsskrift*. No. 53(4), pp. 173–185.

Ball, D., L. (1988). *Knowledge and Reasoning in Mathematical Pedagogy: Examining What Prospect Teachers Bring to Teacher Education*. Unpublished doctorial dissertation, Michigan State University, East Lansing.

Ball, D. L. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students*. Santa Monica, CA: RAND.

Ball, D., L. & Wilson, S., M. (1990). *Knowing the Subject and Learning to Teach It: Becoming a Mathematics Teacher*. (Research Report 90 – 7). East Lansing: Michigan State University, National Center for the Research on Teacher Education.

Ball, D., L., Lubienski, S., T. & Mewborn, D., S. (2001). Research on Mathematics Teaching. In Richardson, V. (Ed.) *Handbook of Research on Teaching*. Washington D. C.: American Educational Research Association.

Bakar, M. & Tall, D., O. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*. No. 23(1), pp. 24–33.

Barclay, W., L. (1985). *Graphing Misconceptions and Possible Remedies Using Micro Computer Based Labs*. Paper submitted to the National Educational Computing Conference (7th, San Diego, CA, June 4–6, 1986).

Barnes, M. (1988). Understanding the Function Concept: Some Results of Interviews with Secondary and Tertiary Students. *Research on Mathematics Education in Australia*, pp. 24–33.

Baroody, A., J. (1987). *Children's Mathematical Thinking: A Developmental Framework for Preschool, Primary, and Special Education Teachers*. New York: Teacher's College.

Berkner, L., & Chavez, L. (1997). *Access to Postsecondary Education for the 1992 High School Graduates* (NCES 98-105). Retrieved April 13, 2007, from http://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=98105

Bell, A. & Janvier, C. (1981). The Interpretation of Graphs Representing Situations. *For the Learning of Mathematics.* No. 2(1), pp. 34–42.

Bentley, P-O. (2008a). *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models. A New Field of Research.* Göteborg, Studies in Educational Sciences, 265. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Bentley, P-O. (2008b). *Pupils' Arithmetic Knowledge and the Procedural Models in their Teaching.* (In Press)

Bentley, P-O. (2008c). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 – En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar procedurer.* Skolverket: Analysrapport till 323, 2008.

Bentley, P-O. (2009a). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007/2003. En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan.* Skolverket: Analysrapport till 323.

Bergqvist, T., Litner, J. & Sumpter, L. (2003). Reasoning Characteristics in Upper Secondary School Students' Task Solving. *Research reports in mathematics education*, no 1, 2003, Department of Mathematics, Umeå University.

Blackett, N., & Tall, D., O. (1991). Gender and the Versatile Learning of Trigonometry Using Computer Software. In the *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Furinghetti, F. (Ed.), Vo. 1, pp. 144–151. Assisi, Italy: PME.

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.). (1999). *How people learn: brain, mind, experience, and school.* Washington, DC.: National Academy Press.

Brown, C., McGraw, R., Koc, Y., Lynch, K., & Arbaugh, F. (2002). Lesson study in secondary mathematics. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. Weigel, R. Bryant, & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Mathematics, Science, and Environmental Education, 139. (ERIC Document Reproduction Service No. SE 066 889).

California Department of Education. (2006). *Mathematics Framework for California Public Schools Kindergarten Through Grade Twelve.* Sacramento, CA: California Department of Education.

Carpenter, T., P., Corbit, M., K., Kepner, H., S., Jr., Lindquist, M., M. & Reys, R., E. (1981). *Results from the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19–32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cates, B. B. (2000). *The effects of Calculator-Based Laboratory activities on college algebra students' understanding of the function concept and graphing.* Unpublished PhD, North Carolina State University.

Charles, K., Nason, R. & Cooper, T., (1999). *Mathematical Analogs and the Teaching of Fractions.* Paper Presented at the Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education (Melbourne, Australia, November 29 – December 2, 1999).

Clarke, D., Keitel, C., & Shimizu, Y. (Eds.). (2006). *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: the Insiders Perspective* (Vol. 1). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Clement, J. (1989). The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* No. 11(1–2), pp. 77–87.

Cooney, T., & Wiegel, H. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. In A. J. B. M. A. C. C. K. J. K. F. K. S. Leung (Ed.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 795–828). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cooper, H., Nye, B., Charlton, K., Lindsay, J. & Greathouse, S., (1996). The Effects of Summer Vacation on Achievement Test Scores: A Narrative and Meta-Analytic Review. *Review of Educational Research*, Vo. 66, No, 3. pp. 227–268.

Cornu, B. (1992). Limits. In *Advanced Mathematical Thinking*. Tall, D., O. (Ed.), pp. 153–166. Dordrecht: Kluwer.

D'Amore, B. (2001), Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution, *Scientia Paedagogica Experimentalis* No. 38(2), pp. 143–168.

Davis, R., B. (1992). Understanding "Understanding". *Journal of Mathematical Behavior*. No. 11, pp. 225–241.

Delazer, M. (2003). Neuropsychological Findings on Conceptual Knowledge of Arithmetic in *The Development of Arithmetic Concepts and Skills.* Baroody, A., J. & Dowker, A., (Eds.) Lawrence Erlbaum Assoc Inc.

Dimock, K. V., & Sherron, T. (2005). *Final Report of A Study of the Impact of Graphing Calculator Use on State Assessments.* Retrieved May 8, 2007, from http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/graphing_use_st_assmnts_sedl_2005.pdf

Donovan, M. S., & Bransford, J. D. (Eds.). (2005). *How students learn: history, mathematics, and science in the classroom.* Washington D.C.: The National Academy Press.

Donovan, M. S., Bransford, J. D., & Pellegrino, J. W. (Eds.). (1999). *How People Learn: Bridging Research and Practice.* Washington, DC: National Academy Press.

Douglas, R., G. (1986). *Towards a Lean and Lively Calculus* (MAA Notes 6), Mathematical Association of America, Washington, DC.

Driver, R. (1986). *Why Math?* Berlin, Germany: Springer Verlag.

Dugdale, S. (1993). Functions and Graphs: Perspectives on Student Thinking. In T., A., Romberg, E., Fennema and T., P., Carpenter (Eds.), *Integrating*

Research on the Graphical Representation of Functions. Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates, Ind.

Dunham, P., H. & Osborne, A. (1991). Learning How to See: Students' Graphing Difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Vol. 13, No. 4, pp. 35–49.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Paris: Lang.

Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sense for Functions. In *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.), MAA Notes 25, pp. 153–174. Washington DC: MAA.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivates and Integrals. In J., J., Kilpatrik & E., Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, MAA Notes 33, pp. 31–45. Washington DC: MAA.

Foxman, D., & Ruddock, G. (1984). Concepts and Skills: Line Symmetry and Angle. *Mathematics in Schools*, March 1984, 9–13.

Fuson, K. C., Kalchman, M., & Bransford, J. D. (2005). Mathematical Understanding: An Introduction. In M. S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: history, mathematics, and science in the classroom.* Washington D.C.: The National Academy Press.

Groves, S. (1994). *The Effect of Calculator Use on third and Fourth Graders' Computation and Choice of Calculating Device.* Paper presented at the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal.

Haapasalo, L., (2003). The Conflict between Conceptual and Procedural Knowledge: Should we need to understand in order to be able to do or vice-versa? In *Towards Meaningful Mathematics and Science Education.* Haapasalo, L. & Sormunen, K. 2003 (Eds.). Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association. University of Joensuu. Bulletins of the Faculty of Education 86.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical Thinking. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future* (pp. 147–172). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Hiebert, J. & Carpenter, T., P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (Ed. Grouws, D., A.) New York: Macmillan Publishing Company.

Hirsch, C., R., Weinhold, M., & Nichols, C. (1991). Trigonometry Today. *Mathematics Teacher.* No. 84(2), pp. 98–106.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of Complex Cartesian Graph Representing Situations – Studies and Teaching Experiences.* Doctoral dissertation, University of Nottingham.

Janvier, C. (1987d). Translation Processes in Mathematics Education. In *Problems of Representations in Mathematics Learning and Problem Solving.* Janvier, C., (Ed.) pp. 27–31. Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P., & Sweller, J. (2003). Expertise reversal effect. *Educational Psychologist*, No. 38, pp. 23–31

Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The Harmful Effects of Algorithms in Grades 1 - 4. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 130–140). Washington DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Kendal, M., & Stacey, K. (1997). Teaching Trigonometry. *Vinculum.* No.34(1), pp. 4–8.

Kerslake, D. (1977). The Understanding of Graphs. *Mathematics in School.* No. 6(2), pp. 56–63.

Kerslake, D. (1981). *Graphs.* In Children's Understanding of Mathematics Concepts: 11–16. Hart, K., M. (Ed.) London: John Murray.

Khoju, M., Miller, G., & Jaciw, A. (2005). *Effectiveness of Graphing Calculators in K-12 Mathematics Achievement.* Retrieved May 8, 2007, from http://education.ti.com/ sites/US/downloads/pdf/eei_graphingcalcreviewreport_2006.pdf

Kieran, C. (2003). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook on Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding + it up: Helping children learn mathematics.* Washington D.C.: National Academy Press.

Leinhardt, G., Zalslavsky, O. & Stein, M., K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research.* Vo. 60, No. 1, pp. 1–64.

Lindahl, M. (1996). Inlärning och erfarande. Ettåringars möte med förskolans värld. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Lovell, K. (1971). Some Aspects of Growth of the Concept of a Function. In *Piagetain Cognitive Development Research and Mathematical Education.* Rosskopf, M., F., Steffe, L., P. & Taback, S. (Eds.) pp. 12–33. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Mokros, J.R. & Tinker, R.F. (1987) The impact of microcomputer-based labs on children's ability to interpret graphs. *Journal of Research in Science Teaching,* Vol. 24, No. 5, pp. 369–383.

Markovits, Z., Eylon, B. & Bruckheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics.* No, 6(2), pp. 18–28.

Marnyanskii, I., A. (1975). Psychological Characteristics of Pupils' Assimilation of the Concept of a Function. In *Soviet Studies in the Psychology of Learning Mathematics.* Kilpatrick, J., Wirszup, I., Begle, E. & Wilson, J. (Eds.) Vo. 13. Pp. 163–172. Chicago: University of Chicago Press

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.

McDermott, L., Rosenquist, M. & van Zee, E. (1987). Student difficulties in Connecting Graphs and Physics: Examples from Kinematics. *American Journal of Physics*, No. 55(6), pp. 503–513.

McGowen, M., DeMarois, P. & Tall, D. (2000). *Using the Function Machine as a Cognitive Root.* Proceedings, PME-NA 22, pp. 255–261. Tuscon, Arizona.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research, *Mathematics Education Research Journal*, 10(3), 4–27.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington DC: U.S. Department of Education.

NCES. (1999). *TIMSS 1995.* http://nces.ed.gov/timss/timss95: National Center for Educational Statistics (NCES).

NCES. (2001). *Data from the National Assessment of Educational Progress* (NEAP). Washington, D.C.: National Center for Educational Statistics.

Orton, A. (1983). Students Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics.* No. 14, pp. 1–18.

Porter, A. C. (1989). A curriculum out of balance: The case of elementary school mathematics. *Educational Researcher*, No. 18(5), pp. 9–15.

Preece, J. (1983b). *A Survey of Graph Interpretation and Sketching Errors.* (CAL Research Group Tech. Rep. No. 34) Milton Keynes, England: Institute of Educational Technology, The Open University, Walton Hall.

Rittle-Johnson, B. & Wagner Alibali, M. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology.* Vol. 91. No. 1. pp. 175–189.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R., S. & Alibali, M., W. (2001). Developing Conceptual and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology.* No. 93. pp. 346–362.

Saxe, G. B., Gearhart, M., & Seltzer, M. (1999). Relations between classroom practices and student learning in the domain of fractions. *Cognition and Instruction*, No.17, pp. –24.

Selden, J., Mason, A. & Selden, A. (1989). Can Average Calculus Student Solve Non Routine Problems? *Journal of Mathematical Behavior*. No. 8, pp. 45–50.

Selden, J., Mason, A. & Selden, A. (1994). Even Good Calculus Students Can't Solve Non Routine Problems. *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning,* MAA Notes 33. Kaput, J., J. & Dubinsky, E. (Eds.), pp. 19–26. Washington DC: MAA.

Skemp, R., R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001). *Why Schools Matter: A Cross-National Comparison of Curriculum and Learning*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Schneider, M. (1993). A Way to Analyze Several Difficulties the Pupils Meet in Calculus. *Proceedings of the Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*, ICME-7, Québec, Canada, pp. 31–34.

Schoenfeld, A., H., Smith, J., P. & Arcavi, A. (1990). Learning: The Microgenetic Analysis of One Student's Evolving Understanding of a Complex Subject Matter Domain. In *Advances in Instructional Psychology*. Glaser, R. (Ed.) Vo. 4. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schwarzenberger, R., L., E. & Tall, D., O. (1978). Conflicts in the Learning of Real Number and Limits. *Mathematics Teaching*. No. 84, pp. 44–49.

Shultz, K., Clement, J. & Makros, J. (1986). *Adolescent Graphing Skills: A Descriptive analysis*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Sierpínska, A. (1985). Obstacles epistémologiques reltifs à la notion de limité. *Recherches en Didactique des mathematique*. No. 6(1), pp. 5–67.

Sierpínska, A. (1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. *Educational Studies in Mathematics*. No. 18, pp. 371–387.

Stacey, K. (1994). Arithmetic with a Calculator: What Do Children Need to Learn? In G. Bell, B. Wright, N. Leeson & J. Geake (Eds.), *Challenges in Mathematics Education: Constraints on Construction*. Lismore, New South Wales, Australia: Mathematics Education Research Group of Australia.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2000). *How Students Misunderstand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. Teachers College Press.

Steen, L., A. (1989). *Reshaping College Mathematics* (MAA Notes 13), Mathematical Association of America, Washington, DC.

Stein, M., K. & Leinhardt, G. (1989). *Interpreting Graphs: An analysis of early Performance and Reasoning*. University of Pittsburg, Learning Research and Development Center, PA.

Stevenson, H., W. & Stigler, J., W. (1992). *The Learning Gap*. New York: Simon & Schuster.

Stigler, J., W. & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: The Free Press.

Stodolsky, S., S. (1988). *The Subject Matter: Classroom Activity in Math and Social Studies*. Chicago: University of Chicago Press.

Suraweera, F. (2003). Enhancing the Quality of Learning and Understanding of the First Year Mathematics for Computer Science Related Majors. *ACM SIGCSE Bulletin archive*. Vol. 34, Issue, 4.

Swedner, H. (1978). *Sociologisk metod. En bok om kunskapsproduktion och förändringsarbete*. Lund: Liber Läromedel.

Tall, D. (1991). Intuition and Rigor: The role of Visualization in the Calculus. I Zimmermann, W. & Cunningham, S. (eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, DC. Pp. 105–119.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In *International Handbook of Mathematics Education*. Bishop, A., J. et al, (Eds.), pp. 289–325. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, No. 23, pp. 39–50.

Thomas, H., L. (1975). The Concept of Function. In *Children's Mathematical Concepts*. Rosskopf, M. (Ed.), pp. 145–172. New York: Columbia University, Teachers College.

Thompson, P., W. (1994). Students, Functions and the Undergraduate Curriculum. In *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1 Dubinsky, E., Schoenfeld, A., H. & Kaput, J., J. (Eds.), (Issues in Mathematics Education, Vo. 4, pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

Thompson, A. G., Philipp, R. A., Thompson, P. W., & Boyd, B. A. (1994). Calculational and Conceptual Orientations in Teaching Mathematics. In D. B. Aichele & A. R. Coxford (Eds.), *Professional Development for Teachers in Mathematics: Fifty-seventh Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 79–92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Trowbridge, D., E. & McDermott, L., C. (1980). Investigation of Student Understanding of the Concept of Velocity in one Dimension. *American Journal of Physics*. Vol. 48, Issue 12, pp. 1020–1028.

Tucker, T. (1988). *Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources* (MAA Notes 17), Mathematical Association of America, Washington, DC.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In *Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Moses, B., (Ed.), pp. 7–13. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (2004). *A Significant Amount of Algebra*. Retrieved April 13, 2007, from http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel05/jun2004/pdf/usiskin.pdf

Wade, 2006 Wade, W. R. (2006). Sound Off! A Dialogue between Calculator and Algebra. *Mathematics Teacher*, No. 99(6), pp. 391–393.

Wainer, H. (1992). Understanding Graphs and Tables. *Educational Researcher*. Vol. 21, No. 1, pp. 14–23.

Weber, K. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal*. Vol. 17, No. 3, pp. 91–112.

Vendlinski, T., P. (2009). Where to Begin: *Procedures and Concepts in Teaching Linear Equations*. Tillgänglig 2009-11-10 på https://center.uoregon.edu/ISTE/uploads/ NECC2009/KEY_43170550/Vendlinski_WheretoBeginProceduresandConceptsinTeachingLinearEquations_RP.pdf

Whitehead, A., N. (1948). *An Introduction to Mathematics*. New York: Oxford University Press. (Original Work Published 1911).

Widjaja, Y., B. & Heck, A. (2003). How a Realistic Mathematics Education Approach and Microcomputer-Based Laboratory Worked in Lessons on Graphing at an Indonesian Junior High School. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*. Vo. 26, No. 2, pp. 1–51.

Williams, S., R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*. No. 22, pp. 237–251.

Vinner, S. (1983). Concept Definitions, Concept Image and the notion of Function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. No. 14(3), pp. 293–305.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, No. 11, pp. 149–156.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definition of the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*. No. 20(4), pp. 356–366.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. London: The MIT Press.

Zalslavsky, O. (1987). *Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Functions*. Technion, Haifa, Israel.

Zalslavsky, O. (1988). *Revealing Conceptual Obstacles Through Non-Standard Problems*. A poster session at the tenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, DeKalb, IL.

TIMSS Advanced *(Trends in International Mathematics and Science Study)* undersöker elevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i gymnasieskolans sista årskurs (årskurs 3). I rapporten analyseras data från TIMSS Advanced 2008 och även motsvarande uppgifter i 1995 med syfte att se hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala matematiska begrepp. Svenska elevers resultatmönster jämförs även med resultatmönstren i den tidigare undersökningen 1995. I rapporten behandlas de matematiska områdena algebra, differential- och integralkalkyl och geometri. Analysen är genomförd och rapporten är skriven av Per-Olof Bentley, universitetslektor och filosofie doktor vid Göteborgs universitet, inom ramen för hans uppdrag i TIMSS Advanced-projektet.

Skolverket

www.skolverket.se