

Utökad undervisningstid i matematik

Hur en ökning av undervisningstiden kan användas
för att stärka elevernas matematikkunskaper.



Beställningsadress:
Fritzes kundservice
106 47 Stockholm
Telefon: 08-690 95 76
Telefax: 08-690 95 50
E-postadress: skolverket@fritzes.se
www.skolverket.se

Beställningsnummer: 12:1306
ISSN: 1103-2421
ISRN: SKOLV-R-378-SE

Omslagfoto: Martin Nauc er

Grafisk produktion: Matador Kommunikation AB
Tryck: Elanders Sverige AB
Upplaga: 1 300 ex

Stockholm 2012

Utökad undervisningstid i matematik

Hur en ökning av undervisningstiden
kan användas för att stärka elevernas
matematikkunskaper.

Förord

Skolverket fick den 22 december 2011 i uppdrag av regeringen att *kartlägga och analysera hur en ökning av den garanterade undervisningstiden i matematik i grundskolan och motsvarande skolformer med 120 timmar kan användas för att i så stor utsträckning som möjligt stärka elevernas matematikkunskaper*. Uppdraget redovisades den 28 september 2012.

Utökningen av undervisningstiden avser grundskolan, grundsärskolan, specialskolan och sameskolan. Avsikten är att stärka elevernas kunskaper i matematik. Den 9 juli 2012 lämnades även förslag till ändringar i skollagen (2010:800) som behövs för införandet av den utökade minsta garanterade undervisningstiden i ämnet matematik i de obligatoriska skolformerna. Samtidigt föreslår regeringen att antalet timmar för matematik inte får minskas i samband med skolans val.

I rapporten finns Skolverkets sammanfattning av området samt en bedömning av hur tiden kan användas för att i så stor utsträckning som möjligt stärka elevernas matematikkunskaper. Syftet med rapporten är att bedöma när, hur och till vad en utökad tid med 120 timmar i grundskolan och motsvarande skolformer kan användas på bästa sätt. Skolverket har låtit två forskare, Per-Olof Bentley och LiliAnn Kling Sackeryd, kartlägga aktuell forskning inom området tidsanvändning och framgångsrik matematikundervisning. Dessa två forskningsrapporter utgör ett underlag till rapporten och finns även som bilagor för att kunna läsas enskilt som fördjupning. Författarna ansvarar själva för innehållet i respektive forskningsrapport.

I rapporten beskrivs även andra faktorer som har betydelse för att en utökad undervisningstid i matematik ska, så långt det är möjligt, stärka elevernas kunskaper i matematik. Det berör bland annat styrning och ledning av verksamheten och därför finns, som bilaga, även ett konkret exempel på hur en utökad undervisningstid kan hanteras i en medelstor kommun.

Skolverkets förhoppning är att rapporten kommer att utgöra ett underlag för de beslut som kommer att tas i samband med att en utökad timplan i matematik införs. Rapporten riktar sig såväl till rektorer och lärare som till de tjänstemän och politiker som arbetar med utbildningsfrågor i grundskolan och motsvarande skolformer.

Stockholm, oktober 2012

Ragnar Eliasson
Avdelningschef

Helena Karis
Undervisningsråd

Innehåll

1. Sammanfattning	6
2. Utgångspunkter och genomförande	7
3. Grundskolans matematikundervisning.....	8
Tidsanvändning.....	8
Slutsatser angående tidsanvändningen	13
Matematikundervisningens utformning och innehåll.....	14
Slutsatser angående matematikundervisningen.....	20
4. Slutsatser.....	22
Skolverkets bedömning - användning av undervisningstiden	22
Utvärdera effekten av en utökad av undervisningstid	23
Införandet av en utökad undervisningstid.....	24
Bilaga 1: Framgångsrik undervisning med fokus på det matematiska innehållet.....	27
Bilaga 2: Framgångsrik undervisning med fokus på undervisningsformer.....	67
Bilaga 3: Exempel på hantering av timplaneförändring i en kommun	103

1. Sammanfattning

Skolverkets samlade bedömning är att den utökade undervisningstiden i matematik bör förläggas så tidigt som möjligt för att få den önskade effekten. Det innebär att de 120 timmarna bör fördelas på en timme i veckan under årskurserna 1–3. Det främsta argumentet för denna bedömning är den forskning som pekar på att den viktigaste faktorn för den fortsatta kunskapsutvecklingen i matematik är att grundlägga ett matematiskt kunnande tidigt.

Genom att utöka tiden i de lägre årskurserna har eleverna i högre utsträckning möjlighet att utveckla en tidig begreppsförståelse och förståelse för beräkningsstrategier. I rapporten framkommer att det är just inom dessa förmågor samt när det gäller kunskap inom områdena taluppfattning och tals användning, geometri och algebra som de största bristerna finns för elever i årskurs 4.

För att en utökad tid ska ge effekt bör undervisningens kvalitet också höjas. En framgångsrik matematikundervisning kännetecknas av att läraren har god kännedom om styrdokumentet, att det finns tydliga mål och syften med studierna samt en allsidig utvärdering och återkoppling. Viktiga faktorer för en framgångsrik matematikundervisning är en varierad undervisning samt hur kommunikation i klassrummet om matematiska fenomen sker. Viktiga faktorer för att en utökad tid ska ge effekt är tydlig styrning och ledning samt rektorns roll som pedagogisk ledare. Skolverket bedömer att det även finns ett behov av fortbildning för lärare, som bör omfatta både ämnesteoritiska och ämnesdidaktiska kunskaper.

Flera satsningar som Skolverket nu genomför förstärker de områden som anges ovan. I Lärarlyftet II ges lärare möjlighet att utöka sin behörighet genom ämnesteoritiska och ämnesdidaktiska studier. Inom Matematiklyftet skapas möjligheter för lärare att, genom kollegialt lärande med externt stöd, utveckla matematikundervisningens kvalitet.

Inom ramen för Matematiklyftet kommer även ett stöd för rektorns pedagogiska ledarskap i samband med lärarfortbildningen i matematik att ges. Både i rektorsprogrammet och i Rektorslyftet behandlas frågor om hur effektiv styrning och ledning samt hur rektorns pedagogiska ledarskap kan bidra till att utveckla undervisningen.

Slutligen konstaterar Skolverket att i ett målstyrt system bör huvudmannen följa upp och utvärdera att den utökade undervisningstiden i matematik har haft effekt. Detta sker genom att huvudmannen i det systematiska kvalitetsarbetet fokuserar såväl på undervisningens kvalitet och ändamålsenlighet som på elevernas måluppfyllelse. För att förstärka statens stöd kring det systematiska kvalitetsarbetet kommer Skolverket att utfärda allmänna råd under hösten 2012. Skolverkets allmänna råd om planering och genomförande av undervisningen utgör också ett viktigt stöd för huvudmannen i arbetet med att utveckla undervisningen i matematik.

2. Utgångspunkter och genomförande

Utgångspunkten för denna rapport är forskning och resultat från nationella och internationella mätningar och utvärderingar som rör elevers kunskaper i matematik och matematikundervisningens utformning. Det är framförallt material som publicerats under den senaste tioårsperioden. Vidare har gällande reglering av undervisning och undervisningstid samt aktuell statistik använts som underlag för rapporten.

Syftet med rapporten är att besvara regeringsuppdraget genom följande frågeställningar:

- När bör tiden förläggas?
- Vilka undervisningsformer är mer framgångsrika än andra?
- Vilket matematiskt innehåll bör prioriteras?

Två olika forskningsmiljöer har fått i uppdrag att sammanställa kunskapsläget utifrån olika empiriska underlag som utgångspunkt för rapporten. Valet av forskningsmiljöer grundar sig på forskarnas och institutionernas erfarenhet av nationella och internationella utvärderingar. Per-Olof Bentley, Göteborgs universitet, med erfarenhet av arbete med internationella utvärderingar, har sammanställt aktuell kunskap utifrån fördjupade analyser av TIMSS-resultat och resultat från nationella prov samt till detta relaterad didaktisk forskning (bilaga 1). Vid Umeå universitet bedrivs forskning med kursplanens förmågor i fokus. Flera av institutionens forskare var delaktiga i Skolinspektionens kvalitetsgranskning av matematikundervisningens ändamålsenlighet som genomfördes 2009¹. LiliAnn Kling Sackeryd vid Umeå universitet har sammanställt aktuell kunskap med utgångspunkt i kvalitetsgranskningen och till denna relaterad didaktisk forskning (bilaga 2).

Skolverket har i förberedelsearbetet samrått med Skolinspektionen, Specialpedagogiska skolmyndigheten (SPSM) och Sameskolstyrelsen i syfte att få en bred uppfattning om olika elevgruppers behov. Samråd har även genomförts med Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) i syfte att få en bredare uppfattning om erfarenheter och forskning när det gäller undervisning i matematik och tidsanvändning. I slutfasen av uppdraget har Sveriges kommuner och landsting (SKL) och Friskolornas riksförbund inbjudits för information om rapportens innehåll.

¹ Skolinspektionen (2009). "Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet" Rapport 2009:5, sid. 15.

3. Grundskolans matematikundervisning

I detta avsnitt sammanfattas nuläget av matematikundervisningen i grundskolan och motsvarande skolformer med utgångspunkt i forskarnas rapporter, i Skolverkets utvärderingar och statistik samt i aktuell reglering.

Inledningsvis beskrivs regleringen av undervisningstiden för ämnet matematik samt det som är känt om hur tiden för ämnet i realiteten fördelas och utnyttjas över årskurserna. Här redogörs också för tidsanvändningen i svenska skolan i ett internationellt perspektiv.

Därefter behandlas matematikundervisningens utformning och innehåll. Här beskrivs, med brett stöd i forskningen, vad som är kännetecknen på framgångsrik undervisning samt hur matematikundervisningen bör vara utformad för att måluppfyllelsen ska öka. Slutligen redogörs för vilket innehåll i undervisningen som är angeläget att lägga ytterligare fokus på för att stärka elevernas kunskaper i matematik vid en utökning av tiden.

Tidsanvändning

Undervisningstidens nuvarande reglering, omfattning och fördelning

Den sammanlagda garanterade undervisningstiden i varje ämne i grundskolan och motsvarande skolformer regleras i skollagen² respektive skolförordningen³.

Huvudmannen beslutar om fördelning av undervisningstiden mellan årskurserna efter förslag av rektorn, vilket regleras i skolförordningen⁴. I dag är den garanterade undervisningstiden i matematik för grundskolans årskurs 1–9 totalt 900 timmar. Motsvarande tid för grundsärskolans årskurs 1–9 är 885 timmar i nuvarande reglering. För sameskolans årskurs 1–6 är tiden 660 timmar och för specialskolans årskurs 1–10 är den garanterade undervisningstiden totalt minst 1 040 timmar.

I Utbildningsdepartementets remisspromemoria från den 9 juli 2012 föreslås en ökning med 120 timmar för alla obligatoriska skolformer⁵. För inriktningen träningsskola i grundsärskolan föreslås dock inte någon ökning av den garanterade undervisningstiden. I träningsskolan finns inte matematik som separat ämne, utan ryms inom ramen för ämnet verklighetsuppfattning. Förslaget omfattar även att den garanterade undervisningstiden i ämnet matematik i grundskolan inte kan minskas vid skolans val. Denna reglering finns redan idag i specialskolan och sameskolan, dock inte i grundsärskolan.

² Skollagen (2010:800). Bilaga 1.

³ Skolförordningen (2011:185). Bilaga 1, 2 och 3.

⁴ 9 kap. 4 § skolförordningen.

⁵ U2012/3839/S.

Tabell 1. Undervisningstid för grundskolan enligt timplanen.

Ämne	Antal timmar
Bild	230
Hem- och konsumentkunskap	118
Idrott och hälsa	500
Musik	230
Slöjd	330
Svenska eller svenska som andraspråk	1 490
Engelska	480
Matematik	900
Geografi, historia, religionskunskap och samhällskunskap	885
Biologi, fysik, kemi och teknik	800
Språkval	320
Elevens val	382
Totalt garanterat antal timmar	6 665
Därav skolans val*	600

*Vid skolans val får antalet timmar i timplanen för ett ämne eller en ämnesgrupp minska med högst 20%.

I det nuvarande mål- och resultatstyrda systemet kan huvudmannen organisera undervisningen på ett flexibelt sätt utifrån skolans egna förutsättningar och pedagogiska val. Inom ramen för den garanterade undervisningstiden finns det stora möjligheter att öka eller minska ett ämnes undervisningstid. Inom ramen för elevens val (382 timmar i grundskolan) respektive skolans val (600 timmar i grundskolan), finns möjligheter att redan idag utöka tiden för matematikundervisning. Elever som inte når lägsta godtagbara kunskapskrav har dessutom rätt till stödåtgärder, vilket i sig kan innebära en ötkad undervisningstid för dessa elever. Huvudmannen har även möjlighet att bestämma lokalt om en ötkad undervisningstid för alla elever, om det är möjligt utifrån till exempel skoldagens längd⁶.

Under en försöksperiod har ca 900 grundskolor arbetat utan att behöva tillämpa den nationella timplanen⁷. Försöksverksamheten är nu avslutad, men den huvudman som önskar kan ansöka hos Skolinspektionen om att få bedriva utbildning i grundskolan utan att tillämpa timplanen⁸. Skolinspektionen får besluta att utbildning får bedrivas utan att tillämpa timplanen om huvudmannen har godtagbara pedagogiska eller organisatoriska skäl för att bedriva sådan utbildning. Dessutom ska eleverna ges förutsättningar att nå de kunskapskrav

⁶ 7 kap. 17 § skolförordningen.

⁷ Timplanedelegationens slutsatser och förslag redovisas i slutbetänkandet. *Utan timplan – för målinriktat lärande* (SOU 2005:101).

⁸ 9 kap. 23 § skolförordningen.

som minst ska uppnås i samtliga ämnen och i övrigt utvecklas så långt som möjligt enligt utbildningens mål. De kommuner och fristående huvudmän som tidigare var med i försöksverksamheten behöver inte ansöka utan bara anmäla att de vill fortsätta att bedriva utbildning utan timplan⁹.

Någon säker statistik på nationell nivå finns inte för hur undervisningstiden i praktiken fördelas mellan årskurserna eller hur möjligheterna till omfördelning av timmar mellan ämnen inom skolans val utnyttjas. Därför råder en viss osäkerhet om elevernas reella undervisningstid. I samband med framtagande av ny läroplan för grundskolan och motsvarande skolformer gjorde Skolverket, på uppdrag av regeringen, en inventering av undervisningstid för respektive ämne¹⁰. Inventeringen låg till grund för konstruktionen av kursplaner och kunskapskrav. Skolverket vände sig till huvudmän och direkt till grundsärskolor för att samla in information. I tabell 2 och 3 visas hur undervisningstiden i matematik var fördelad över de olika årskurserna i grundskolan och grundsärskolan. Uppgifterna måste ses som relativt osäkra men kan ändå vara vägledande för att få en bild av den faktiska fördelningen av undervisningstiden.

Tabell 2. Skolverkets antaganden om undervisningstid, angivet i timmar, som låg till grund för konstruktionen av kunskapskraven i grundskolan.

	Åk 1–3	Åk 4–6	Åk 7–9	Garanterat
Matematik	280–320	280–320	260–300	900

Tabell 3. Skolverkets antaganden om undervisningstid, angivet i timmar, som låg till grund för konstruktionen av kunskapskraven i grundsärskolan.

	Åk 1–6	Åk 7–9	Garanterat
Matematik	600–640	340–380	980 ¹¹

I grundskolan är tiden relativt jämnt fördelad över årskurserna, dock med en något lägre undervisningstid i årskurserna 7–9. I grundsärskolan verkar det vara en något högre siffra för de högre årskurserna. Både Bentley och Kling Sackeryd pekar i sina rapporter på att andra gemensamma aktiviteter i skolorna troligen inkräktar på undervisningstiden så att den faktiska undervisningstiden i praktiken sannolikt blir mindre.

När det gäller sameskolan framkom vid samråd med Sameskolstyrelsen att eleverna ofta har haft mer tid i matematik än grundskoleeleverna som de möter i årskurs 7.

⁹ Skolförordningen (2011:185). Ikraftträdande och övergångsbestämmelser punkt 8–10. Enligt punkt 10 ska detta ske före utgången av 2011.

¹⁰ Delredovisning (2009-04-28) av regeringsuppdrag U2009/312/S.

¹¹ 1 juli 2011 ändrades grundsärskolans timplan till nuvarande 885 timmar.

Internationella jämförelser

I en internationell jämförelse av olika länders undervisningstid i matematik finns en problematik i jämförelsen mellan olika länders timplaner. Olika länders skolsystem skiljer åt på så sätt att undervisningstiden omfattas av olika aktiviteter och det kan därför vara svårt att finna gemensamma mått. Jämförelserna som gjorts kan avse den reglerade eller rekommenderade tiden i olika länders nationella eller regionala styrdokument och regelverk. De kan även baseras på enkätsvar om undervisningstid i samband med internationella utvärderingar. Den reglerade undervisningstiden omfattar den tid läraren undervisar eleverna, men det finns också andra aspekter av tid som innefattar läxor, läxhjälp och aktiviteter efter skolan. I olika länder finns olika praxis när det gäller hur denna tid räknas som undervisningstid. Därmed är det svårt att jämföra den reella undervisningstiden direkt mellan de olika systemen och resultaten blir osäkra. Ett visst informationsvärde finns dock i de jämförelser som gjorts, framförallt i samband med internationella undersökningar.

Den internationella indikatorn i OECD-rapporten *Education at a Glance*¹² innehåller information om hur stor andel av den totala undervisningstiden som ägnas åt ämnena i olika årskurser, uppgifter som inte Sverige kan redovisa. Generellt sett tyder dock tabell 2 (antaganden om fördelning av undervisningstid) på en liknande betoning av ämnena över årskurserna jämfört med OECD-länderna i genomsnitt.

I TIMSS 2007¹³ redovisas genomsnittet för totalt antal timmar undervisning i matematik per år samt för hur stor andel av den totala undervisningstiden per vecka som undervisningen i matematik i genomsnitt utgör (tabell 4). Uppgifterna bygger på enkäter till rektorer och lärare och en viss osäkerhet finns i resultatet, bland annat på grund av stort bortfall. Resultaten i årskurs 8 är i stort sett desamma som i TIMSS 2003, vilket kan ses som ett tecken på att resultaten ändå är relativt stabila och därmed antagligen inte alltför missvisande. Tabellen visar att de svenska eleverna i genomsnitt har färre timmar matematikundervisning än EU/OECD-länderna i genomsnitt. Störst skillnad är det i årskurs 4 där även andelen av den totala undervisningstiden som ägnas åt matematik per vecka är betydligt mindre.

¹² Education at a Glance 2011: OECD Indicators.
<http://www.oecd.org/dataoecd/61/29/48631122.pdf>.

¹³ Skolverket (2008). *TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Rapport 323.

Tabell 4. Genomsnittligt antal undervisningstimmar per år och procentandel av total undervisningstid per vecka som ägnas åt matematik, årskurs 4 och 8.

	Matematik Årskurs 4		Matematik Årskurs 8	
	Sverige ¹	EU/OECD	Sverige ¹	EU/OECD
Genomsnittligt antal undervisningstimmar per år	104	145	93	115
Andel (%) undervisningstid för ämnena av total undervisningstid per vecka	12 %	17 %	10 %	12 %

¹ Bortfall: data finns för mellan 70–85% av de svenska eleverna.
Källa: tabell 5.2 i Skolverkets huvudrapport 323, 2008, TIMSS 2007.

Lärarna som deltog i TIMSS 2007 fick också svara på hur stor andel av undervisningstiden som ägnades åt olika matematikinnehåll det året som undersökningen genomfördes. I årskurs 4 ägnades mest tid åt kunskapsområdet taluppfattning och aritmetik, vilket är i stort sett samma i Sverige som i övriga länder. I årskurs 8 i Sverige ägnades en förhållandevis större andel tid åt taluppfattning och aritmetik än i övriga EU/OECD-länder. En mindre andel tid ägnades åt kunskapsområdena algebra och geometri¹⁴.

I PISA 2009¹⁵ har de 15-åriga eleverna fått uppskatta och rapportera hur mycket undervisning de får i matematik. Det finns flera skäl att vara försiktig vid tolkningen av dessa data som avser egenrapporterad tid för en typisk vecka i samband med att PISA genomförs. Ett skäl är att antalet undervisningsveckor och lov kan variera mellan olika utbildningssystem. Ett annat skäl är att den tid som redovisas av 15-åringar är bara delvis indikatorer på undervisningstiden som formar elevernas erfarenheter av undervisning. Information om tidigare skolgång behövs för en mer komplett bild, liksom information om systemet – elever kanske lägger mer tid på extra undervisning i samband med examinationer. Vid jämförelser av elevsvar från PISA är det viktigt att komma ihåg att det är 15-åringar som tillfrågats, elever som i ländernas skolsystem kan höra hemma både i motsvarigheten till svensk grundskola och till gymnasieskola. Majoriteten av de svenska eleverna gick i årskurs 9. Genomsnittet för deltagande länder för matematik är 3 timmar och 34 minuter i veckan, i Sverige drygt 3 timmar och 12 minuter. I PISA har man utifrån elevenkäter också undersökt hur mycket elever utnyttjar undervisningsliknande aktiviteter efter skoltid, som till exempel läxhjälp och frivillig undervisning. Man kan utläsa att andelen elever som deltar i dessa aktiviteter räknat i timmar per vecka skiljer sig mellan Sverige och OECD-länderna i övrigt.

¹⁴ Beskrivs närmare i avsnitt 3.

¹⁵ OECD (2010). *PISA 2009 Results: What Makes a School Successful? Resources, policies and practices. Volume IV.* <http://browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/browseit/9810101E.PDF>
Tabellerna IV.3.16a-b och IV.3.17a-b.

Tabell 5. Andel elever som deltar i undervisningsliknande aktiviteter efter skoltid, timmar per vecka i ämnet matematik.

	Sverige	OECD
4 timmar eller mer per vecka	1,7	7,1
Mindre än 4 timmar per vecka	13,9	26,9
Deltar inte	84,4	66,0

Källa: (PISA 2009) IV.3.17a–b.

Det är svårt att finna resultat, både i internationell och i svensk forskning, som pekar på ett entydigt samband mellan utökad tid och högre resultat. Enligt en rapport från OECD baserad på PISA-data¹⁶ är det framförallt kvaliteten på lektionerna som påverkar resultaten. Att bara öka tiden i skolan, tiden till undervisningsliknande situationer utanför skolan eller tiden till individuella studier leder inte automatiskt till bättre resultat. Detta stärks också av Bentelys och Kling Sackeryds rapporter. Bentley problematiserar sambandet mellan undervisningstid och elevprestationer. Han menar att vad som varit effektiv undervisningstid inte behöver överensstämma med den garanterade undervisningstiden:

Visserligen visade lärarenkäten i TIMSS att eleverna i Sverige hade minst undervisningstid jämfört med övriga länder inom EU men det gick inte att finna något statistiskt samband (korrelation eller regression) mellan undervisningstid och elevprestationer, inte heller verkade det ha någon avgörande betydelse om ett moment behandlats eller ej för elevernas förmåga att lösa motsvarande uppgifter¹⁷.

Förklaringen till detta, menar Bentley, kan finnas i att gemensamma genomgångar saknats och att eleverna har varit hänvisade till lärobokens innehåll utanför lärarens kontroll.

Slutsatser angående tidsanvändning

Skolverket har idag en osäker bild av den faktiska undervisningstiden och hur tiden är fördelad mellan olika årskurser. Regleringen av undervisningstiden i matematik tillåter i dagsläget en lokal variation av varje skolenhets och varje elevs reella undervisningstid. Detta är intentionen med den mål- och resultatstyrda verksamheten.

Trots svårigheten med att få en tydlig bild av den faktiska undervisningstiden för svenska elever, pekar dock data för årskurs 4 och 8 i internationella studier på att de svenska eleverna har färre timmar matematik och att det är en större skillnad i årskurs 4 än i årskurs 8. Även andelen av den totala undervisningstiden som ägnas åt matematik per vecka är betydligt mindre i Sverige än i EU/OECD-länderna. Det framkommer också att tiden inte ensam är en

¹⁶ OECD (2011). *Quality Time for Students. Learning in and out of school.*

¹⁷ Bilaga 1, sid. 33.

avgörande faktor för ett bra resultat. För att en utökning av tid ska ha effekt är det viktigt hur tiden används och vilket innehåll som behandlas.

De internationella jämförelserna visar att i årskurs 4 ägnas, både i Sverige och i övriga OECD-länder, mest tid åt kunskapsområdet taluppfattning och aritmetik. I årskurs 8 i Sverige ägnades större andel tid åt taluppfattning och aritmetik och mindre andel tid åt algebra och geometri än i övriga länder.

Slutligen konstateras att svenska elever deltar i undervisningsliknande aktiviteter efter skoltid i mindre utsträckning än OECD-genomsnittet.

Matematikundervisningens utformning och innehåll

Internationella och nationella utvärderingar, mätningar och forskning har bidragit till ökade kunskaper om vad som kännetecknar en framgångsrik undervisning, både generellt men också specifikt i matematik. Genom analyser av elevlösningar i TIMSS, PISA och nationella ämnesprov har kunskapen ökat om vilka innehållsliga områden som behöver förstärkas i undervisningen.

Nedan beskrivs vad forskningen menar är framgångsrik undervisning samt styrdokumentet som förutsättning för undervisningen. Därefter beskrivs några centrala aspekter av undervisningen som enligt forskning är väsentliga för elevernas kunskapsutveckling i matematik. Slutligen redovisas vilket matematiskt innehåll som bör prioriteras för att få en ökad måluppfyllelse.

Matematikundervisningen

Både internationell och nationell forskning visar att kvaliteten i undervisningen är en framgångsfaktor som är avgörande för elevens kunskapsutveckling. John Hatties metastudie *Visible learning*¹⁸ pekar på den enskilde lärarens förmåga att undervisa som den viktigaste faktorn för elevernas prestationer. Skolverkets rapport som sammanfattar svensk forskning¹⁹, utvärderingarna av Matematiksatsningen 2009–2011²⁰ samt andra rapporter²¹ visar att lärarens kompetens är nära sammankopplad med både förhållningssätt och undervisningens genomförande.

Sammantaget visar dessa rapporter att en central framgångsfaktor är lärarens förmåga att följa elevernas kunskapsutveckling och lärande, dvs. att synliggöra lärandeprocessen både för sig själv och för eleven. Det kan till exempel omfatta

¹⁸ Hattie, J. A. C. (2008). *Visible learning: a synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*, London New York, Routledge.

¹⁹ Skolverket (2009). *Vad påverkar resultaten i svensk grundskola?* Kunskapsöversikt.

²⁰ Skolverket (2011). En utvärdering av matematiksatsningen. Rapport 366, 367 och 368.

²¹ Skolverket (2006). *Lusten och möjligheten* Rapport 282, sid. 8. Skolverket (2008). *Skolverkets lägesbedömning 2008: Förskoleverksamhet, skolbarnomsorg, skola och vuxenutbildning*. Rapport 324, sid. 79.

Högskoleverket (2008). *Uppföljande utvärdering av lärarutbildningen* Rapport 2008:8R, sid. 5 ff.

lärarens förmåga att vara medveten om avsikten med undervisningen, att ha kunskaper om de konkreta målen, att läsa av den givna klassrumssituationen och att kunna variera undervisningen samt anpassa den till elevernas kunskaper och intresse. En betydelsefull aspekt av varierad undervisning är att använda sig av olika bedömningsformer och situationer för bedömning. Formativ bedömning²² och ömsesidig återkoppling mellan lärare och elev ger högre kvalitet på undervisningen tillsammans med den summativa, sammanfattande bedömningen. Även lärarens förväntningar på framsteg hos eleverna, oavsett kunskapsnivå, har visat sig vara en framgångsfaktor för lärande.

Att dessa uppfattningar är allmängiltiga framkommer speciellt i utvärderingen som gällde satsningar riktade mot grundsärskolan. Frågan om det finns skillnader mellan grundsärskolan och grundskolan vad gällde framgångsrik undervisning besvarades i sammanfattningen:

Utifrån tidigare forskning saknas belägg för att principer för framgångsrik undervisning inom det matematiska området skulle skilja sig åt på något avgörande sätt beroende på om eleverna har en utvecklingsstörning eller ej²³.

Styrdokumentet och undervisningen

Både Bentley och Kling Sackeryd pekar på betydelsen av läroplanens intentioner, värdegrund och kunskapsyn för undervisningens kvalitet. De betonar i sina rapporter att det är av vikt att lärarna kan förhålla sig till förmågorna i de långsiktiga målen i kursplanen i matematik och de konsekvenser dessa får för undervisningen. En nödvändighet för undervisningens kvalitet är att se både de matematiska förmågorna och det centrala innehållet som delar av en helhet, konstaterar Kling Sackeryd och stödjer sig på NCM/UFMs rapport²⁴ som gjordes i samband med Skolinspektionens kvalitetsgranskning. Bentley menar att de matematiska förmågorna i kursplanen signalerar ett synsätt (belief system) där fokus finns på matematiska begrepp och deras samband och där resonemangs- och kommunikationsförmågan också beaktas²⁵.

I rapporter från Skolverket²⁶ och i Skolinspektionen²⁷ framkommer att kursplanen verkar ha en svag eller obefintlig styrning av lärares undervisning. Den

²² Formativ bedömning kan definieras som all bedömning som hjälper eleverna att lära sig och utvecklas.

²³ Skolverket (2011). *Matematikundervisning i grundsärskolan*. En utvärdering av matematik-satsningen. Rapport 368, sid 8.

²⁴ NCM /UFM. (2009). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet*. Göteborg: NCM, nationellt centrum för matematikutbildning.

²⁵ Bilaga 1, sid. 35 och 36.

²⁶ Skolverket (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik*, Rapport 221; Skolverket (2004). *Nationella utvärderingen av grundskolan 2003*, Rapport 250; Skolverket (2006) *Lusten och möjligheten*, Rapport 282.

²⁷ Skolinspektionen (2009). *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*, Rapport 2009:5, sid. 15.

i särklass vanligaste arbetsformen är att eleverna sitter och arbetar var för sig med lärobokens uppgifter, s.k. enskild räkning, och att läraren går runt och hjälper dem. Lärare i matematik är också de lärare som i minst utsträckning anger att de knyter an undervisningen till samhället och livet utanför skolan. Rapporterna visar även att elever som har lätt för matematik anser att det generellt är för lite utmaningar och för mycket upprepningar i matematikundervisningen. Konsekvensen av detta kan bli att eleverna inte får undervisning mot samtliga mål i kursplanen och att läraren inte heller bedömer och betygsätter utifrån samtliga mål.

Sedan dessa rapporter publicerades har omfattande reformer av skolans styrdokument genomförts. Hösten 2011 infördes en ny läroplan (Lgr 11) för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet²⁸ med tillhörande kunskapskrav²⁹, med avsikt att förtydliga undervisningens mål. Även för grundskolan, specialskolan och sameskolan har nya läroplaner införts med samma avsikt. Tydligheten omfattar speciellt kursplanens struktur, där rubrikerna syfte, centralt innehåll och kunskapskrav har införts. Den nya kursplanen i matematik innebär en ökad konkretisering av det matematiska innehållet jämfört med tidigare. Det finns även ett tydligt fokus på tidig begreppsutveckling liksom utveckling av resonemangs- och kommunikationsförmågan samt problemlösningens förmågan. Den nya läroplanen förväntas på så sätt bidra till en förbättrad måluppfyllelse hos eleverna.

Läroplanen och speciellt kursplanen bestämmer vad undervisningen i ämnet ska syfta till och vilket innehåll som ska tas upp i undervisningen. För att utöva sin profession behöver läraren vara väl förtrogen med intentionen och innehållet i läroplanen samt med den värdegrund och kunskapssyn som läroplanen förmedlar. Vid implementeringsarbetet av Lgr11 gavs ett generellt och ämnesanknutet stöd, bland annat allmänna råd³⁰ och kommentarmaterial³¹. Detta material förväntas stärka både lärares förtrogenhet med den nya läroplanen och ge stöd för genomförandet av undervisningen med utgångspunkt i Lgr 11.

Varierad undervisning

Förutom kunskap om läroplanens intentioner är varierad undervisning en faktor som skapar möjligheter för en god kunskapsutveckling hos eleven. Varierad undervisning handlar om att både arbetssätt, arbetsformer och innehåll är varierat och anpassat efter individen och gruppen. Att utveckla kunskaper om matematik och matematikens användning är en ständigt pågående process där

²⁸ Förordning (SKOLFS 2010:37) om läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet.

²⁹ Skolverkets föreskrifter (SKOLFS 2011:19) om kunskapskrav för grundskolans ämnen.

³⁰ Skolverket (2011). *Allmänna råd för planering och genomförande av undervisningen*.

³¹ Skolverket (2011). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*.

eleverna successivt utvecklar en förtrogenhet med begrepp, metoder och uttrycksformer. Kling Sackeryd tar i sin rapport upp att läraren i sin undervisning måste ha fokus på elevens egna tankestrategier och kontinuerligt följa upp och återkoppla elevernas resultat och prestationer samt uppmuntra och ge eleverna möjlighet att aktivt delta i undervisningsverksamheten³². Med ett varierat arbetsätt använder läraren även en variation av läromedel som böcker, konkretiserande material och samtal för att i undervisningen stärka elevernas kunskapsutveckling i matematik. En för stark läroboksstyrning kan medverka till att undervisningen inte är tillräckligt varierad. Forskning³³ pekar på vikten av att lärare är kritiska till de läroböcker de använder. En god kompetens hos lärarna, både ämnesteoretiskt och didaktiskt ger dem förutsättningar att på ett aktivt sätt förhålla sig till läroböckerna och använda dem som stöd för undervisningen.

Bentley påpekar i sin genomgång på att undervisningen i Sverige ofta har en procedurell inriktning, vilket bland annat visar sig i att elevernas beräkningsprocedurer är väl inövade men att eleverna har bristfällig förståelse för olika beräkningsstrategier³⁴. Detta leder till att eleverna inte kan använda rätt strategier i nya situationer. Om undervisningen i stället är konceptuellt inriktad med fokus på förståelse av begrepp och procedurer, har eleverna större möjligheter att överföra sina matematiska kunskaper till nya situationer. Slutsatsen är att den konceptuellt inriktade undervisningen bör stärkas i förhållande till den procedurellt inriktade undervisningen.

Enligt båda forskarnas rapporter är slutligen kommunikationen i klassrummet en viktig faktor som kan skapa möjligheter för en god kunskapsutveckling hos eleven. Kling Sackeryd beskriver mer i detalj viktiga aspekter av kommunikationen i matematikundervisningen i sin rapport³⁵. Sammanfattningsvis kan sägas att samtal är en effektiv väg att utveckla de matematiska förmågorna. Att både läraren och eleven är aktiva i samtalet är av stor vikt för ett matematiklärande med processen i centrum. Viktiga aspekter av samtalet är elevens svar på frågor och hur läraren tar hand om innehållet i svaret, vilket är ett sätt att arbeta formativt. Det önskvärda samtalet är en dialog där elevsvaren används som utgångspunkt för gemensamma undersökningar, nya frågor och nya kunskaper.

På regeringens uppdrag genomför Skolverket nu en fortbildningssatsning för lärare i matematik, Matematiklyftet. Syftet med fortbildningen är att förbättra elevernas kunskaper i matematik och därmed öka deras måluppfyllelse. Matematiklärarna får möjligheter att utveckla sina didaktiska kunskaper i den riktning som är beskriven ovan och på så sätt stärka kvaliteten i undervisningen. Fortbildningen har sin utgångspunkt i det så kallade kollegiala

³² Bilaga 2, sid. 83.

³³ Johansson, M. (2006). *Teaching Mathematics with Textbooks*, Luleå tekniska universitet.

³⁴ Bilaga 1, sid. 29 och 34.

³⁵ Bilaga 2, sid. 75–80.

lärandet, med lärare som lär av varandra. Andra delar av Matematiklyftet är utbildning av särskilda matematikhandledare och av rektorer. Matematikhandledarna utbildas för att vara ett stöd i det kollegiala lärandet. Materialet till fortbildningen, som tas fram i samverkan med universitet och högskolor, kommer framför allt att finnas på en speciellt framtagen webbplats – lärportalen för matematik.

Matematiskt innehåll i undervisningen

Det som är känt om elevers kunskaper i matematik i dag kommer framförallt från resultat på de nationella ämnesproven i åk 3, 5 och 9 samt från de internationella utvärderingarna TIMSS och PISA. Dessa resultat kompletterar varandra i beskrivningen av elevers matematikkunskaper. Ämnesproven prövar målen i kursplanen medan de internationella studierna mäter mot egna ramverk som refererar till deltagande länders kursplaner. De internationella studierna kan tack vare sin konstruktion ge en mera detaljerad innehållslig information om elevers kunskaper och hur dessa utvecklas över tid. Kunskapen om vilket innehåll som behöver förstärkas i matematikundervisningen har ökat genom analys av resultaten från ovanstående utvärderingar och mätningar samt relaterad forskning.

Nedan finns en kort sammanfattning av resultat vad gäller kognitiva förmågor men också vilket kunnande om det matematiska innehållet som eleverna i olika årskurser visar i olika mätningar.

I TIMSS identifieras tre kognitiva förmågor, att tillämpa sin kunskap och begreppsförståelse för att lösa ett problem, att ha kännedom om ämnesfakta, begrepp, verktyg och procedurer samt att resonera i en ny situation, vilket alla är förmågor som har sin motsvarighet i kursplanen. Resultaten i TIMSS 2007 visar att svenska elever, både i årskurs 4 och 8, är sämre än genomsnittet när det gäller förmågan att kunna tillämpa sin kunskap och begreppsförståelse för att lösa ett problem. När det gäller elevers kännedom om ämnesfakta, begrepp, verktyg och procedurer presterar svenska elever i årskurs 4 lägre än genomsnittet, medan elever i årskurs 8 presterar ungefär i nivå med genomsnittet. Svenska elever i årskurs 4 är förhållandevis bra på att resonera i en ny situation, där resultaten ligger på samma nivå som övriga länder. Däremot presterar svenska elever i årskurs 8 lägre än genomsnittet när det gäller att resonera i en ny situation.

Både TIMSS-resultat och resultat från ämnesproven pekar ut samma bristområden vad gäller det matematiska innehållet, nämligen metoder för beräkningar och geometri.

Ämnesproven i matematik i årskurs 3 har genomförts varje år sedan 2009. Den provdel i ämnesprovet 2009 som de flesta elever klarade provade elevernas kunskaper i att dela upp tal och helheter. Sämst resultat har eleverna haft på de provdelar som handlar om area och volym, skriftliga räknemetoder och metoder

för huvudräkning³⁶. Dock verkar eleverna ha lyckats allt bättre inom dessa områden på senare års prov. Anledningen kan vara att lärarna har blivit alltmer förtrogna med målen i årskurs 3 i matematik som började gälla den 1 juli 2008.

Resultaten i TIMSS 2007 för elever i årskurs 4 visar att de svenska eleverna uppnår ett sämre resultat än genomsnittet i innehållsområdena taluppfattning och aritmetik samt geometriska figurer och mätningar. Anmärkningsvärt är att, enligt lärarna som deltog i TIMSS 2007, mest tid ägnades just åt taluppfattning och aritmetik i årskurs 4.

Fram till och med 2010 har skolorna genomfört ämnesprov i årskurs 5. År 2009 och 2010 genomfördes samma ämnesprov i matematik, vilket gör att dessa resultat kan jämföras. Resultaten från ämnesprovet 2010 är i stort sett oförändrade jämfört med föregående läsår. Eleverna uppvisar sämst resultat på de delprov som prövar mätning av längd, area och skala³⁷.

Svenska elever i årskurs 8 presterar enligt TIMSS 2007 lägre resultat i algebra och i geometri än genomsnittet. Enligt lärarna som deltog ägnas en större andel tid åt taluppfattning och aritmetik i årskurs 8 i Sverige än övriga länder medan en mindre andel tid ägnas åt algebra och geometri, vilket kan förklara det sämre resultatet för årskurs 8 inom detta område.

I rapporten om nationella ämnesprovet 2009³⁸ för årskurs 9 i grundskolan och årskurs 10 i specialskolan analyseras en rad typiska elevlösningar och fel-svar. Dessa visar bland annat att eleverna är mycket säkra på att lösa enkla ekvationer, men att de har större problem med att multiplicera eller dividera med decimaltal.

Bentley pekar i sin rapport på några väsentliga områden och ett matematiskt innehåll som utgör kritiska områden i kunskapsutvecklingen. Bentley menar att dessa områden är nödvändiga grunder för fortsatt kunskapsutveckling. Kunskapsluckor inom de här områdena kan ha avgörande betydelse för elevers kunskapsutveckling i matematik. Exempelvis är uppfattningen av likhetstecknet avgörande för elevers förmåga att lösa ekvationer. En bristande förståelse för likhetstecknets innebörd, som introduceras i de lägre årskurserna, kan blockera elevens fortsatta utveckling³⁹. Bentley pekar på att flera av elevernas misstag och missuppfattningar etableras under de tidiga årskurserna och verkar finnas kvar under en lång tid⁴⁰. Djupanalyser av TIMSS-resultat och elevlösningar från ämnesprov i matematik har visat att svenska elevers misstag ofta kan hänföras till brister inom dessa områden. En närmare beskrivning av de kritiska

³⁶ Skolverkets lägesbedömning (2011). Del 1 – Beskrivande data.

³⁷ Tillgänglig 12 juli 2011 på

http://www.skolverket.se/statistik_och_analys/2.1862/2.4290/2.1512.

³⁸ Skolverket (2010). *Ämnesproven 2009 i grundskolans årskurs 9 och specialskolans årskurs 10*.

³⁹ Bilaga 1, sid. 51 och 54.

⁴⁰ Bilaga 1, sid. 39.

områdena finns i Bentleys rapport⁴¹. Sammanfattningsvis pekar forskningen på att flera av svenska elevers misstag kan förklaras utifrån brister inom dessa områden. Det omfattar utveckling av förståelse för talbegreppet och utveckling av talraden som viktiga faktorer för fortsatt utveckling av aritmetiska kunskaper. Det omfattar vidare att kunna tillämpa beräkningsstrategier samt förståelse för variabelbegreppet och begreppet likhet, vilket är centralt för att utveckla algebraiskt kunnande.

Dessa olika områden återfinns i hög grad i det centrala innehållet för de tidigare årskurserna och till viss del i det centrala innehållet för de högre årskurserna, framförallt när det gäller det algebraiska kunnandet.

Slutsatser angående matematikundervisningen

Skolverkets bild av matematikundervisningen i Sverige grundar sig på nationella och internationella mätningar och utvärderingar samt forskning som publicerats under den senaste tioårsperioden. Dessa visar på ett behov av att utveckla undervisningens kvalitet.

Forskningen pekar på några generella aspekter av undervisningens kvalitet, bland annat lärarens förmåga att synliggöra lärandeprocessen och lärarens förväntningar på framsteg hos eleverna.

En framgångsrik matematikundervisning kännetecknas av tydliga mål och syften med studierna samt en allsidig utvärdering och återkoppling. Läraren har god kännedom om styrdokumentet, och planering och undervisning utgår från dessa. En nödvändighet för undervisningens kvalitet är att uppfatta både de matematiska förmågorna och innehållsmålen som centrala delar av en helhet.

Två viktiga aspekter i undervisningens genomförande, i syfte att skapa möjligheter för en god kunskapsutveckling, är en varierad undervisning och hur kommunikationen sker i klassrummet. Undervisningen bör präglas av ett reflektivt arbetssätt samt gemensamma samtal om matematiska fenomen och matematiska problem.

Det som vidare framkommit är att matematikundervisningen bör förändras så att den konceptuellt inriktade undervisningen, med förståelse av metoder och begrepp i fokus, stärks relativt den procedurellt inriktade undervisningen.

Både läroplansreformen och fortbildningsinsatserna inom Matematiklyftet förstärker och ger förutsättningar att utveckla undervisningen i den angivna riktningen.

Genom analys av elevers lösningar i internationella studier och nationella ämnesprov har kunskapen ökat om brister i elevernas matematiska kunnande och därmed vilka innehållsliga områden som behöver förstärkas i undervisningen.

⁴¹ Bilaga 1, sid. 41–53.

För de tidiga skolåren handlar det om begreppsuppfattning, förståelse för beräkningsstrategier, tillämpning av begrepp och procedurer samt förmåga att lösa problem. Det matematiska innehåll som behöver förstärkas omfattar taluppfattning, skriftliga räknemetoder och metoder för huvudräkning, algebra, mätning och geometri.

De områden som behöver förstärkas i undervisningen i de senare skolåren omfattar problemlösningsförmåga och resonemangsförmåga. Det matematiska innehållet som bör förstärkas omfattar beräkningar med tal i decimalform, likhetstecknets innebörd, variabelbegreppet samt mätningar och beräkningar av area och skala.

4. Slutsatser

I första delen presenteras Skolverkets bedömning av när, hur och till vad en utökad tid med 120 timmar i matematik bör användas. De viktigaste argumenten för detta redovisas i avsnittet.

Därefter behandlas behovet av att beskriva och följa upp effekten av en utökad undervisningstid och hur detta kan genomföras.

Sista delen behandlar andra faktorer, bland annat lärares fortbildning och rektors roll, som är av vikt vid införandet av en utökad tid och en utveckling av undervisningen. Här beskrivs vilket stöd som finns och som det kan finnas behov av.

Skolverkets bedömning – användning av undervisningstiden

Skolverkets samlade bedömning är att den utökade undervisningstiden bör förläggas så tidigt som möjligt för att få den önskade effekten. Det innebär att de 120 timmarna bör fördelas på en timme i veckan under årskurserna 1–3.

Det viktigaste skälet för denna bedömning är den forskning som pekar på vikten av tidig och återkommande varierad undervisning. Att grundlägga ett matematiskt kunnande tidigt är den viktigaste faktorn för att stärka elevens fortsatta kunskapsutveckling i matematik. Genom att förlägga tiden till de första skolåren frigörs samtidigt tid för elevernas kunskapsutveckling i de senare åren. Den tid som idag ofta används i de senare årskurserna för att repetera och fylla tidiga kunskapsluckor, inom till exempel algebra, kan då användas för undervisning om det innehåll som årskurserna 7-9 är avsett för.

För att den utökade tiden ska få effekt krävs att undervisningens kvalitet samtidigt höjs. Hög kvalitet på matematikundervisningen kännetecknas av att det finns tydliga mål och syften för studierna samt en allsidig utvärdering och återkoppling till undervisningen och studierna. Undervisningen är varierad och anpassad för att möta olika behov och förutsättningar så att elevens resultat inte blir alltför beroende av vilken lärare han eller hon har. Gemensamma samtal om matematiska fenomen dominerar lektionerna och mindre tid avsätts till ensamt räknade i läroboken. Hög kvalitet kännetecknas även av att undervisningen är förståelseinriktad och präglas av ett reflektivt arbetssätt.

Strävan är också att en undervisning bedrivs där läraren ser både de matematiska förmågorna och det centrala innehållet som centrala delar av en helhet. I forskarnas rapporter poängteras att undervisningen genomgående i högre grad måste behandla alla matematiska förmågor i de långsiktiga målen. Det framkommer att resonemangsförmåga, kommunikationsförmåga och pro-

blemlösningsförmåga speciellt bör framhållas i undervisningen för att stärka elevens kunskapsutveckling i ett långsiktigt perspektiv.

Genom att utöka tiden i de lägre årskurserna ges eleverna möjlighet att utveckla en tidig begreppsförståelse och förståelse för beräkningsstrategier. I forskarnas rapporter framkommer att det är just dessa förmågor samt kunskap inom områdena taluppfattning och tals användning, geometri och algebra som uppvisar de största bristerna bland elever i årskurs 4. För elever i årskurs 8 återfinns brister inom samma områden som i årskurs 4, dvs. inom framförallt kunskapsområdena taluppfattning och tals användning, algebra och geometri. I årskurs 8 visar eleverna sämre resultat även när det gäller resonemangsförmåga och när det handlar om det matematiska innehållet beräkningar med tal i decimalform samt likhetstecknets innebörd och variabelbegreppet. Grunder inom de sistnämnda områdena läggs i de tidigare årskurserna och med utökad tid i årskurs 1-3 ökar elevernas möjligheter att utveckla dessa matematikkunskaper på lång sikt.

Utvärdera effekten av en utökad undervisningstid

I ett målstyrt system bör huvudmannen kunna följa upp och utvärdera om den utökade undervisningstiden i matematik har haft effekt, företrädesvis inom ramen för det systematiska kvalitetsarbetet. Avsikten med en utökad undervisningstid med 120 timmar är att stärka elevernas kunskaper och varje huvudman bör kunna redovisa hur en utökad garanterad undervisningstid har påverkat verksamheten.

Huvudmannen ansvarar för att utbildningen genomförs enligt skollagen och andra författningar och därmed också att undervisningen omfattas av den minsta garanterade undervisningstiden. Det är också huvudmannens ansvar att eleverna inte får för långa arbetsdagar och att arbetet blir jämnt fördelat. I dag beslutar huvudmannen efter förslag från rektorn hur undervisningstiden förläggs⁴².

Skolverkets bedömning pekar på när, hur och till vad en utökad tid bör användas. Huvudmannen kan dock utifrån lokala förutsättningar ha anledning att göra en annan bedömning av när den utökade tiden ska förläggas. Undervisningstiden kan till exempel redan vara utökad jämfört med den garanterade undervisningstiden och förstärkt i de lägre årskurserna. Vid införande av en utökad undervisningstid behöver därför varje rektor och huvudman göra en översyn av hur undervisningstiden är fördelad över årskurserna i respektive ämne. En slutsats som dras i den redovisning av tänkbara konsekvenser, som återfinns i bilaga 3, är att det är av stor vikt att huvudmannen har en god uppfatt-

⁴² 9 kap. 4 § skolförordningen.

ning om hur undervisningstiden i realiteten utnyttjas både före en utökning av tiden och efter det att tiden utökats.

Syftet med en utökad undervisningstid är att nå en högre måluppfyllelse. I forskarnas rapporter framkommer tydligt vikten av att bedriva en undervisning av hög kvalitet för att nå detta. Huvudmannens och skolenhetens systematiska kvalitetsarbete bör därför fokusera på undervisningens kvalitet och ändamålsenlighet såväl som på elevernas måluppfyllelse över tid.

Frågor som berör hur undervisningen bedrivs och om den är av god kvalitet kan till exempel vara: Hur används tiden? Vilket innehåll behandlas i undervisningen? Hur sker kommunikationen i klassrummet? Är det matematiska innehållet i fokus i undervisningen? Vilka kännetecken på kvalitativ undervisning finns? Vidare bör en konsekvensanalys göras med utgångspunkt i iakttagelserna: Behöver några förändringar göras? Vad i så fall? Detta är frågeområden som behandlas i det systematiska kvalitetsarbetet, vilket Skolverket tydliggör i de kommande allmänna råden. Till de allmänna råden kommer även stödmaterial att ges ut.

När det gäller elevernas måluppfyllelse finns redan idag ett flertal nationella och internationella mätningar och utvärderingar (nationella ämnesprov, betygsstatistik, TIMSS och PISA) som kan ge information om måluppfyllelse på både nationell nivå, skolenhets- och gruppnivå samt på individuell nivå.

Införandet av en utökad undervisningstid

För att en utökning av undervisningstiden ska bli effektiv krävs ett arbetssätt med fokus på att utveckla de matematiska förmågorna i undervisningen och en fördjupad ämnesteoritisk och ämnesdidaktisk kompetens hos läraren. Det handlar inte enbart om att förändra undervisningen under den utökade undervisningstiden på 120 timmar, utan förändringen har även bäring på all undervisning i matematik. Att utveckla kvalitet i undervisningen handlar i grunden om lärarens möjligheter att utveckla sin förmåga att undervisa, vilken är nära förknippad med både förhållningssätt och undervisningens genomförande samt med goda ämnesteoritiska kunskaper.

I och med införandet av Lgr 11 har förutsättningarna för undervisning förtydligats och konkretiserats. Skolverkets allmänna råd om planering och genomförande av undervisningen⁴³ ger tillsammans med tillhörande generella stödmaterial förutsättningar för lärare att utveckla undervisningen med utgångspunkt i styrdokumentet.

Både Bentley och Kling Sackeryd pekar i sina rapporter på behovet av fortbildning för att höja kvaliteten på undervisningen i samband med en utökad undervisningstid i matematik. De menar att fortbildningen för lärare bör om-

⁴³ Skolverket (2011). *Allmänna råd för planering och genomförande av undervisningen*.

fatta både ämnesteoretiska och ämnesdidaktiska kunskaper. Bentley menar även att ett utökad timtal utan fortbildning inte kommer att ge de effekter som önskas. I hans rapport finns därför ett flertal förslag på konkret innehåll för fortbildningsinsatser⁴⁴. Förslagen berör bland annat specifika kunskaper om de missuppfattningar hos elever som anses mest kritiska. Ett annat område är kunskaper om det synsätt som kursplanen i matematik i Lgr 11 beskriver, i vilket begreppsanalys och förståelse tillsammans med matematiska resonemang och kommunikation ingår. Inlärningsteorier om hur olika skolmatematiska begrepp lärs in är ytterligare ett område som behöver vara centralt i en fortbildningsinsatsning. Till sist, och minst lika viktigt, är att lärare behöver tydlig kännedom om elevers olika utvecklingssteg i matematik, för att kunna göra den formativa utvärdering som förväntas. Inom ramen för fortbildningsinsatserna i Matematiklyftet kommer detta innehåll att behandlas⁴⁵.

Andra faktorer som är viktiga och som bidrar till en långsiktig förändring av undervisningens kvalitet är styrning och ledning av verksamheten samt rektorns roll som pedagogisk ledare. Dessa faktorer är en viktig del av innehållet både i Rektorslyftet och i rektorsprogrammet⁴⁶.

I Skolverkets *Delredovisning av uppdrag om att stärka undervisningen i matematik, naturvetenskap och teknik*⁴⁷ framhålls både betydelsen av lärares skicklighet och rektorns roll som pedagogisk ledare:

Utredningen visar på betydelsen av skickliga lärare som en förutsättning för elevernas positiva kunskapsutveckling. Genomgången pekar också starkt på betydelsen av att rektor tar aktiv del i processerna för att utveckla och förbättra matematikundervisningen på skolorna.

Utveckling tar tid och resurser måste därför avsättas för skolans egna utvecklings- och fortbildningsarbete, där lärare ges möjligheter till kollegialt lärande med externt stöd. Lika viktigt som tid och organisation av utvecklingsarbetet är att veta vad som bör utvecklas, dvs. att beskriva, analysera och utvärdera undervisningen. Det är också viktigt att lärare i alla årskurser omfattas av utvecklingsarbete och fortbildning för att stärka matematikundervisningen även för de årskurser som inte kommer att få utökad tid.

Enligt regeringens remisspromemoria om utökad undervisningstid bör huvudmän

ges stöd och vägledning för hur de, utifrån lokala förutsättningar, bäst kan genomföra en utökning av undervisningstiden som i så stor utsträckning som möjligt ökar elevernas måluppfyllelse i matematik.

⁴⁴ Bilaga 1, sid. 38 och 55.

⁴⁵ Skolverkets webbplats <http://matematiklyftet.skolverket.se>

⁴⁶ Skolverkets webbplatser:

<http://www.skolverket.se/fortbildning-och-bidrag/rektorsprogrammet>

<http://www.skolverket.se/fortbildning-och-bidrag/rektorslyftet>

⁴⁷ Skolverket (2011). *Delredovisning av uppdrag om att stärka undervisningen i matematik, naturvetenskap och teknik, Fortbildning av matematiklärare*, Dnr U2011/2229/G.

De satsningar som Skolverket nu genomför på uppdrag av regeringen omfattar stöd riktat mot flera av ovanstående behov. Genom Lärarlyftet II får lärare möjlighet att utöka sin behörighet, genom ämnesteoretiska och ämnesdidaktiska studier.

Inom Matematiklyftet skapas möjligheter för lärare att genom kollegialt lärande och handledning utveckla sin ämnesdidaktiska kompetens och därigenom matematikundervisningen. Inom ramen för Matematiklyftet kommer även ett stöd för rektorns pedagogiska ledarskap i samband med lärarfortbildningen i matematik att ges. I såväl rektorsprogrammet som Rektorslyftet behandlas frågor om hur effektiv styrning och ledning samt hur rektorns pedagogiska ledarskap kan bidra till att utveckla undervisningen. Ytterligare stöd finns i de allmänna råd som behandlar planering och genomförande av undervisningen samt i de kommande allmänna råden om systematiskt kvalitetsarbete.

Per-Olof Bentley,
Göteborgs universitet

Bilaga 1
Framgångsrik
undervisning
med fokus på
det matematiska
innehållet

Innehållsförteckning

1. Bakgrund	29
Skolverkets uppdrag.....	29
Undervisningens inriktning.....	29
Den svenska timplanen i matematik i ett historiskt perspektiv	31
2. Utgångspunkter	32
Effekter av yttre förutsättningar.....	32
Undervisningens utformning och konsekvenser.....	34
Elevers och lärares belief systems.....	35
Fortbildningens roll.....	38
Utökad och fördjupad innehåll.....	38
Konsekvenser av orsaker till elevmisstag.....	39
3. Forskning	41
Utveckling av talbegreppet.....	41
Fördröjd aritmetisk utveckling.....	42
Utveckling av talfakta	43
Tal i bråkform.....	46
Negativa hela tal	48
Algebra	49
Problem med övergeneraliseringar.....	51
Blockerande misstag	53
Hjärnans anatomi – undervisningens utformning.....	54
4. Analys av genomförandet	57
Elevperspektivet.....	57
Rättviseperspektivet	58
Forskningsperspektivet.....	58
Kommunperspektivet och tillgången på behöriga lärare	59
Läroplanperspektivet.....	60
5. Slutsatser.....	61
Referenser	62

1. Bakgrund

Som bakgrund beskrivs först Skolverkets uppdrag därefter analyseras hur undervisningens i svenska skolor är inriktad utifrån djupanalyserna av TIMSS 2007 och 2003 men delvis också från djupanalysen av TIMSS Advanced 2008. Sist görs en historisk jämförelse av hur den obligatoriska undervisningstiden i matematik i grundskolan har varierat mellan olika läroplaner.

Skolverkets uppdrag

Skolverket har fått regeringens uppdrag att föreslå hur den utökade timresursen om 120 timmar i matematik i grundskolan skall kunna fördelas på olika år. Uppdraget löd: *Kartlägga och analysera hur en ökning av den garanterade undervisningstiden i matematik i grundskolan och motsvarande skolformer med 120 timmar kan användas för att i så stor utsträckning som möjligt stärka elevernas matematikkunskaper.* Utgångspunkten ska vara de djupanalyser, som har gjorts i samband med internationella jämförelsestudier, såsom TIMSS, samt relevant ämnesdidaktisk forskning i matematik. Detta innebär att kartläggning av elevers kunskaper och svårigheter skall vara vägledande för ett ställningstagande.

Undervisningens inriktning

Undervisningen i flertalet västländer har haft en procedurell inriktning till skillnad från de ostasiatiska länderna vilka huvudsakligen haft en konceptuell inriktning. Tyngdpunkten i en procedurell undervisning ligger på beräkningsförmågan, medan andra förmågor lever ett mer tillbakadraget liv, speciellt begreppsförmågan och resonemangsförmågan. Förståelse av beräkningsstrategier brukar ofta vara bristfällig men procedurerna kan vara väl inövade¹. I till exempel användningen av de så kallade tankeleden visste eleverna hur de skulle utföras men tillämpade en version på en uppgift som var avpassad för en annan typ av uppgift. Av de 500 elever vi intervjuade i Lilla Edet var detta mer regel än undantag².

I en konceptuell undervisning betonas förståelse av både procedurer och begrepp. Så när undervisningen benämnes konceptuell så betonas både procedurer och förståelse av begrepp. Detta gör att elever som fått erfara en sådan undervisning lättare kan överföra sina matematiska kunskaper till nya sammanhang och till vardagliga situationer.

¹ Byrnes, (1992); Byrnes & Wasik, (1991).

² Bentley, P-O (2008c).

För att se hur förmågan att transferera kunskaper till nya situationer behärskades, gjordes analys av lösningsmönster dels i den andra djupanalysen av TIMSS 2007 och dels i djupanalysen av TIMSS Advanced 2008³. Om elever har fått en konceptuell undervisning så har de ett slags facit i begreppen och i procedurernas begreppsliga förankring som gör att de kan modifiera procedurer så att de passar nya sammanhang. Det är också så att uppgifter som innebära rutintillämpningar ofta får höga lösningsfrekvenser. Så var till exempel fallet med en uppgift i vilken procentandelen direkt skulle beräknas utifrån vetenskap om procentsatsen och helheten. Svenska elever hade lösningsfrekvenser ungefär lika höga som eleverna i Hong Kong och Taiwan (72,8 %) vilket däremot inte var fallet då uppgifterna inte var av rutinkaraktär. Slutsatsen i djupanalysen var att då en procedurell modell, som de svenska eleverna undervisats om, kan tillämpas direkt, så löser de uppgiften lika bra som eleverna i Hong Kong och Taiwan, eftersom dessa inte har någon direkt fördel av sin begreppsligt inriktade undervisning i en sådan typ av uppgift⁴.

Så om undervisningen haft en begreppslig inriktning är det mer sannolikt att eleverna hade löst fler uppgifter som berört samma område, uppgifter som hade olika karaktär och från något olika sammanhang.

I grundskolan undersöktes lösningsmönstren för algebra med fem uppgifter från block fyra i TIMSS 2007 och 2003 för elever i Sverige, Hong Kong och Taiwan. Endast en obetydlig andel av de svenska eleverna (0,7 %) löste samtliga fem uppgifter. Det mest frekventa lösningsmönstret var en löst uppgift av de fem uppgifterna (38,8 %) därefter kom inga uppgifter alls lösta (24,2 %) och därefter två av fem uppgifter lösta. I både Hong Kong och Taiwan uppvisade eleverna ett annat mönster. Det mest frekventa mönstret var att samtliga uppgifter var lösta, vilket en dryg fjärdel av eleverna (27,6 %) i Hong Kong gjorde medan nästan hälften av eleverna i Taiwan (46,1 %) uppvisade samma mönster. Resultatet harmonierar med den inriktning av undervisningen som förekommer i Hong Kong och Taiwan, i vilken förståelse och begrepp har en central plats.

Slutsatsen vad gäller svenska elever och algebra är att eleverna sannolikt utsatts för en procedurell undervisning, som karaktäriserats av en gör-så-här orientering.

Den lösningsmönsteranalys som genomfördes i TIMSS Advanced omfattade inte bara algebra utan också proportionalitet. Resultatet pekar även där på en procedurell inriktning av undervisningen och att utvecklingen har gått än mer åt det hållet.

Den brist på förståelse, som kännetecknade undervisningen i matematik i Sverige i såväl grundskolan som gymnasieskolans D- och E-kurser, gör att elever får svårigheter att använda sina matematiska kunskaper också i andra ämnen.

³ Bentley, P-O (2009b).

⁴ Bentley, P-O (2009a) sid. 70.

Utvecklingen i många discipliner går idag mot ökad användning av matematiska modeller, som innehåller en stor portion av abstrakt tänkande. Därför får algebran en särskild tyngd som en förutsättning för fortsatta studier i en rad utbildningar vid både gymnasieskolan och högskolor eller universitet.

Den svenska timplanen i matematik i ett historiskt perspektiv

Den obligatoriska undervisningstiden i matematik i svenska skolor har varierat mellan åren. I tabell 1 syns hur föreskrifterna i de olika läroplanerna dock har varit relativt konstanta.

Tabell 1. Antal eleveckotimmar och lärarveckotimmar enligt Lgr 11 och några tidigare läroplaner.

År	Årskurser		
	1–3	4–6	7–9
62	13 (17*)	15	12
69	13 (19*)	15	12
80	13**	15	12
94	12	12	12
11	12	12	12

* Lärartimmar.

** Föreskrifter om resurstimmar fanns.

Tidigare fanns det obligatoriska halvklasstimmar på lågstadiet, något som på senare år tycks ha blivit alltmer sällsynt med kommunernas stigande ekonomiska svårigheter. I och med kommunaliseringen på början av 90-talet försvann dessa halvklasstimmar, vilka hade gett lärarna en större möjlighet till att färdighetsträna eleverna mer individuellt. Historiskt sett brukade elever i allmänhet behärska additions-, subtraktions- och multiplikationstabellerna efter genomgången årskurs 3. I dag kräver inte ens kursplanen detta, multiplikationstabellen begränsas till produkter under 20, dock skall i princip additions- och subtraktionstabellerna vara inhämtade.

Under senare år har den garanterade undervisningstiden varit någorlunda konstant. Vad som varit effektiv undervisningstid behöver dock inte överensstämma med den garanterade undervisningstiden. Troligen inkräktar andra gemensamma aktiviteter i skolorna på denna tid så den faktiska undervisningstiden blir sannolik mindre.

2. Utgångspunkter

Förbättring av elevprestationerna är en central fråga vid en ökning av undervisningstiden i matematik. Forskningen visar att tidig satsning på faktorer, som påverkar elevprestationerna ger en mer varaktig effekt än sena satsningar. Detta avhandlas i första avsnittet. I andra avsnittet behandlas den traditionella undervisningens inriktning och de problem som kan vara förenade med användningen av enbart diagnostiska test. Avgörande för undervisningens utformning och hur elever uppfattar vad som är matematik speglas i deras belief system⁵. I det tredje avsnittet förklaras detta samt belyses hur det kan påverka elevers matematikutveckling men även strategier för hur belief system skall påverkas och utvecklas beskrivs. Eftersom lärarkompetensen är den faktor som påverkar elevernas prestationer mest, är fortbildning ett effektivt sätt att åstadkomma en förbättring. I det fjärde avsnittet avhandlas vilken roll fortbildningen kan spela i ett förbättringsarbete. I och med införandet av Lgr 11 och den nya kursplanen i matematik så är innehållet i matematik i grundskolan utökat eller fördjupat, vilket beskrivs i avsnitt fem. Till sist avhandlas vilka konsekvenser misstag och dess orsaker kan få för elevernas fortsatta kunskapsutveckling.

Effekter av yttre förutsättningar

En klassisk studie, som var en uppföljning av STAR-projektet i staten Tennessee var *The Lasting Benefit Study*. De elever, som de första fyra åren i skolan gått i små respektive stora elevgrupper, placerades från klass fyra i ordinära klasser och följdes under resten av grundskoletiden. De elever, som hade gått i små klasser de fyra första åren hade genomgående bättre prestationer och skillnaden mellan dem och de elever som gått i större klasser ökade hela tiden. Det var en uppenbar fördel att ha fått undervisning i små klasser de fyra första åren och fördelen förstärktes under resten av grundskoletiden⁶. Mycket tyder alltså på att tidiga satsningar ger mer ”pay off” under längre tid men inte bara det, det visade sig att detta också ger bättre förutsättningar för att tillgodogöra sig undervisning.

Problemet med att förbättra elevernas prestationer i grundskolan är dock mer komplicerat än så. Från TIMSS djupanalys, i vilken ingår resultat från en omfattande studie i Lilla Edet samt analyser av inlämnade elevlösningar av nationella ämnesprovet, visar att det matematiska innehållets behandling

⁵ I ett belief system ingår tre uppfattningar, en om matematikens natur, en om hur matematik lärs i konsekvens med den första uppfattningen och sist en om hur undervisningen skall bedrivas i konsekvens med de tidigare uppfattningarna. Undervisningens utformning bestäms i stor utsträckning av lärares belief system.

⁶ Pate-Bain, Achilles, Boyd-Zaharias & McKenna (1992).

i undervisningen är avgörande för hur eleverna tillägnar sig det. Svenska elever gör misstag som varit kända av den internationella forskningen under förhållandevis lång tid. Visserligen visade lärarenkäten i TIMSS att eleverna i Sverige hade minst undervisningstid jämfört med övriga länder inom EU men det gick inte att finna något statistiskt samband (korrelation eller regression) mellan undervisningstid och elevprestationer, inte heller verkade det ha någon avgörande betydelse om ett moment behandlats eller ej för elevernas förmåga att lösa motsvarande uppgifter.

Det finns flera skäl för denna brist på samband mellan elevprestationer å ena sidan och undervisningstid samt täckning av ett moment i undervisningen å den andra. För det första neutraliserades lärarkompetensen av att det inte förekom genomgångar av det matematiska innehållet utan lärarna förlitade sig helt på textböckerna. Eleverna arbetade huvudsakligen självständigt med att lösa uppgifter och den uppföljning av elevernas kunskaper som förekom, gjordes huvudsakligen med diagnoser, utan involvering av läraren. Eftersom behandlingen av ett moment låg utanför lärarens kontroll visste inte läraren om eleven hade tittat på motsvarande innehåll och tillägnat sig det eller ej. Ett annat skäl var att läroböcker i matematik med få undantag har skrivits av lärare utan anknytning till forskning inom det matematikdidaktiska området. Ett större antal från forskningen på 1980-talet kända didaktiska misstag fanns kvar i de svenska läromedlen.

Detta elevsjälvtändiga arbetssätt hade redan under senare delen av sextio-talet testats under vetenskapliga former i Sverige i det så kallade IMU-projektet (Individuell matematik undervisning). Läromedlet var då speciellt utformat för detta elevsjälvtändiga arbetssätt. Trots detta visade det sig att arbetssättet inte var framgångsrikt och det övergavs. Ett av de allvarligaste problemen var att elever inte själva kunde avgöra vad som var väsentligt i ett moment. De uttalade en del ord på ett egendomligt sätt då de inte hört andra elever eller läraren uttala orden. Motsvarande tendenser till elevsjälvtändigt arbetssätt har förekommit även i andra ämnen, exempelvis i språk. Det är svårt att förstå att ämnen, som egentligen kräver en hel del kommunikation, organiseras på ett sätt som mer eller mindre omöjliggör just kommunikation.

För att en utökning av undervisningstiden skall bli effektiv krävs alltså ett mer läraraktyvt arbetssätt och med mer kommunikativ inriktning på begreppsförståelse men lärarna behöver även kunskaper om hur olika moment inom matematiken kan missförstås och vilka frekventa misstag eleverna gör, som kan blockera fortsatt utveckling av matematiken. Detta didaktiska innehåll verkade många aktörer med ansvar för skolutvecklingen inte behärska då flertalet misstag, som eleverna frekvent gjorde i TIMSS 2003, TIMSS 2007 och TIMSS Advanced 2008, visade att lärarna inte motverkade uppkomsten av dessa misstag i sin undervisning. Detta är en tydlig brist på kännedom om såväl den internationella som den nationella matematikdidaktiska forskningens resultat.

Lärarenkäten i TIMSS 2007 visade att undervisningstiden i svenska skolor är relativt låg jämfört med skolor inom andra EU-länder (9 stadiesveckotimmar)⁷. Därför är den utökning som nu beslutats välkommen om den kan kombineras med en effektiv fortbildningssatsning. Därvid bör de lärare, som först berörs av reformen fortbildas först för att utökningen av tiden skall bli så effektiv som möjligt.

Undervisningens utformning och konsekvenser

I Sverige och andra västländer har undervisningen varit procedurellt orienterad till skillnad från den konceptuellt orienterade undervisningen i de ostasiatiska länderna som nämnts ovan. Tall⁸ har tidigt varnat för den procedurella inriktningen, vilken i stor utsträckning lätt kan leda till en ”gör-så-här-undervisning”. Tall och Vinner menar att då elevens förkunskaper minskar tvingas läraren att mer och mer övergå till en icke-förklarande undervisning och att mer inrikta undervisningen på att beskriva hur man utför beräkningen utan någon direkt förståelse om dess begreppsliga förankring. Tall och Vinner pekar på konsekvenserna av detta förhållningssätt:

The problem is that such routines very soon become just that – routine, so that students begin to find it difficult to answer questions that are conceptually challenging. The teacher compensates by setting questions on examinations that students can answer and the vicious circle of procedural teaching and learning is set in motion. As a result, conceptual connections become less likely to be made⁹.

Tall och Vinner menar alltså att lärarens frågeställningar på prov och liknande situationer också anpassas till den procedurella inriktningen. Undervisningen kommer då in i en ond cirkel. Ju mer ”gör-så-här-orienterad” undervisningen blir, desto mer saknar eleven förkunskaper för kommande avsnitt och läraren tvingas fortsätta med ”gör-så-här-inriktningen”. Undervisningen tenderar på så sätt att bli mer och mer procedurellt inriktad och lärarens anpassning av tester döljer undervisningens försämring för eleverna, vilka tror att de behärskar innehållet eftersom de kan besvara de frågor som ställs.

Den procedurella inriktningen innebär vidare att undervisningen blir beräkningsfixerad. Detta syns också ganska tydligt i de läromedel som har använts i Sverige. Undantagsvis fanns uppgifter i vilka begreppslig kunskap behandlades. Därmed var beräkningsförmågan den klart dominerande i undervisningen. Det är i princip omöjligt att finna beskrivningar av samband mellan begrepp i vare sig text eller övningar i de svenska läromedlen i grundskolan. Haapsalo¹⁰

⁷ TIMSS (2007).

⁸ Tall & Vinner (1981).

⁹ Tall & Vinner (1981).

¹⁰ Haapsalo (2003).

menar att läromedlen även i Finland har en tydlig procedurell inriktning och att beräkningstraditionen dominerar i textböckerna.

I de tidiga årskurserna i grundskolan har det så kallade ”arbetsschemat” styrt verksamheten, läraren har organiserat elevernas självständiga arbete och eleven har i princip jobbat själv i läromedlet¹¹. Några gemensamma genomgångar och förklaringar har sällan förekommit. Nästan samtliga lärare (95 %) i TIMSS 2007 uppgav att de följde läroboken och dess planering. Vidare dominerades undervisningstiden av självständigt elevarbete. Uppföljningar för att försäkra sig om att eleverna förstått innehållet på avsett sätt tycks ha skett med hjälp av diagnostiska test. Djupanalyserna av TIMSS 2007 samt studien i Lilla Edet visade att diagnoserna avslöjar kanske elevernas misstag men oftast inte orsaken till dessa misstag. Genom att träna mer, som var den vanligaste åtgärden, kom istället misstagen att befästas ännu mer än tidigare. Detta var tydligt i Lilla Edet. Eleverna hade under tre år gjort diagnoser och övat mer medan orsaken till misstagen, som bland annat var den talsortsvisa beräkningens¹² behandling, inte retts ut. Diagnoserna hade visat att eleverna gjorde misstag och de hade övat mer men orsaken till misstagen kvarstod eftersom lärarna inte kunnat analysera situationen för att finna orsaken och reda ut den för eleverna.

Som bland annat matematikdelegationen tidigare påpekat behöver matematik resoneras och kommuniceras i grupper av elever under läraren ledning. Läraren kan då utföra det som på engelska benämns ”natural assessment”, det vill säga formativt utvärdera framför allt elevernas förståelse av matematiken. Eleverna uppvisar i sina resonemang hur de förstått eller missförstått ett moment. Läraren kan då ställa frågor som gör att eleven kan inse sitt misstag. Utvärderingen kan också ligga till grund för den fortsatta undervisningens planering, innehåll och utformning samt strukturella misstag med sina rötter i undervisningen kan upptäckas och åtgärdas.

Elevers och lärares belief systems

Uppfattningar, som är både rationellt och emotionellt grundade, om matematikens natur, hur den lärs samt hur undervisningen skall bedrivas under dessa båda förutsättningar kan sammanfattas i vad som kallas belief system. Dessa grundläggs tidigt, vilket innebär att den första inriktningen av undervisningen är avgörande för vilket belief system som eleven utvecklar¹³. Detta system avgör hur eleven uppfattar matematikämnets natur. Flera belief system är kända från forskning i Sverige men framför allt från den internationella forskningen. Det belief system, som en elev eller lärare har, styr alltså vad de uppfattar som

¹¹ TIMSS (2007).

¹² Vid talsortsvis beräkning beräknas talsorterna, ental, tiotal, osv. var för sig och delberäkningarna kombineras därefter.

¹³ Calderhead, (1996); Ernest, (1989) Pajares, (1992); Thompson, (1992).

matematik. Matematik kan uppfattas att mer eller mindre handla om att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter. Denna orientering är väl dokumenterad i internationella forskningsöversikter¹⁴. Matematiken ses som en uppsättning regler, som skall tillämpas och övas in, vilket gör att den andra komponenten i belief system, hur lärande av detta specifika innehåll skall gå till, uppfattas som att inläring sker om reglerna tillämpas då uppgifter löses. Den tredje komponenten i ett belief system utgörs alltså av en uppfattning om hur undervisningen, i konsekvens med de två andra uppfattningarna, skall utföras¹⁵. Denna uppfattning är alltså konsistent i förhållande till uppfattningarna om matematikens natur och dess lärande. Larsson¹⁶ kunde visa att om elever stöter på en lärare som har ett belief system som inte överensstämmer med deras eget uppstår lätt konflikter. Eleverna kräver att undervisningen utförs i enlighet med deras belief system om det är tidigare etablerat. Har eleverna ännu inte etablerat ett belief system, kan utformningen av detsamma påverkas genom den undervisning som eleverna får erfar.

Pajares¹⁷ menar att dessa uppfattningar, som ingår i ett belief system, består av rationell kunskap blandad med emotioner. Detta gör dem mycket resistent mot påverkan. Bentley¹⁸ fann att lärare kunde ha flera parallella belief systems, vilket kan peka på att elever också skulle kunna ha detta. Att förändra en persons belief system är då inte lika framgångsrikt som att försöka lägga till ytterligare ett. Att lägga till ett tycks inte vara lika utmanande som att förändra ett befintligt.

Den tredje komponenten i ett belief system var ju uppfattningen om hur undervisningen skall vara utformad. I fallet med de, som ser matematiken som en samling regler, som skall användas då uppgifter löses, menar de att undervisningen huvudsakligen skall utgöras av beräkningar. Undervisningen utgörs då av elevsjälständigt arbete, det vill säga eleverna löser uppgifter, uppgifter i vilka reglerna kan tillämpas och därmed övas och läras in. Problemet med en sådan inriktning av undervisningen är att forskningsöversikter över effekten av undervisningsuppehåll visar att just kunskaper, som är procedurellt inriktade utan begreppslig förankring eller förståelse, glöms fortare än kunskaper, som är grundade på förståelse med begreppslig förankring¹⁹.

Andra belief system, som beskrivits i forskningen framför allt internationellt men också till viss del nationellt, är att matematiken ses som problemlösning i vid bemärkelse och att användning av matematiska begrepp och förmåga att resonera matematiskt logiskt utgör hörnstenarna i detta system. Undervisningen

¹⁴ Tall & Vinner (1981); Thompson (1992).

¹⁵ Ernest (1989).

¹⁶ Larsson (1983).

¹⁷ Pajares (1992).

¹⁸ Bentley, C (2002).

¹⁹ Cooper, Nye, Charton, Lindsay & Greathouse (1996).

utformas då så att man enskilt eller i grupp löser rika matematiska problem, framför allt inte problem, som är av rutinkaraktär. Ofta löses problem, som kan leda till mer generella matematiska slutsatser, så kallade kärnfulla matematiska principer²⁰. För att undervisningen om de fem förmågorna i den nya kursplanen i matematik skall äga rum krävs andra belief systems, vilka ser matematikens natur annorlunda med mer fokus på matematiska begrepp och deras samband samt där resonemangs- och kommunikationsförmåga också beaktas²¹.

Lärares belief system bestämmer till stor del hur undervisningen utformas i klassrummet. Detta betyder i sin tur att lärares kompetens blir kopplad till sätt varpå undervisningen genomförs. En lärare tränar helt enkelt att genomföra undervisningen enligt sin uppfattning i sitt belief system. Bentley²² beskrev detta fenomen i sin studie och fann vidare att försökspersoner var inlåsta i sin kompetens av sitt belief system. För att förändra undervisningen i den riktning som kursplanen i matematik i Lgr 11 beskriver behövs alltså fortbildning, som får lärarna att lägga till åtminstone ett belief system, i vilket begreppsanalys och förståelse tillsammans med matematiska resonemang och kommunikation ingår.

Ovanstående omständigheter pekar mot att gedigna förkunskaper från de tidiga åren i grundskolan skulle kunna bidra till att undervisningen kan fokusera mer på matematisk förståelse, det vill säga undervisningen skulle kunna bli mer konceptuellt inriktad.

Begreppslig förståelse kan också bidra till att eleverna kan tillämpa sina kunskaper i nya sammanhang, sammanhang, som förekommer i vardagen, vars karaktär inte direkt kan förutsägas. Denna förbättring av förmågan beror enligt den internationella forskningen på att eleverna i sina begreppskunskaper har med sig ett slags facit för modifiering av procedurer, en modifiering, som kan vara nödvändig för att anpassa procedurerna och kunna använda dem i nya kontexter eller sammanhang²³.

Svenska elevers attityd till matematik och deras värdering av matematikens betydelse undersöktes i TIMSS 2007 och redovisas i den internationella rapporten. Med det internationella medelvärdet som ett riktvärde kan konstateras att de svenska eleverna i medeltal hade en mindre positiv attityd till ämnet och att de värderade nyttan mindre än vad elever i andra länder i genomsnitt gjorde. En mer positiv attityd till matematik verkar också samvariera med resultatet på TIMSS kunskapstest²⁴.

²⁰ Ernest (1989); Ma (1999); Bentley & Bentley (2011); Richardson (1995).

²¹ Bentley & Bentley (2011).

²² Bentley, C (2002).

²³ Rittle-Johnson & Wagner Alibali (1999).

²⁴ TIMSS (2007).

Fortbildningens roll

Den internationella forskningen visar att lärarkompetensen är den faktor som mest påverkar elevprestationerna, förutsatt att läraren inte överläter inhämtandet av kunskaper helt till eleverna, ett förhållande som har varit alltför vanligt i Sverige. Under förutsättning av att ett mer läraraktyvt arbetsätt etableras så är fortbildning av lärarna ett av de effektivaste sätten att förbättra elevprestationerna. För att en utökad undervisningstid skall bli effektiv krävs att lärarna fortbildas i matematikdidaktik. Lärarna behöver kunskaper om hur innehållet behandlas begreppsligt och kunskaper om hur man motverkar att eleverna bygger upp de kända misstagen från TIMSS djupanalys. Analysen har ju visat att stora elevgrupper gör de här kända misstagen, ibland rör det sig om grupper så stora som över hälften av eleverna. Eftersom det ingår ungefär 100 000 elever i en årskurs i grundskolan blir elevantalet ganska stort: över 50 000 elever. Om vi tänker oss att det i medeltal finns 25 elever i en klass berörs ungefär 2 000 lärare av en årskurs. Uppskattningsvis är mellan 15 000 och 20 000 lärare berörda.

För att kunna undervisa om hur begrepp förstås och hur de är relaterade till varandra krävs kunskaper inom detta område. Några beskrivningar i läromedlen finns ännu inte och lärares belief system är oftast beräkningsinriktat, vilket lätt får till följd att flera av förmågorna i kursplanen inte behandlas på avsett sätt. För att få med alla fem förmågorna krävs ett delvis annorlunda belief system hos läraren. Inlärningsteorier om hur olika skolmatematiska begrepp lärs in är också ett område, som behöver vara centralt i en fortbildningsinsats. Till sist men troligen viktigast behöver lärare tydlig kännedom om elevers olika utvecklingssteg i matematik för att kunna göra den formativa utvärdering som förväntas och behövs.

Oavsett var den utökade tiden i grundskolan läggs ut behöver samtliga grupper av lärare som undervisar i matematik fortbildas om resultatet skall blir det förväntade. Lägg tiden huvudsakligen i de tidigare årskurserna bör lärarna i de senare kunna ta emot elever med mer utvecklade kunskaper och utveckla eleverna vidare där. För detta krävs också fortbildning men den kan ligga några år senare.

Utökat och fördjupat innehåll

I och med beslutet av Lgr 11, togs ytterligare ett steg mot en internationell anpassning av det centrala innehållet i kursplanen i matematik samt en tydlig styrning från en procedurell undervisning till en mer konceptuellt inriktad undervisning. De krav som är förenande med undervisningens syfte, de så kallade förmågorna, och då speciellt begreppsförmågan, förmågan att resonera och kommunikationsförmågan gör att det centrala innehållet också måste ses

från dessa perspektiv. Detta sker inte utan vidare då lärares belief system kan vinkla tolkningen av kursplanens direktiv. För att en sådan vinkling skall kunna undvikas krävs fortbildning så att lärare behärskar innehållet utifrån dessa perspektiv och att de också kan utveckla ett till kursplanen anpassat belief system.

I det centrala innehållet märks bland annat att tal i bråkform skall behandlas i årskurserna 1–3, rationella tal och mer formell algebra i årskurserna 4–6 samt utökad innehåll i algebra i årskurserna 7–9.

Av lärarna i grundskolan krävs att de skall undervisa om ett innehåll de tidigare inte i allmänhet undervisat om. För att kunna göra detta krävs kunskaper om hur detta innehåll skall behandlas i undervisningen samt hur man undviker att kända elevmisstag uppstår. Samordning över åren av exempelvis användning av begreppsmodeller så att eleverna slipper lära om då de byter lärare är också nödvändigt. En sådan samordning är också arbetsbesparande för lärarna.

Viktigt att förutsättningarna i de senare årskurserna är så bra som möjligt, framför allt är innehållet i årskurserna 4–6 mycket uppfostrande för lärarna då de vanligen är ganska obekanta med det nya matematiska innehållet i kursplanen.

Om elevernas belief system skall kunna ändras i riktning mot mer förståelse av matematiken måste detta ske tidigt och genom en allsidig behandling av innehållet. Det är framför allt den begreppsliga inriktningen och inriktningen mot att utveckla elevernas resonemangsförmåga som behöver få ett utrymme i undervisningen. Detta motiverar en utökad tidsram i framför allt de tidiga åren i grundskolan. Beräkningsinriktningen måste kompletteras med mer matematisk förståelse bland annat för att eleverna skall kunna tillämpa sina kunskaper i för dem nya sammanhang, sammanhang i vilka eleven kan lösa problemen bara genom att tillämpa sina befintliga kunskaper. Denna förmåga till transfer kan då påtagligt förbättras.

Konsekvenser av orsaker till elevmisstag

Flera av elevernas misstag och missuppfattningar etableras under de tidiga årskurserna och verkar ligga kvar under ganska lång tid, ibland resten av deras skoltid. Dessa misstag bidrar påtagligt till de försämrade resultaten i svenska skolor visar djupanalysen av TIMSS 2007. Misstag, som brukar etableras under de tidiga åren i grundskolan förekom också frekvent under de senare åren. Senare forskning visar att flera välbekanta misstag har sina rötter i misstag i undervisningen under de tidiga åren. Ett sådant känt misstag är det så kallade ± 1 -felet²⁵, som görs frekvent även i gymnasieskolan. Detta misstag och framförallt orsaken till det etableras vanligen under de första åren i skolan.

²⁵ Vid addition och subtraktion kommer eleverna en enhet fel. Detta misstag hindrar utveckling av talfakta, dvs. additions- och subtraktionstabellerna kan då svårigen automatiseras.

Konsekvensen för elever som gör detta misstag, är att någon regelbundenhet i resultaten av aritmetiska operationer inte förekommer tillräckligt ofta och talfakta kan då inte utvecklas²⁶.

Ett annat misstag och dess orsaker kan också illustrera detta. En elev i åk 9 djupintervjuades och fick den kända frågan vad 51–49 är? Han svarade: ”Fy vad jobbigt! Räkna ner 49 steg.” Han kände inte till, trots att han haft fem år av specialundervisning, att subtraktionen kunde beräknas genom att räkna antalet steg mellan talen. Eleven fick en instruktion av intervjuaren och förstod hur beräkningen skulle göras och löste därefter ett antal liknande uppgifter. Karaktäristiskt för elever med svårigheter i matematik är att samtliga, som intervjuats (ca 100), också uppvisar utvecklade eller olämpliga beräkningsstrategier²⁷.

Bristen på adekvata beräkningsstrategier gör att talfakta inte utvecklas eller får en försenad utveckling. Flera av misstagen blockerar utvecklingen av talfakta då inga regelbundenheter i resultaten av aritmetiska operationer förekommer.

Elever med annat modersmål än svenska har ofta problem med övergången från språklig kod till sifferkod då tal skall uttryckas. Svenska uttrycker ju tal språkligt med en omkastning för tal mellan 12 och 20. I exempelvis talet 16 uttrycks entalet före tio talet men skrivs i omvänd ordning. Över 20 förekommer inte denna omkastning. I andra språk förekommer omkastning ibland mer frekvent ibland mindre. I tyskan förekommer omkastning mer eller mindre hela tiden. 21 utläses ”ein-und-zwanzig”. Flertalet språk har mer eller mindre ur vårt perspektiv egendomliga sätt att beskriva tal som franskans uttryck för 92, ”quatre-vingt-douze”. Speciellt besvärligt har barn, som dessutom har lärt sig att använda ett annat notationssystem är vårt. Exempelvis har arabiska barn inte bara svårigheter med det indiska notationssystemet, som de använder, utan också omkastningar då tal läses ut språkligt, exempelvis läses 139 som ”ett hundra nio trettio”. Detta brukar leda till att siffror i talen kastas om, så kallade reverserade tal, eller sammanlänkad struktur, ett förhållande som i ett övergångsskede kan skapa stora problem för läraren och inte minst för eleven. Ett initialt stöd för dessa elever har visat att om de blir direkt uppmärksammade på skillnaderna mellan språken och notationssystemen så underlättar detta inläringen. Det som kan hända är att eleven blandar ihop de språkliga uttrycken via fenomenet interferens eller att arbetsminnet onödigt belastas och därmed blockeras för annan inläring.

Ovanstående problem har visat sig vara särskilt problematiskt vid utveckling av talfakta, det vill säga att addition, subtraktion och multiplikationstabellerna automatiserats.

²⁶ Bentley & Bentley (2011). Se vidare sid. 45 i denna rapport.

²⁷ Bentley & Bentley (2011).

3. Forskning

I kapitlet kommer forskningsresultat att beskrivas med relevans för elevers matematikutveckling, vilket kan vara av betydelse för var ett utökat timtal skall placeras i grundskolans olika år.

Elevers utveckling av talbegreppet är av central betydelse för matematikundervisningen. Utvecklingen beskrivs i det första avsnittet. Ibland kan utvecklingen retarderas och därvid stanna på en förhållandevis låg nivå. Orsakerna till detta reds ut i det andra avsnittet. Ett av de viktigaste stegen i en elevs matematikutveckling är tillägnandet av talfakta, det vill säga automatiserandet av addition, subtraktion och multiplikation. Hur denna utveckling går till, vad som händer i hjärnan och vad som kan hindra utvecklingen beskrivs i det tredje avsnittet. I avsnitt fyra belyses orsaken till de misstag svenska elever gör rörande tal i bråkform bland annat med ett antal exempel från TIMSS 2007. Negativa hela tal är ett känt problemområde inom den grundläggande matematiken, framförallt rör det subtraktion av ett negativt heltal samt multiplikation av två negativa tal. Detta beskrivs i avsnitt fem. I sjätte avsnittet behandlas de problem som rör algebran i grundskolans senare år. Speciellt uppfattningen av variabelbegreppet analyseras särskilt. Övergeneraliseringar visade sig i TIMSS 2003 och 2007 var ett problem för eleverna. Några exempel på sådana generaliseringar beskrivs i det sjunde avsnittet. Problemet med blockeringar har betydelse för elevers förståelse för matematik och därmed för elevers matematikutveckling. Detta avhandlas i det åttonde avsnittet. Till sist beskrivs de förutsättningar, som vår hjärnas anatomi ger för matematikundervisningen. Speciellt fokus läggs på begreppsinnläring och hur vår hjärna påverkas av undervisningen.

Utveckling av talbegreppet

Elevers förståelse av talbegreppet utgår från att ett tal är ett adjektiv och därmed en bestämning till ett substantiv, exempelvis kan substantivet bil bestämmas av två, två bilar. Uppfattningen av talbegreppet ligger då på en konkret nivå och kan bara bestämma objekt av samma slag eller kategori. I detta skede av elevens förståelse av begreppet, kan inte en myra och elefant uppfattas som två, då de utgör objekt av olika slag. Tyvärr är många av dagens textböcker i matematik fulla av objekt av samma slag, som skall räknas.

Den mer utvecklade och abstrakta uppfattningen av talbegreppet innebär att talet i sig är ett substantiv och står, som exempelvis två, för alla konstellationer av två objekt oberoende av objektens beskaffenhet. Då kan en myra och en elefant uppfattas som två. Lärare kan ibland visa att de inte själva har förstått talbegreppet på detta mer utvecklade sätt. Man kan inte subtrahera två nyckelpigor från fem elefanter. I detta uttalande visar läraren att objektens beskaffenhet

tas hänsyn till och att tal uppfattas som adjektiv. I stället skulle läraren konstaterat att utgångspunkten är fem objekt av vilka vi tar bort två. Vi väljer då två bland de fem som vi redan har.

Att uppfatta ett tal, som den abstrakta storheten de är, kan underlätta elevers förståelse av negativa hela tal då dessa matematiskt sett utgörs av ekvivalensklasser, vilket ovanstående uppfattning också representerar.

Förmågan att uppfatta antal är en medfödd förmåga, som vi delar med de högre djuren och fåglarna. Fåglarnas uppfattningar om antal är välkända bland naturfotografer. Med subitisering kan olika fågelarter uppfatta mellan tre och sju föremål²⁸. Denna medfödda förmåga används i skolmatematiken för att representera de positiva hela talen, en så kallad begreppsmodell. Modellen är så naturlig att de flesta inte uppfattar den som en modell. Att förmågan är medfödd underlättar inläringen av de positiva hela talen. Då talområdet senare utvidgas innebär detta för de flesta elever ett relativt stort steg, vilket gör att mer tid behöver ägnas åt detta. Behandlingen av tal i bråkform utgör en sådan utvidgning som numera skall äga rum under de tidiga skolåren.

En mental representation av tallinjen utvecklas allteftersom eleverna får erfarenheter av talens storleksordning och inbördes förhållande. Denna representation ligger till grund för rimlighetsbedömningar av svar på bland annat aritmetiska beräkningar. Eleverna verkar inte utan vidare spontant koppla ihop ett resultat av en beräkning med hur resultatet representeras bland talen på tallinjen. Studien i Lilla Edet visade att då lärarna efterfrågade rimlighetsbedömning och tränade eleverna att göra den så gjorde eleverna denna ihopkoppling vilket resulterade i att de misstag, som tidigare förekommit, minskade i omfattning.

Fördröjd aritmetisk utveckling

Enligt en forskningsöversikt av Fuson²⁹ genomgår elever olika steg i sin utveckling av begreppet tal. Först kan man iakta när barnet reciterar talraden, talorden kommer sammansatta till en början men så småningom gör barnet en åtskillnad mellan varje talord. I nästa steg kan barnet tillordna talord till objekt, till en början kan två talord hamna på ett objekt eller inget talord alls på ett annat men efterhand fungerar tillordningen korrekt. I det tredje steget kan barnet svara på frågan hur många genom att nämna det sist uppräknade objektets talord. Detta representerar en övergång från den ordinala uppfattningen av talbegreppet till att också inkludera den kardinala aspekten. Då barnet tillfrågas om enkla additioner räknar barnet upp från början. Då exempelvis två och tre adderas, kan barnet räkna först ett, två och ett, två, tre och sedan ett, två, tre, fyra, fem. Barnet kan i detta skede inte räkna upp från delen. För att detta skall

²⁸ Ekblad (1990).

²⁹ Fuson (1992).

kunna ske måste barnet behärska den motsatta övergången från kardinalitet till ordinalitet.

Då barnet räknar upp från delen utgår barnet från det antal objekt som den ena termen representerar. I additionen fem plus tre utgår barnet från fem objekt och börjar dubbelräkna på det sjätte, sjunde och åttonde. Som tidigare inser barnet att det sista objektets talord representerar också antalet objekt som räknats, i själva verket en övergång från ordinalitet till kardinalitet. Barnet behärskar nu vad man kan kalla en tvåriktad övergång mellan ordinalitet och kardinalitet. En förutsättning för att barnet skall kunna utföra dubbelräkning är att talraden behärskas intill automatisering, så att funderingar om vilket tal som kommer näst inte behöver belasta arbetsminnet.

Vid studier i Sverige har framkommit att elever i grundskolan kan ha en retarderad utveckling av talbegreppet, vilket innebär att barnet, långt efter att kamraterna räknar från delen, fortfarande räknar från början. Fördröjningen kan i tid handla om cirka en termin eller ett år. En sådan retarderad utveckling är förenad med att talraden inte behärskas fullt ut framlänges och/eller baklänges samt att barnen skriver spegelvända siffror, reverserade tal, sammanlänkad struktur³⁰, eller inte har automatiserat sifferskrivandet³¹. Utvecklingen av talfakta, automatiserade additions-, subtraktions- och multiplikationstabeller, stoppas eller fördröjs, vilket kan leda till att eleven konstant får svårigheter att följa undervisningen. Om läraren illustrerar en matematisk princip med en beräkning riskerar eleven att missa principen då en stor del av arbetsminnets kapacitet ägnas åt beräkningen.

Utveckling av talfakta

Talfakta har uppnåtts då eleven kan hämta aritmetiska resultat, såsom additions-, subtraktioners och multiplikationers resultat, från långtidsminnet. För att detta skall vara för handen skall enligt internationell standard eleven svara inom tre sekunder. Om detta sker frigörs kapacitet i arbetsminnet, eftersom beräkningarna inte behöver utföras i arbetsminnet utan bara hämtas dit. Detta innebär ett optimalt utnyttjande av arbetsminnet³².

De kunskaper som eleverna inhämtar under dagen hamnar först i arbetsminnet, som oftast modelleras med fyra komponenter, fonologiska looppen, visuellt spatiala funktionen, exekutiva funktionen samt episodiska bufferten. Den exekutiva funktionen samordnar och dirigerar verksamheten i arbetsminnet. I den sker aritmetiska beräkningar om de inte hämtas från långtidsminnet. Den svarar också för att rikta uppmärksamheten, en för inläring viktig

³⁰ Om elever beds att skriva 27 skriver de 207. Detta benämns sammanlänkad struktur.

³¹ Johansson (2005); Bentley (2008b).

³² DeStefano & LeFevre (2004).

komponent. Mer kognitiv kapacitet kan ägnas åt inläringen om den exekutiva funktionen inte belastas med beräkningar, utan att dessa hämtas från långtidsminnet³³.

Den fonologiska loopen, som också är ett korttidsminne, svarar bland annat för att språkljud avkodas till ord, meningar och betydelser. Även information som presenteras vågrät hamnar i den fonologiska loopen. Detta fenomen benämns modalitet och innebär att hur informationen presenteras avgör vilken funktionell del av arbetsminnet som blir aktiv. Presenteras informationen vertikalt, som i standardalgoritmer, så hamnar representationen i den visuellt spatiala funktionen, i vilken visuell och spatial information kan representeras. I den episodiska bufferten lagras information om omständigheterna kring övrig information, exempelvis positiva eller negativa emotioner, vilka kommer till användning då informationen vidarebehandlas³⁴.

Därefter lagras det vi lärt oss under dagen i hippocampus, en för inläring viktig del av hjärnan och som utgör en mellanstation för lagring av informationen. Under sömnen gallras och ordnas informationen i hippocampus och överförs till cortex, långtidsminnet. Amygdala, en del av hjärnan i vilken emotioner hanteras, påverkar vad som förs över från hippocampus till cortex. Information förknippad med positiva eller negativa emotioner förs över för lagring i cortex medan information förknippad med likgiltighet gallras bort. VTA-loopen kontrollerar om informationen redan finns lagrad eller inte. Det är också välkänt att kemiska substanser, som droger, kan blockera denna överföring till cortex. Detta yttrar sig som att eleven ena dagen behärskar ett innehåll men någon dag senare är allt som bortblåst. Det inlärd från den ena dagen finns helt enkelt inte kvar någon dag senare. Vilka substanser som har denna inverkan eller biverkan förefaller inte helt utforskat. Vi har i vår forskning stött på elever som uppvisat dessa symtom och som samtidigt medicinerat för ADHD eller andra psykologiska eller fysiska tillstånd.

För att arbetsminnet skall fungera optimalt vid aritmetiska beräkningar och fortsatt matematisk utveckling bör alltså arbetsminnet kunna hämta färdiga resultat av aritmetiska beräkningar från långtidsminnet. En sådan automatisering innebär att den exekutiva funktionen inte belastas i så hög grad utan dess kapacitet kan ägnas åt att rikta uppmärksamheten på det som skall läras in³⁵. För att kunna följa undervisningen i matematik då läraren illustrerar en matematisk princip med ett inslag av beräkningar krävs alltså att aritmetiska beräkningar har automatiserats. Elever, som inte har gjort detta, fokuserar beräkningarna och lägger hög kognitiv energi på att förstå själva beräkningen och därvid missar de lätt den matematiska principen. Detta visade sig särskilt tyd-

³³ Baddeley (1986); Baddeley (1996); Baddeley & Hitch (1974).

³⁴ Baddeley (1986); Baddeley (1996); Baddeley & Hitch (1974).

³⁵ DeStefano & LeFevre (2004).

ligt i studien i Lilla Edet, framför allt i de senare åren i grundskolan.

Vad är det som gör att de aritmetiska resultaten hamnar i långtidsminnet? Eleven måste erfara regelbundenheter och mönster i beräkningar. Exempelvis måste eleven erfara att fem plus tre alltid är åtta. Resultatet får inte variera. Det får inte bli sju eller nio ibland för då erfars inte den regelbundenhet som krävs. Det är samma typ av regelbundenhet, som barn iakttar vid språkinläring. Det är känt att denna typ av automatisering av räknandet, som också benämns talfakta, först utvecklas för det mindre talen ett, två, tre, fyra och fem medan de större talen brukar komma något senare³⁶.

Om eleven istället erfar oregelbundenheter kommer inga talfakta att utvecklas. Olika typer av inkorrekta beräkningar gör att eleven inte upptäcker dessa regelbundenheter och talfakta utvecklas inte. Eleven tror då att det inte finns något unikt svar på en unik addition, subtraktion eller multiplikation. Emellertid brukar multiplikationstabellen läras genom extensiv träning och mer sällan genom att regelbundenheter och mönster iakttas. Direkt övning av huvudräkning skulle därför kunna överbrygga problemet genom att eleverna då kan exponeras för korrekta svar via lärarens kontroll.

Ett problem, som visade sig i TIMSS djupanalys och i studien i Lilla Edet, var den mängd av olika beräkningsstrategier, som läromedlen tog upp för skriftlig huvudräkning. Speciellt problematiskt var det med de strategier som fanns i två olika versioner och som skulle användas i olika situationer. De flesta läromedel beskrev inte i vilka situationer strategierna skulle tillämpas och inte heller fanns någon begreppslig förankring beskriven. Närmare hälften av eleverna (48,1 %) gjorde misstaget att tillämpa talsortvis beräkning inkorrekt vid en subtraktion av decimaltal. I Nationella ämnesprovet inlämnade lösningar som analyserades i samband med TIMSS 2007 gjorde relativt få av de elever (7,5 %) som använde den vanliga standardalgoritmen fel på en subtraktion med växling. Mer än hälften (63,7 %) av de som använde talsortvis beräkning gjorde fel på samma uppgift. De beräkningsstrategier, som finns i en version och som kan tillämpas på alla additioner och subtraktioner, fanns lågfrekvent representerade ibland lösningarna (10,2 %). Dessa strategier förekom också mer sällan i elevernas textböcker. Detta torde betyda att undervisningen i ringa utsträckning eller inte alls tagit upp dessa strategier, strategier som rimligen borde gett mer korrekta resultat oftare.

I Lilla Edet hade en majoritet av eleverna uppfattningen att en aritmetisk operation inte har ett unikt resultat utan tillämpningen av olika beräkningsstrategier kan ge olika resultat, för en och samma unika uppgift. En elev yttrade: ”Det beror på hur man räknar!”. En sådan uppfattning blockerar utvecklingen av talfakta då eleven redan har uppfattningen att någon regelbundenhet

³⁶ Fuson (1992).

inte finns, att till exempel fem plus tre kan förutom åtta även bli sju och nio men även andra resultat är möjliga.

Om eleverna skall frigöra kognitiv kapacitet i arbetsminnet för inläring, bör onödigt belastning undvikas och därför bör talfakta utvecklas så tidigt som möjligt. Detta skulle troligen också öka elevernas inlärningskapacitet.

Tal i bråkform

Medfödd förmåga till att uppfatta antal kan inte användas då tal i bråkform introduceras på samma sätt som tidigare då naturliga tal introduceras. Ett särskilt problem är att undervisningen ofta haft en karaktär av inläring av beräkningsprocedurer och inte fokuserat den begreppsliga sidan av tal i bråkform. Detta gör att vissa misstagstyper blir mer frekventa, speciellt vid addition och subtraktion.

I TIMSS 2007 och 2003 ansåg mer än hälften av eleverna (54,4 % respektive 55,0 %) i årskurs åtta att $\frac{2}{5} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8}$ är $\frac{16}{17}$. Det vill säga de summerade täljarna för sig och nämnarna för sig. Det korrekta alternativet hade valts av en dryg femtedel av eleverna både 2007 och 2003 (21,0 % respektive 22,2%). Det finns åtminstone två orsaker till misstaget beskrivna i forskningen. Den ena orsaken rör en begreppsmodell för tal i bråkform, andelsmodellen. En modell, som har låg strukturell validitet och därmed avviker påtagligt från den korrekta matematiska definitionen. I modellen representeras ett bråk som "en av fyra". Med denna modell kan vi addera en halv och en halv och få en halv på nytt, "en av två" plus "en av två" är "två av fyra", vilket är en halv. Vi har alltså inkorrekt kunnat visa att $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Modellen har förekommit i en del textböcker i Sverige. Den andra orsaken för det beskrivna misstaget i TIMSS kommer av en övergeneralisering från multiplikation av tal i bråkform. Vid multiplikation multipliceras både täljare och nämnare var för sig. En procedurrell inläring av operationerna hindrar inte på samma sätt som en konceptuell denna inkorrekta övergeneralisering³⁷.

För en subtraktion av tal i bråkform $\frac{1}{5} - \frac{1}{3}$, som förekom också den i årskurs 8 både 2007 och 2003, var resultatet något sämre. Nästan tre fjärdedelar av eleverna (74,4 %) gjorde ovanstående misstag 2007 och 2003 var andelen ungefär lika stor (75,1 %).

Även i årskurs fyra i TIMSS 2007 gjordes ett liknande misstag. Uppgiften var där betydligt lättare då den handlade om liknämning subtraktion, $\frac{4}{5} - \frac{1}{5}$. En dryg tredjedel av eleverna (37,1 %) löste uppgiften korrekt medan knappt en fjärdedel (23,7 %) gjorde ett misstag motsvarande ovanstående. De fick resultatet till tre genom följande operation $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4-1}{\text{ingenting}} = 3$. Det förekom även varianter på ovanstående misstag, som att nämnarna adderades istället för

³⁷ Siegler (2003); Silver (1983); Davis (1997); Bentley (2008a).

att subtraheras (18,4 %). Resultatet blev då $\frac{3}{10}$. Dessutom multiplicerade en andel elever (18,4 %) nämnarna och fick då $\frac{3}{25}$. Flera uppgifter i TIMSS pekar på liknande misstag, som har sina rötter i en bland annat procedurrell undervisning. Hade undervisningen bedrivits med mer begreppslig förståelse och enhetsbegreppet införts genom att 3 fjärdedelar har enheten en fjärdedel. Med en sådan ansats förstår eleverna att nämnarna är en del av enheten. Då borde eleverna insett att man vare sig kan addera eller subtrahera bråk med olika enheter utan att växla enheter, så att enheterna blir lika. I denna ansats utgör pizzamodellen och/eller kvadratmodellen hörnstenar. Inga begreppsmodeller i skolmatematiken är givetvis perfekta då de utgör förenklingar av den matematiska disciplinens definitioner av motsvarande begrepp men den didaktiska forskningen visar att två dimensionella representationer, som dessa två modeller, tillhör de mest effektiva.

Mycket talar för att en undervisning tidigt om tal i bråkform kan förbättra elevernas förståelse av dessa tal men kan även ge ett vidgat perspektiv på talsystemet som helhet. Undervisning i årskurs två av tal i bråkform efter fortbildning av lärarna har genomförts i Lilla Edets kommun samt i ett antal andra kommuner i västra Sverige med till synes lyckat resultat.

Division av tal i bråkform är något som traditionellt legat i de senare åren i grundskolan på samma sätt som i många andra västländer. Ma³⁸ beskriver vilka svårigheter lärare i USA hade att ge en räknesaga till en division av två tal i bråkform. Lärarna i Kina, som hon jämförde med, klarade detta till över 70 % medan endast några få av lärarna i USA gjorde det. En förutsättning för en förståelse av en sådan division är att innehållsdivision behärskas. Kan $\frac{1}{2}$ divisionen inte uppfattas sålunda blir svårigheterna betydande. Exempelvis $\frac{1}{\frac{1}{4}}$

kan lösas mer eller mindre utan förståelse genom att nämnaren inverteras och vi får $\frac{4}{1}$ som sedan multipliceras med en halv, vi får $\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = 2$. Betydligt större förståelse för divisionen kan man få om innehållsdivision används. Man frågar då hur många gånger ryms eller innehålls en fjärdedel i en halv. Tidigare förekom innehållsdivision sparsamt i våra textböcker i matematik. Lärarstudenter som undersökte förekomsten av innehållsdivision i tre marknadsledande läromedel i årskurserna tre, fyra och fem fann att i benämnda problem så ledde 80 % till fördelningsdivision medan 20 % ledde till innehållsdivision. Denna snedfördelning tycks dock vara på väg att ändras.

Internationellt förekommer undervisning av tal i bråkform i de tidiga åren i grundskolan. I och med Lgr 11 och den nya kursplanen i matematik har en viss internationell anpassning skett. Detta kommer rimligen att kunna leda till en förbättring då det gäller svenska elevers behärskande av tal i bråkform.

³⁸ Ma (1999).

Negativa hela tal

Även introduktionen av negativa hela tal innebär ett stort steg eftersom medfödd disponibilitet för antalsmodellen, som kan användas för positiva helatal, inte kan användas längre. Här har svenska elever ett problem med framförallt subtraktion av negativa hela tal. I TIMSS 2007 förekom en uppgift i vilken detta testades. Uppgiften löd: ”Sätt antingen + eller – i rutorna för att det här uttrycket skall bli så stort som möjligt!”

$$-5 \square - 6 \square 3 \square - 9$$

En dryg tredjedel av eleverna (37,3 %) löste uppgiften korrekt och använde följande kombination av tecknen $- + -$. Dessa elever insåg att $-(-6)$ är det samma som att addera sex. Analogt gäller för $-(-9)$ att nio skall adderas. Detta är en av hörnstenarna i förståelsen av negativa hela tal. Anmärkningsvärt är att en andel elever (28,2 %) använde plustecken framför båda de negativa talen. Övriga misstag speglar troligen mer gissningar än planmässiga strategier.

Motsvarande misstag förkom i algebra då ett uttrycks värde skulle beräknas om variabelerna a respektive b sattes till 3 och -1 . Uttrycket var $2a + 3(2 - b)$. En majoritet av eleverna (59,3 %) valde distraktorn ”9”, vilket betydde att de inte visste att om $b = -1$ så är $-b = +1$. För dem blev $-b = -1$ och uttryckets värde blev $2 \cdot 3 + 3 \cdot (2 - 1) = 6 + 3 = 9$. Misstaget har sina rötter i kunskaper om bland annat de negativa hela talen. Slutsatsen man kan dra av detta är att misstag och outvecklade kunskaper från tidigare år kan spela stor roll långt senare.

Multiplikation och division av negativa hela tal har också visat sig vara problematiskt. En av testuppgifterna i TIMSS 2007 och 2003 var ”vilket tal dividerat med -6 ger resultatet 12?” Alternativen bestod av -72 , -2 , 2 och 72 . De svenska eleverna (ca 700) hade valt de flesta alternativ ungefär lika frekvent vilket skulle kunna antyda att de gissat. Ett Chi2-test visar dock att så troligen inte var fallet. Endast en dryg fjärdel av eleverna (26,3 %) valde det korrekta alternativet -72 .

De två stötestenarna med negativa hela tal är alltså subtraktion av ett negativt tal och multiplikation av två negativa tal. Båda momenten ingår i området rationella tal som enligt den nya kursplanen skall studera under årskurserna 4–6.

Lärare på högstadiet är ofta teoretiskt mer förberedda för undervisningen av negativa hela tal genom sin mer omfattande utbildning. Den grupp lärare som nu skall introducera negativa hela tal har inte tidigare i allmänhet undervisat om momentet och har inte heller någon omfattande teoretisk utbildning vare sig matematiskt eller didaktiskt. Därför finns all anledning att prioritera ett sådant moment och denna grupp av lärare vid den kommande fortbildningen.

Mer tid för att undervisa detta moment kan givetvis behövas. Detta kan rimligen ske genom att undervisningen förbättrats i årskurserna 1–3. Om talfakta be-

härskas vad gäller naturliga tal finns inte ett behov av fortsatt träning av detta på samma sätt som tidigare. Alltså utökad tid för årskurserna 1–3 kan i själva verket frigöra utrymme för undervisning av negativa hela tal under årskurserna 4–6.

Algebra

Ett antal olika uppfattningar av vad bokstavsbeteckningar står för finns dokumenterade i forskningen såväl nationellt som internationellt. Dessa beteckningar brukar benämnas variabler i forskningssammanhang. I TIMSS 2007 och 2003 förekom ett flertal uppgifter som avslöjade de svenska elevernas uppfattningar. En av uppgifterna förekom endast i TIMSS 2007 och var relativt enkel, eftersom den så kallade objektsmodellen direkt kunde tillämpas. Den innebär att variabeln i sig uppfattas som objekt istället för symbol för tal. Uppgiften löd: *Vilket alternativ motsvarar $4x - x + 7y - 2y$?* Det första alternativet var 9 vilket representerar uppfattningen av variabeln som en icke-symbolisk representation. Variabeln förstås egentligen inte alls, den ignoreras och därmed har den ingen symbolisk representation alls. En mindre andel elever (4,5 %), som försökte lösa denna uppgift, uppvisade en uppfattning av variabelbegreppet som är typisk för den icke-symboliska representationen, genom att välja detta alternativ. Det andra alternativet $9xy$ representerar en utveckling i vilken eleven är på väg att inse att den icke-symboliska representationen inte är korrekt. Därför inser de att bokstavs-beteckningarna för variablerna inte kan bara utelämnas men de vet inte ännu hur de skall behandlas. Eleverna skriver därför till dem efter varandra efter att ha adderat koefficienterna med tecken. Andelen elever (14 %), som valde detta alternativ, var betydligt större än föregående grupp. Det tredje alternativet var $4 - 5y$ valdes av en ännu större andel och beror på att $4x$ uppfattas additivt, vilket gör att $4x - x = 4$. Det fjärde och korrekta alternativet, $3x - 5y$, fastnade en klar majoritet (61,5 %) för. Uppgiften måste dock betecknas som en rutinuppgift för de flesta elever.

Så fort uppgiften inte innebär en additiv utan en multiplikativ förenkling sjunker lösningsfrekvensen dramatiskt. I nästa exempel på uppgift skulle $2a^2 \cdot 3a$ förenklas. Fyra alternativ fanns att välja mellan. Det mest frekventa alternativet var distraktorn $6a^2$ som valdes av en majoritet av eleverna (46,1 %). I detta fall fungerar inte objektsmodellen eftersom det är fråga om en multiplikativ förenkling. Det korrekta alternativet valdes endast lågfrekvent (18,0 %). Att se variabeln som ett objekt, exempelvis som ett antal apelsiner, bidrar inte till någon operationell förståelse eftersom apelsin gånger apelsin inte har någon begreppslig eller förklarande betydelse.

Variabler får sin betydelse av sammanhanget eller kontexten. Dessa två missuppfattningar, som beskrivits ovan förekommer oberoende av sammanhanget. Den korrekta uppfattningen av variabelbegreppet i ett uttryck är en generell talbeteckning till skillnad från siffror som är specifika talsymboler. Värdet av

uttryck kan beräknas då variablerna tilldelats specifika värden. I ett sådant exempel från TIMSS 2007, som beskrivits ovan efterfrågades värdet av ett uttryck: *Vad är värdet av $2a + 3(2 - b)$ för $a = 3$ och $b = -1$?* En klar majoritet av eleverna (59,3 %) valdes en av distraktorerna, 9. Orsaken till detta var att de inte insåg att om $b = -1$ så är $-b = +1$. De menade istället att $-b$ är lika med -1 i uttrycket. Vi får då $2 \cdot 3 + 3 \cdot (2 - 1) = 9$. Det korrekta svaret fås om $-b$ ersätts med $+1$ vilket ger uttrycket värdet 15. En lite andel av de svenska eleverna (10,9 %) valde detta alternativ. Som jämförelse kan nämnas att en större andel eleverna i Hong Kong och Taiwan (69,2 %; 78,4 %) löste uppgiften.

Även i nationella ämnesprovet för årskurs 9 förekom en liknande uppgift. Men den direkta svårigheten för eleverna, vilket var att om en variabel ersätts med ett negativt värde så blir motsvarande negativa variabel positiv, testades inte. Uppgiften var betydligt enklare eftersom variablerna var positiva i uttrycket medan de ersattes med negativa värden. Trots detta löste mindre än hälften av eleverna (40,8 %) uppgiften.

I en annan uppgift i TIMSS användes negativa parenteser: *Vilket av alternativen är lika med $2(x + y) - (2x - y)$?* Det korrekta alternativet $3y$ valdes av mindre än en femtedel av de svenska eleverna (18,9 %). Mer än en fjärdedel av eleverna (27,8 %) valde den distraktor, y , som representerar misstaget att inte byta tecken på en negativ parentes vid förenkling.

En annan missuppfattning av variabelbegreppet, som dyker upp i samband med att värdet av uttryck skall beräknas då värdena på variablerna är givna, är sifferrepresentation. Om $b = 2$ så beräknar elever med denna uppfattning $3b$ till 32 och inte till $3 \cdot 2 = 6$. Dess bättre har denna missuppfattning inte någon nämnvärd omfattning i TIMSS enligt djupanalyserna.

I en ekvationskontext betyder variabeln ett specifikt okänt tal. Detta brukar de flesta elever förstå. I TIMSS 2007 och 2003 förekom bland annat denna uppgift som behandlade lösning av en ekvation, $3(2x - 1) + 2x = 21$. Vilket värde har x ? Ungefär hälften av de svenska eleverna (50,6 %; 53,2 %) löste ekvationen korrekt båda åren. Ekvationer verkar svenska elever behärska förhållandevis bättre än beräkningar av uttrycks värden. Eftersom ekvationslösning tränas förhållandevis extensivt så lever uppfattningen av variabelbegreppet, som specifikt okänt tal, kvar även i andra kontexter, i vilka variabeln i stället representerar en generell talbeteckning. En graf i ett koordinatsystem blir mer eller mindre omöjlig att förstå om variabeln uppfattas som ett specifikt okänt tal. Den oberoende variabeln x måste kunna genomlöpa alla de x -värden som ingår i funktionens definitionsområde för att de olika y -värden, som ingår i värdeområdet, skall kunna erhållas och grafen ritas upp. Om x endast uppfattas som ett värde får vi en graf, som består av bara en punkt i koordinatsystemet.

I TIMSS 2007 fanns två uppgifter, som inte var fria för publicering i vilka förståelsen av variabelbegreppet också testades. Tydliga skillnader i uppfatt-

ningar av variabeln uppvisades i de två uppgifterna. Slutsatsen man kan dra av detta är att kontexten kan avgöra vilken uppfattning eleven uppvisar. Detta visar också att en elev kan ha flera parallella uppfattningar, vilka var och en kan tillämpas i olika kontexter.

Hur likhetstecknet uppfattas har stor betydelse för möjligheten att lösa ekvationer med en variabel i varje led. Vanligen uppfattar elever likhetstecknet som ”det blir”, den så kallade dynamiska uppfattningen. Vissa så kallade luck-övningar kan avslöja om eleverna har en dynamisk uppfattning, $4 + 5 = \square - 2$. Ett frekvent misstag är att nio skrivs i rutan och inte elva. Om en elev med den dynamiska uppfattningen skall lösa en sådan ekvation som $3x + 4 = 5x - 2$ kan problem uppstå. Ett resonemang som framkommit i våra intervjustudier är att elever säger att de inte kan förenkla $3x + 4$ till att bli $5x - 2$. Det är mycket enklare att lösa en ekvation med variabler i båda leden om eleven behärskar den statiska uppfattningen, som innebär att det är *lika mycket* i båda led. Resonemanget blir då att för något värde på x kan det vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. Glädjande nog kan konstateras att flera läroböcker observerat problemet och åtgärdat det. Det vore troligen bättre att undvika ”blir” och istället använda ordet ”är”.

Problem med övergeneraliseringar

Övergeneraliseringar kan ha sina rötter i att eleven själv dragit en slutsats, som endast har lokal giltighet eller läraren kan, utan full medvetenhet om konsekvenserna, ha dragit en slutsats i undervisningen, som också bara har lokal giltighet. Från den matematikdidaktiska forskningen finns flertalet beskrivningar av övergeneraliseringar av den senare typen. Uttrycket ”störst först”, som enligt användaren skulle anvisa ordningen i subtraktioner, är ett sådant exempel. Detta innebär att från det största talet skall den mindre alltid subtraheras. Denna slutsats innebär problem då eleverna kommer till subtraktioner, som kräver växling. Denna övergeneralisering var en av de vanligaste orsakerna till att $51 - 49 = 18$. Då delberäkningen av $1 - 9$ skulle utföras var en av orsakerna att eleverna tillämpade övergeneraliseringen och vände på subtraktionen. De beräknade istället $9 - 1 = 8$. Eleverna hade på detta sätt felaktigt lärt sig att subtraktionen var kommutativ och att växlingsförfarande inte behövdes, ett misstag som inte lät sig åtgärdas så lätt. Ungefär hälften av eleverna i TIMSS 2007 gjorde liknande misstag.

En annan övergeneralisering har att göra med addition av först naturliga tal. Den säger att *talen skall ställas upp med rak höger kant då de skall adderas*. De lärare, som genom okunnighet använder denna övergeneralisering, skulle hellre kunna uttryckt motsvarande genom att säga att ental sätts under ental, tiotal sätts under tiotal, och så vidare. När elever, som endast lärt sig övergeneraliseringen, skall addera tal i decimal form några år senare så gör de genast ett

misstag då de skall addera decimaltal med olika antal decimaler. Då kommer nämligen inte ental under ental, tiotal under tiotal, och så vidare. I TIMSS 2007 och 2003 förekom en uppgift om en fröblandning: *En trädgårdsmästare blandar 4,45 kg rajgräsfrön med 2,735 kg klöverfrö för att så en gräsmatta. Hur många kilogram fröblandning har han därefter?* Två tredjedelar av svenska eleverna (67,2 %) utförde additionen av decimaltal korrekt i TIMSS 2007 medan drygt hälften (55,1 %) gjorde det i TIMSS 2003. Bland det vanligaste misstaget märks dock svaret 3,18, som kommer av uppställningen nedan.

$$\begin{array}{r} 4,45 \\ + 2,735 \\ \hline 3,180 \end{array}$$

Alltså en addition utförd i enlighet med övergeneraliseringen ovan. Detta misstag beror givetvis inte på eleverna utan på undermålig undervisning, vilket flertalet misstag torde göra. Om läraren istället hade sammanfattat principer med ental under ental och tiotal under tiotal så hade additionen av decimaltal fungerat utan ytterligare undervisning. Eleverna hade bara behövt tillämpa principen.

Illa valda exempel i läroböcker och av läraren i undervisningen kan också orsaka problem. Den typ av misstag, som orsakas av detta, brukar sägas bero på ”exemplens kraft”. Ett nyligen av oss upptäckt sådant exempel fann vi då vi tränade lärare att göra elevintervjuer för att leta efter orsaker till elevers misstag. I en textbok hade följande exempel använts.

Procentform	Bråkform	Decimalform
10 %	$\frac{1}{10}$	0,10

Exemplet är alldeles korrekt men kan missuppfattas. När eleverna skulle växla 20 % till bråkform och decimalform fick de

Procentform	Bråkform	Decimalform
20 %	$\frac{1}{20}$	0,20

Mönstret från det första exemplet användes av eleverna och de trodde att det bara var att invertera talet i procentform för att få motsvarande tal i bråkform. Det korrekta är ju $\frac{1}{5}$ i bråkform. Vid val av exempel är det viktigt att de inte innehåller något tillfälligt mönster, som felaktigt kan generaliseras.

Även vi addition och subtraktion av tal i bråkform förekommer övergeneraliseringar från multiplikation av dessa tal. Vid multiplikation opereras med både täljarna och nämnarna var för sig, vilket inte är fallet vid addition och subtraktion i vilken nämnaren kan uppfattas som en enhet och därför inte påverka operationen.

Blockerande misstag

Hos elever kan misstag finnas etablerade, vilka gör att fortsatt inläring av matematiska moment kan blockeras. Det är därför viktigt att studera och analysera även det eleverna inte kan för att förstå på vilket sätt de inte kan, det de inte kan. Blockeringar för fortsatt inläring kan finnas där. En sådan blockering gör att eleven inte kommer vidare i sin matematiska utveckling. Inkorrekt tillämpning av talsortvis beräkning är ett exempel på en sådan blockering. Eleven erfar då ingen regelbundenhet i sina beräkningar och kan inte på detta sätt utveckla talfakta. Den elev som först förklarade detta var han, som på frågan vad $51 - 49$ är svarade först 18 och därefter på frågan om det kan vara något mer svarade ”två”. Som förklaring gav han svaret ”det beror på hur man räknar”. Han hade alltså uppfattningen att beroende på vilken beräkningsstrategi han tillämpade så kunde resultatet på en specifik beräkning bli olika. Han kunde därför inte finna någon regelbundenhet i operationernas resultat och han letade inte heller efter det då han trodde att det inte fanns någon sådan. Han hade därmed blockerat sin utveckling av talfakta. I TIMSS 2007 och i nationella ämnesprovet framkom att han definitivt inte var ensam. Det är viktigt att lärare har tid och kunskaper att analysera och reda ut misstag av denna typ.

Som tidigare beskrivits kan även ± 1 -felet och ± 2 -felet åstadkomma samma oregelbundenhet och därmed blockera utvecklingen av talfakta. Båda dessa misstag har flera bakomliggande orsaker. ± 1 -felet orsakas mest av en inkorrekt nedräkning, ett misstag som sällan beror på eleven. Andra orsaker kan vara luckor i talraden eller svag utvecklad mentalrepresentation av talen. Speciellt vid subtraktion av två större tal kan misstagen att fokusera talen emellan istället för antalet steg emellan vara orsaken. Detta kan också vara en orsak till ± 2 -felet. Ibland dyker ett ± 5 -fel upp. Detta har sin orsak i fingerräkning och en hands fingrar har hoppats över.

Bristen på erfarenhet av innehållsdivision kan försvåra och ibland även blockera förståelsen och tillämpningen av kortdivision och division av tal i bråkform som beskrivits tidigare.

En annan blockering av förståelsen av kongruensbegreppet i geometrin inträffar relativt frekvent. Frågar man lärare och elever när två punkter är lika får man sällan något svar. Om man fortsätter frågandet med två sträckor och frågar på samma sätt när de är lika kommer inte heller så ofta något svar. Att placeringen i planet har en avgörande betydelse för när två sträckor är lika tror inte de flesta. Oftast ligger fokus på längden och de är lika om de har samma längd. Med trianglar är det något annorlunda. När är två trianglar lika? När de har samma form och storlek samt när det ligger på samma plats så att de sammanfaller. Ligger de inte på samma plats är de kongruenta. Så kunskapen om likhet i geometrin är en förutsättning för att elever skall kunna förstå kongruensbegreppet. Om inte den förutsättningen finns blir kongruensbe-

greppet mer eller mindre meningslöst.

Även uppfattningen av likhetstecknet kan ha avgörande betydelse för elevers förmåga att lösa ekvationer med variabler i båda led. Den dynamiska uppfattningen, ”blir” kan också blockera elevernas möjligheter till att lösa dessa ekvationer.

Hjärnans anatomi – undervisningens utformning

Inom matematikdidaktiken har en forskningsinriktning funnits åtminstone de senaste 25 åren, som knyter ihop inläring och förståelse av matematik med forskningen kring hjärnans anatomi och funktion. Betydande resultat finns och kan tillämpas på undervisningen i matematik.

Som redogjorts för ovan har arbetsminnet en central roll inte bara vid inläring av aritmetiska kombinationer utan också vid begreppsinnläring. Två processer för begreppsinnläring finns beskrivna i forskningen. Den ena liknar i huvudsak Vygotskys teori om inläring av vardagliga begrepp. Lågfrekvent exponering för begreppet är ett karaktäristiskt drag för denna process, som benämns *theory revision*. Först skapar personen en begreppsprototyp, en provisorisk uppfattning av begreppet. Denna kan vara oprecis och saknar vissa av begrettets karaktäristiska egenskaper. Över tid utvecklas, preciseras och kontrolleras prototypen mot det flöde av sensoriska data³⁹, som personen erfar och så småningom svarar uppfattningen av begreppet helt mot detta flöde. Den andra processen är verksam vid högfrekvent exponering för begreppet och benämns *redescription*. Uppfattningen av begreppet formas i detta fall i arbetsminnet och kontrolleras mer eller mindre direkt mot det inflöde av sensoriska data som personen erfar. Via denna kontroll korrigeras uppfattningen och när utformningen avslutats förs uppfattningen av begreppet över till långtidsminnet via den process som beskrivits ovan. Först lagras uppfattningen i hippocampus och under natten förs den alltså över till långtidsminnet om rätt emotioner är förknippade med den⁴⁰.

Utgångspunkten för inläring av ett nytt begrepp är de tidigare begrepp vi lärt in. Inte vilka begrepp som helst, utan de begrepp som kan förknippas med innehållsområdet. Då vi erfar att minst en egenskap inte överensstämmer med vårt tidigare inlärd begrepp förstår vi att vi har att göra med ett nytt begrepp. Då finns två fall. Egenskapen kan vara antingen särskiljande eller specificerande. Då den är särskiljande har vi att göra med ett helt nytt begrepp. Om den är specificerande är begreppet ett specialfall av det tidigare inlärd⁴¹.

³⁹ Data som rör känslor eller rörelser.

⁴⁰ Dixon & Bangert (2004); Dixon & Dohn (2003).

⁴¹ Dixon & Bangert (2004); Dixon & Dohn (2003).

Exempel på ett nytt begrepp vars egenskap kan vara särskiljande är begreppet sträcka som skiljer sig från en linje genom sin begränsning. Observera att en sträcka inte är en linje utan ett helt nytt begrepp. Exempel på ett nytt begrepp vars egenskap kan vara specificerande är en rektangel, som är en parallelogram, vars vinklar är lika stora. Observera att rektangeln är en parallelogram, men ett specialfall. För övrigt hänger flera begrepp ihop i kedjestrukturer och nätverk. Fyrhörningar är ett exempel på detta⁴².

Konsekvensen för undervisningen blir här påtaglig som också påtalas i beskrivningen av begreppsförmågan i grundskolans kursplan i matematik: *använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp*. Just sambanden mellan begreppen blir därmed särskilt viktigt i undervisningen, eftersom vi alltså lär oss begrepp utifrån redan befintliga begrepp. Det blir då viktigt att försöka följa begreppsstrukturerna vid undervisning av begreppen och bygga upp förståelse för dem successivt. Dessa nätverk av relationer mellan de skolmatematiska begreppen blir därmed ett nytt och viktigt undervisningsinnehåll.

Ominläring är en besvärlig process och tar ofta lång tid, något vi erfor i Lilla Edet-projektet. Låt oss se hur hjärnan fungerar i detta avseende. På mikronivå kopplar neuroner upp i bestämda mönster i synapser. Enligt Spitzer⁴³ ökar antalet synapser i kopplingsmönstret allteftersom personen erfar samma mönster. Om det erfarna mönstret måste ändras på grund av att det till exempel inte är helt korrekt, så kopplar andra neuroner upp sig i ett annat mönster av synapser och under en tid finns båda mönstren parallellt. Över tid överges det första inkorrekt mönstret då det inte kommer till användning och det andra korrekta etableras allt starkare genom att fler kopplingar upprättas då det används allt oftare. Detta betyder att den tidiga matematikinläringen är mycket viktig och att strukturer och mönster i hjärnan formas tidigt. Undervisningen måste därför vara ytterst korrekt och bygga på att eleverna förstår matematiken på avsett sätt. Varje ord en lärare säger kan ju missuppfattas och måste därför vara väl genomtänkta. Tyvärr ser bilden av undervisningen i de tidiga åren i grundskolan inte så positiv ut. De elevsvårigheter och blockeringar som beskrivits i forskningen etableras oftast tidigt och beror oftast på misstag i undervisningen, misstag som fanns i läromedlen eller som läraren mer eller mindre omedvetet gjort. Lärare i dessa år i grundskolan behöver mer tid och kunskaper för att leda elevernas matematikutveckling. Mycket talar för att matematik har en särställning här. Om en elev missuppfattar ett moment och detta blockerar fortsatt matematikutveckling får detta konsekvenser för åtskilliga år framöver. Detta syns tydligt i de djupanalyser, som gjorts, då det visat sig att misstagen har sina rötter i den tidiga matematikundervisningen.

⁴² Bentley & Bentley (2011).

⁴³ Spitzer (1996).

Det som komplicerar bilden ytterligare är att då ett begrepp lärs in undertycks medvetenheten om dess egenskaper⁴⁴.

Ovanstående omständigheter talar för att ett utökat timtal bör placeras i första hand i årskurserna 1–3, men att detta måste kombineras med fortbildning för dessa lärare. Ett utökat timtal utan denna fortbildning är mer eller mindre bortkastat.

I framförallt algebra går undervisningen bland annat ut på att träna och tillägna sig abstrakt tänkande. Det abstrakta tänkandet behövs för att tillfullo förstå bland annat variabelbegreppet, vilket också stärker förmågan att tänka abstrakt även i andra ämnen. Denna förmåga till abstrakt tänkande utvecklas oftast sent under grundskoletiden men beror också på vad eleverna erfar i undervisningen. Det kan då konstateras att undervisningen i algebra skulle vinna på om eleverna via sin biologiska utveckling hade större disponibilitet att utvecklat sitt abstrakta tänkande. Grovt räknat brukar detta ske vid ungefär tolv års ålder. Det råder ingen tvekan om att svenska elevers kunskaper i algebra behöver förstärkas utifrån resultaten av bland annat TIMSS 2007, som redovisats ovan. Även den förstärkning av algebraundervisningen som kan bli följden av en utökad undervisningstid i tidigare år behövs troligen för att eleverna skall nå godtagbara resultat. Mot denna bakgrund föreslås att en av de utökade timmarna läggs i årskurs 9 då elevernas abstrakta tänkande troligen hunnit utvecklas bättre både via den biologiska utvecklingen och via erfarenheter. Detta skulle kunna ge förutsättningar till en effektivare undervisning i algebra. Givetvis krävs även för dessa berörda lärargrupper en speciellt inriktad fortbildning rörande centrala avsnitt i algebran där framförallt missuppfattningar om variabelbegreppets betydelse står i fokus.

⁴⁴ Snyder, Bossomaier & Mitchell (2002).

4. Analys av genomförandet

En avgörande faktor för att utökningen av undervisningstiden i matematik i grundskolan skall bli effektiv är att lärarna fortbildas, speciellt om vanliga misstag som eleverna gör och som kan blockera fortsatt lärande. Placeringen av den utökade tiden kan dock ses ur olika perspektiv. Ur ett elevperspektiv borde ökningen hamna huvudsakligen tidigt i grundskolan. Detta analyseras i första avsnittet. I andra avsnittet anläggs ett rättviseperspektiv innebärande att alla elever skall få del av timökningen så snart som möjligt. I det tredje avsnittet analyseras placeringen av ökningen ur ett forskningsperspektiv. Speciell uppmärksamhet riktas mot vilka problem som kan påverka elevernas matematikutveckling. Vilken betydelse tillgången på behöriga lärare kan ha för att reformen skall bli lyckad beskrivs i avsnitt fyra. Betydelsen av en effektiv och kvalitativt högstående lärarutbildning kan inte underskattas. Rekryteringen till lärarutbildningen kan då underlättas om studenterna har fått en förbättrad matematikundervisning i grundskolan. Detta analyseras i avsnitt fem.

Elevperspektivet

Ur ett elevperspektiv bör ökningen av undervisningstiden få genomslag så fort som möjligt i grundskolan. Om timmarna utökas i de tidiga åren i grundskolan så kan det ta en sju, åtta år innan dessa elever når gymnasieskolan och ännu längre till att elever kommer in på högre utbildning eller ut i yrkeslivet. Slutsatsen utifrån detta perspektiv blir då att timmarna bör läggas så sent som möjligt i grundskolan, effekten blir då snabbare och eleverna kommer mycket snabbare in i exempelvis lärarutbildning. Skillnaden kan vara kanske sju eller åtta år.

Mot ovanstående talar det faktum att problemen som eleverna uppvisar mer eller mindre uteslutande uppstått tidigt i grundskolan. Om de inte åtgärdas tidigt kommer det att vara betydligt svårare för att inte säga omöjligt att göra detta så sent som under högstadietiden. En hel del talar alltså för att en senareläggning inte alls blir lika effektiv som en satsning på de tidiga åren. Även etablerandet av förändrade belief system talar för en tidig placering av utökningen eftersom dessa system formas tidigt då eleverna erfar matematikämnet i grundskolan. Skall matematik bli något annat än procedurer och eleverna få mer förståelse i matematik så bör ökningen hamna tidigt, gärna med någon timme redan i årskurs ett.

Ett annat förhållande förtjänar också att påpekas. Skall den nya kursplanen med undervisningens syfte och förmågor kunna genomföras kräver detta ett förändrat belief system hos eleverna. De måste uppfatta matematiken på ett annat sätt med fokus på begrepp, resonemang och kommunikation. En förut-

sättning för att detta skall kunna ske är att de lärare som undervisar eleverna också har ett förändrat belief system så att de kan påverka elevernas syn på vad matematik är.

Rättviseperspektivet

Alla elever behöver få samma totala undervisningstid i grundskolan så fort som möjligt. Om några timmar läggs tidigt går de elever, som går i de sena åren miste om denna ökning. De hinner gå ut grundskolan utan denna ökning. Därför bör den läggas i de sena åren i grundskolan, egentligen bäst i årskurs nio. Då får alla elever del av samma tidsökning i matematikundervisningen. Ur ett rättviseperspektiv bör alla elever få samma antal timmar i matematik så fort som möjligt. Detta uppnås alltså om ökningen placeras i årskurs nio.

Ur ett effektivitetsperspektiv blir inte detta någon optimal lösning eftersom problemen uppstår tidigt och därför måste upptäckas och åtgärdas tidigt. Ett förändrat belief system är mycket svårare att uppnå senare i grundskolan än i de tidigare åren. Flera skäl talar för att ett förändrat synsätt på matematiken är att föredra för att den nya kursplanen skall kunna genomföras.

Det bästa hade förstås varit om fler timmar än tre skulle kunna användas under en uppbyggnadsperiod. Då hade de kunnat placeras så att alla elever fick samma antal timmar under sin grundskoletid. Mot detta talar tillgången på utbildade lärare. Historien om vad som hände när man i staten Kalifornien beslutade om mindre klasser och på kort tid skulle genomföra denna reform. Det visade sig att tillgången på behöriga lärare inte var tillräckligt stor och att man därför fick anställa flertalet obehöriga lärare. Dessa lärare kunde inte uppehålla den kompetenta nivå i undervisningen som de behöriga kunde och följden blev att elevprestationerna istället försämrades. Man fick avbryta reformgenomförande och planera mer på lång sikt så att lärarutbildningen hann med att utbilda tillräckligt många behöriga lärare. Vi talar då om tidsrymder på mer än fem år. Då fungerade åtgärden och elevprestationerna förbättrades påtagligt.

Forskningsperspektivet

Eleverna behöver så tidigt som möjligt få en utökad undervisningstid så att inga onödiga misstag uppstår och att talfakta utvecklas i och med utgången av år tre. Störst effekt uppnås om utökningen läggs så tidigt som möjligt och pay off kan också erhållas under lång tid, resten av grundskolan. Bättre start i skolan gör att eleverna tillägnar sig senare undervisning betydligt bättre. Enligt forskningen blir också elevers upplevelse av skolan mer positiv. Flera olika undervisningsproblem kan tidigt påverka elevernas matematikutveckling. Det första problemet rör fördröjd aritmetisk utveckling och uppträder mycket tidigt i grundskolan kanske redan i förskoleklassen, ett problem som beskrivits

tidigare. Inkorrekt tillämpning av tankeled eller beräkningsstrategier kan tillsammans med ± 1 -felet blockera att talfakta utvecklas hos eleverna. Speciellt ± 1 -felet kan uppstå tidigt, ofta under de två första åren. Elevers belief system etableras också tidigt och begränsar lätt vad eleverna uppfattar att matematik är och vad som värderas som matematik. Traditionellt finns ett beräkningsfokus i den svenska skolan, ett fokus som inte så lätt låter sig ändras. Skall detta förändras så att begreppsförståelse, resonemang och kommunikation inkluderas måste detta ske tidigt redan i årskurs ett. Detta sker inte utan vidare utan lärarna måste ha en omfattande fortbildning så att de också uppfattar matematik på ett mer vidgat sätt. Lärare för årskurserna 1–3 bör alltså få förtur till den planerade fortbildningen.

Kommunperspektivet och tillgången på behöriga lärare

Tillgången på behöriga lärare i matematik i grundskolans senare del verkar de kommande åren bli ganska knapp med tanke på att rekryteringen till lärarutbildningen ligger på en förhållandevis låg nivå, speciellt gäller detta lärare på högstadiet. Som det verkar i skrivandets stund kommer de ämneslärare som utbildar sig med inriktning mot gymnasieskolan att bli behöriga att undervisa i grundskolan också. Eftersom dessa lärare läser matematikdidaktik, som rör undervisningen i gymnasieskolan, medan de undervisningsproblem, som finns i grundskolan etableras tidigt, så saknar de i allmänhet kunskaper om dessa problem. De undervisningsproblem som behöver tacklas i gymnasieskolan är mer än tillräckliga enligt vad som framkommit av djupanalysen av TIMSS Advanced 2008 och 1995, utan att de också skall lösa problemen i grundskolan. Om ökningen av timtalet i grundskolan placeras uteslutande på högstadiet är alltså risken att tillgången på lärare är för knapp och att utbildade vikarier därför måste tillsättas. Ett sådant förhållande riskerar att försämra resultaten och elevernas prestationer, då lärarkompetensen är den faktor som har störst betydelse för utvecklingen av elevernas prestationer.

Egentligen skulle, om man bortsåg från problemens beskaffenhet, det vara bättre att lägga ökningen där det finns ledig och behörig lärarkapacitet. Detta skulle innebära att olika kommuner skulle ha olika timplan, vilket givetvis skulle försvåra för förlagen och för författarna av matematikböcker. En sammanvägning av olika faktorer från ovanstående resonemang pekar därför mot att någon timme av ökningen bör placeras på grundskolans senare del medan två timmar med fördel kan placeras tidigt där tillgången på lärare är mer oproblematiske.

Läraryrkesutbildningsperspektivet

Fortbildning är en mycket kostsam process för att förbättra elevernas prestationer i matematik. Det är givetvis bättre att i grundutbildningen av lärare inkludera de moment och kunskaper som dagens lärare huvudsakligen saknar. Problemet är givetvis större än så. Man kan inte förutsätta att de läraryrkesutbildare som skall svara för denna fortbildning har de kunskaper rörande forskningen som krävs för en effektiv grundutbildning. Universitetskanslerns granskning av lärosätenas kompetens är ett steg i rätt riktning. I Sverige finns få forskare som ägnar sig åt forskning inom detta ämnesdidaktiska område. Skall fortbildningen och grundutbildningen bli effektiv bör experter anlitas som via webben ger föreläsningar inom sina specialområden.

Det handlar också om vilka krav på kunnande som finns inom respektive läraryrkesutbildningsenhet. Om forskare vid läraryrkesutbildningen är väl medvetna om kraven som ställs på lärare, kan också adekvata krav ställas på läraryrkesstudenterna och på så sätt kan läraryrkesutbildningen bidra till att förbättra matematikundervisningen.

Även rekryteringen av läraryrkesstuderande har stor betydelse. Ju bättre förkunskaper och kunnande i matematik de har med sig in i läraryrkesutbildningen desto större är chanserna att de tillägnar sig sin utbildning effektivt. Detta talar för att vi behöver läraryrkesstuderande som har så bra matematikutbildning som möjligt så snabbt som möjligt. Vi kan då få bättre utbildade lärare i matematik, som kan bli verksamma i grundskolan och bidra till förbättringen snabbare.

Om det utökade timtalet placeras tidigt i grundskolans årskurser så kan det ta åtta år innan de studerande börjar i gymnasieskolan och ytterligare fyra eller fem år i läraryrkesutbildningen innan de kan tjänstgöra som lärare, en tidrymd om femton till sexton år i bästa fall. Detta verkar långt ifrån tillfredsställande. En annan attraktiv lösning skulle kunna vara att göra läraryrket mer attraktivt och därmed kunna rekrytera studerande med bättre förkunskaper.

Om timmarna läggs relativt sent i grundskolan i årskurs åtta eller nio så behövs sammanlagt cirka tio år innan dessa elever har genomgått läraryrkesutbildningen och kan tjänstgöra i grundskolan. Denna skillnad på fem eller sex år är givetvis inte avgörande men kan behöva beaktas till viss del. Detta talar också för att någon del av utökningen behöver placeras sent i grundskolan, gärna i åren åtta eller nio.

En snabbare väg att gå är att höja inträdeskraven för matematikläraryrkesutbildningen och förlänga den. Till en början skulle rekryteringen inte bli så bra men efterhand har det visat sig att sådana höjningar av inträdeskraven kan ha en rekryteringsbefrämjande effekt.

Det är också möjligt för regeringen att överväga införandet av ett förberedande utbildningsår eller förberedande termin i högskolorna och universiteten, en utbildning som förläggs till högskolorna och som förbereder studenterna för de fortsatta studier som de valt. Troligen ett kostsamt förslag ur ett kort tidsperspektiv men inte ur ett längre.

5. Slutsatser

Utifrån ovanstående analyser och utifrån forskningsöversikten med beskrivna konsekvenser kan en huvudslutsats och en alternativ slutsats dras. De argument, som talar för att placera två timmar i årskurserna 1–3 och en timme i årskurs 8 eller 9, rör de misstag som förekommer frekvent i Sverige och som visar sig ha sina rötter i de tidiga åren i grundskolan.

De förhållanden som lyfts fram nedan är inte några små misstag eller bagateller i sammanhanget utan allvarliga misstag som har avgörande betydelse för elevernas matematikutveckling. Den fördröjda aritmetiska utvecklingen och parallellt med detta, problem med utvecklingen av talbegreppet och flera problem, som utgör hinder för utveckling av talfakta utgör svårigheter för eleverna och etableras tidigt. Dessa hinder kan i sig vara blockerande misstag, misstag som alltså kan stoppa den fortsatta matematikutvecklingen för eleven. Även övergeneraliseringar kan etableras under de tidiga åren i grundskolan och försvåra elevernas fortsatta lärande i matematik. Lärares belief system kan inrikta matematikundervisningen mot ett procedurellt innehåll. Lärares belief system överförs framförallt i tidig ålder till eleverna. Detta tenderar sedan att styra undervisningen och elevernas uppmärksamhet mot vad som de då uppfattar som matematik under resten av deras skoltid. Dessa belief systems som elever har i dagens grundskola måste bli annorlunda om kursplanens samtliga förmågor skall få sin rättmätiga plats i undervisningen. Detta faktum utgör också ett argument för att placera en större del av ökningen av undervisningstiden tidigt i grundskolan.

För det andra talar den biologiska utveckling, som spelar stor roll för det abstrakta tänkandet, för att någon timme placeras i årskurs 8 eller 9. Svenska elevers prestationer i algebra behöver påtagligt förbättras, vilket är ett argument för en sen placering av någon timme.

En andra alternativ placering skulle vara att timmarna fördelas mer jämnt över åren. Det som talar för att någon timme skulle placeras i årskurs 4 till 6 är å ena sidan att negativa hela tal skall börja undervisas under dessa år enligt den nya kursplanen i matematik. Hela tal är ett avsnitt som ofta vållar elever problem. Även tal i bråkform, vilka också de är rationella tal får sin tonvikt i undervisningen under dessa år. Dessa förhållanden talar för en utökning där. Å andra sidan har eleverna i och med ökningen under de tidiga åren klarat av färdighetsträningen i aritmetik och även de frekventa misstagen kan vara åtgärdade. Det senare argumentet gör de båda alternativen i det närmaste likvärdiga. Möjligen finns fortfarande en övervikt för att placera två timmar i årskurserna 1–3 och en timme i årskurs 8 eller 9.

Referenser

- Baddeley, A., D. (1986). *Working Memory*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Baddeley, A., D. (1996). Exploring the Central Executive. *Quarterly Journal of Experimental Psychology: Human Experimental Psychology*. No. 49A, pp. 5–28.
- Baddeley, A., D. & Hitch, G., J. (1974). Working Memory. In *The Psychology of Learning and Motivation*. Bower, G. (Ed.), Vol. 8, pp. 47–90.
- Bentley, C. (2002). *The Roots of Variation of English Teaching. A Phenomenographic Study Founded on an Alternative Basic Assumption*. Göteborg Studies in Educational Sciences, 176. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Bentley, P-O. (2008). *Mathematics Teachers and Their Conceptual Models. A New Field of Research*. Göteborg, Studies in Educational Sciences, 265. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Bentley, P-O. (2008b). *Pupils' Arithmetic Knowledge and the Procedural Models in their Teaching*. (In Press).
- Bentley, P-O. (2008c). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS 2007 – En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar procedurer*. Skolverket: Analysrapport till 323, 2008.
- Bentley, P-O. (2009a). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007/2003. En jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan*. Skolverket: Analysrapport till 323.
- Bentley, P-O. (2009b). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp i gymnasieskolan*. Skolverket: Analysrapport till 336.
- Bentley, P-O & Bentley, C. (2011). *Det beror på hur man räknar – Matematikdidaktik för grundlärare*. Stockholm: Liber.
- Byrnes, J., P. (1992). The Conceptual Basis of Procedural Learning. *Cognitive Development*. No. 7. pp. 235–257.
- Byrnes, J., P. & Wasik, B., A. (1991). Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. *Developmental Psychology*. No. 27. pp. 777–786.
- Calderhead, J. (1996). Teachers: Beliefs and Knowledge. In Berliner, D. & Kalfee, *Handbook of Cognitive Psychology*.

- Cobb, P., Wood, T., Yackel, E. & McNeal, E. (1993). Mathematics as Procedural Instruction and Mathematics as Meaningful Activity: The Reality of Teaching for Understanding. In Davis, R., B. & Maher, C., A. (Eds.), *School, Mathematics and the World of Reality*. (pp. 119–134). Boston: Allyn & Bacon.
- Cooper, H., Nye, B., Charlton, K., Lindsay, J. & Greathouse, S., (1996). The Effects of Summer Vacation on Achievement Test Scores: A Narrative and Meta-Analytic Review. *Review of Educational Research*, Vo. 66, No, 3. pp. 227–268.
- Davis, B. (1997). Listening for Differences: An Evolving Conception of Mathematics Teaching. *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol. 28, No. 3, pp. 355–376.
- DeStefano, D., & LeFevre, J-A. (2004). The Role of Working Memory in Mental Arithmetic. *European Journal of Cognitive Psychology*. No. 16(3), pp. 353–386.
- Dixon, J., A. & Bangert, A., S. (2004). From Regularities to Concepts: The Development of Children's Understanding of a Mathematical Relation. *Cognitive Development*. No. 171. pp. 1–22.
- Dixon, J., A. & Dohn, M., C. (2003). Redescription Disembeds Relations: Evidence from Relational Transfer and Use in Problem Solving. *Memory and Cognition*. No. 31. pp. 1082–1093.
- Ekblad, E., (1990). Subitisering – en grundläggande beståndsdel i räkneförmågan. *Nämnamn*, 1990. NCM.
- Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In Ernest, P. (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art*. (pp. 249–254). New York: The Falmer Press.
- Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' Knowledge and Its Impact. In Grouws, D. A. (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 147–164. New York: Macmillan.
- Fuson, K., C. (1992). Addition and Subtraction. In Grouws, D., A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Haapasalo, L., (2003). The Conflict between Conceptual and Procedural Knowledge: Should we need to understand in order to be able to do or vice-versa? In *Towards Meaningful Mathematics and Science Education*. Haapasalo, L. & Sormunen, K. 2003 (Eds.). Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association. University of Joensuu. Bulletins of the Faculty of Education 86.

- Hiebert, J. & Carpenter, T., P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (Ed. Grouws, D., A.) New York: Macmillan Publishing Company.
- Johansson, B., S. (2005). Numeral Writing Skill and Elementary Arithmetic Mental Calculations. *Scandinavian Journal of Educational Research*. Vol. 49, No. 1, pp. 3–25.
- Larsson, S. (1983). *Paradoxes in Teaching*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Hillsdale; NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McDiarmid, G. W., (1993). Changes in Beliefs about Learning among Participants in Eleven Teacher Education Programs. In Calderhead, J. & Gates, P. (Eds.), *Conceptualising Reflection in Teacher Development*. (pp. 39–52. London: Falmer Press.
- Nespor, J., (1987). The Role of Beliefs in the Practice of Teaching. *Journal of Curriculum Studies*. 19(4), pp. 317–328.
- Pajares, F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 1992, vol. 62, no. 3, pp. 307–332.
- Pate-Bain, H., Achilles, C. M., Boyd-Zaharias, J. & McKenna, B., (1992). Class Size Does Make a Difference. *Phi Delta Kappan*, Vol 74, No. 3, pp. 253–256.
- Richardson, V., (1995). The Consideration of Beliefs in Staff Development. In Richardson, V. (Ed.), *A Theory of Teacher Change and the Practice of Staff Development: A Case in Reading Instruction*. New York: Teachers College Press.
- Rittle-Johnson, B. & Wagner Alibali, M. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology*. Vol. 91. No. 1. pp. 175–189.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R., S. & Alibali, M., W. (2001). Developing Conceptual and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*. No. 93. pp. 346–362.
- Siegler, R., S. (2003). Implications of Cognitive Science Research for Mathematics Education. In *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, Kilpatrick, J., Martin, W., B. & Schifter, D., E. (Eds.) pp. 219–233. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Silver, E., A. (1983). Probing Young adults' Thinking about Rational Numbers. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. No. 5, pp. 105–117.
- Singley, M., K. & Anderson, J., R. (1989). *The Transfer of Cognitive Skill*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Snyder, A., Bossomaier, T. & Mitchell, D., J. (2002). *Concept Formation: 'Object' Attributes Dynamically Inhibited From Conscious Awareness*.
- Spitzer, M., (1996). *Geist im Netz: Modelle für Lernen, Denken und Handeln*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, No. 23, pp. 39–50.
- Tall, D. & Thomas, M. (1986). The Value of the Computer in Learning Algebra Concepts. *Proceedings of the Tenth International Conference on Psychology of Mathematics Education*, London. pp. 313–318.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and Concept Definition in Mathematics With Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, No. 12, pp. 151–169.
- Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In *International Handbook of Mathematics Education*. Bishop, A., J. et al, (Eds.), pp. 289-325. Dordrecht: Kluwer.
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (Ed) Grouws, Douglas A. (pp. 127-146). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc, xi, 771 pp.
- TIMSS (2007), Tillgängligt webben: http://timss.bc.edu/timss2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf

LiliAnn Kling Sackerud,
Umeå universitet

Bilaga 2
Framgångsrik
undervisning
med fokus på
undervisningsformer

Innehållsförteckning

1. Inledning	69
2. Internationella och nationella granskningar av matematikundervisningen.....	70
Internationella studier.....	70
Nationella studier	71
Sammanfattning.....	73
3. Matematikundervisningen	74
Läromedlet	74
Kommunikation i matematikundervisningen.....	75
Metodutveckling inom matematikundervisningen.....	80
Sammanfattning	83
4. Styrdokumenten	85
Den nya kursplanen i matematik.....	85
Styrdokumenten efterlevs inte.....	86
Kompetensmålsreformen	86
Förändringar i den nya kursplanen i matematik.....	88
Sammanfattning	89
5. Tiden och undervisningen.....	90
Vad är tid?	90
Kvantitativ och kvalitativ tid.....	90
Förlorad tid	91
Den nationella timplanen	92
Undervisningstiden i matematik.....	92
Sammanfattning	92
6. Enkät om utökad undervisningstid	93
En tydlig tendens – ju tidigare desto bättre.....	93
Problemlösning och taluppfattning gemensamt för alla stadier.....	94
Sammanfattning	94
7. Slutsatser och förslag	95
Förslag.....	96
Referenser	98
Bilaga	101

1. Inledning

Regeringen har lagt ett förslag om att öka den garanterade undervisningstiden i matematik i grundskolan och motsvarande skolformer med 120 timmar. Skolverket har därför fått i uppdrag av regeringen att kartlägga och analysera hur en ökning av undervisningstiden bäst kan användas, för att i så stor utsträckning som möjligt stärka elevernas matematikkunskaper. Syftet med den här rapporten är att presentera ett brett underlag för att göra det möjligt att bedöma detta. Till grund för rapporten ligger internationella och nationella utvärderingar, relevant forskning samt svaren på en enkät som skickats ut i samband med rapporten.

Rapporten består av flera delar. Den inleds med en kartläggning av internationella och nationella granskningar och utvärderingar av matematikundervisningen. Fokus ligger på läromedlets och kommunikationens betydelse i undervisningen. I ett särskilt avsnitt i anslutning till detta presenteras ett antal utvärderingar av Skolverkets stora matematiksatsning som pågick under åren 2009–2011. Därefter följer en kartläggning av forskning som har undersökt hur styrdokumentet i matematik omsätts i den konkreta undervisningspraktiken. I den sista delen av kartläggningen problematiseras frågan om tiden och tidsanvändningen i ämnet.

Kartläggningen följs av en sammanställning av en enkät som skickats ut till matematikutvecklare och rektorer med syfte att samla in information om hur de anser att den utökade undervisningstiden bäst bör användas.

Efter presentationen av kartläggningen och enkäten avslutas rapporten med slutsatser och förslag angående med vilket fokus och i vilka årskurser de 120 timmarna bör placeras.

2. Internationella och nationella granskningar av matematikundervisningen

I det här avsnittet presenteras erfarenheter från internationella och nationella granskningar av den svenska skolmatematikens situation. De granskningar som lyfts fram har haft som fokus att jämföra och analysera kunskapsresultaten i ämnet. I den här texten ligger granskningarna till grund för att synliggöra matematikundervisningens utvecklingsbehov.

Internationella studier

Matematikresultaten i svenska skolor har sjunkit under flera decennier. Mellan åren 1995 och 2003 påvisades en mycket negativ utveckling, som därefter har fortsatt i något långsammare takt.

TIMSS (*Trends in international mathematics and science study*) är en IEA-studie¹ som kartlägger trender i hur elever presterar i matematik och naturvetenskap. I TIMSS 2003² där elever i årskurs 8 deltog, påvisas att Sverige har förhållandevis lite undervisningstid i matematik, 900 timmar. I en jämförelse mellan 28 europeiska länder är undervisningstiden i medeltal 1 065 timmar³. Spridningen är stor bland länderna, från 705 timmar i Bulgarien till 1 657 timmar i Portugal. Sverige hamnar med sina 900 timmar på 23:e plats. Med en ökning till de planerade 1 020 undervisningstimmar hamnar Sverige fortfarande under medeltalet, som då blir 1 069 timmar⁴.

Det är vanligare i Sverige än i den så kallade 20-landsgruppen⁵ att eleverna arbetar enskilt under lärarens handledning i matematik, och att läraren inte har längre genomgångar. Läxor och prov är också mindre vanligt förekommande i Sverige. En viktig slutsats som dras i TIMSS 2003 är att det finns ett starkt behov av en gemensam förståelse av den nationella kursplanen i matematik bland lärarkåren, med målet att höja undervisningskvaliteten i matematik.

PISA (*Programme for international student assessment*) är ett OECD-projekt som undersöker hur utbildningssystemen i olika länder rustar femton-åringar att möta framtiden. Målet med granskningen av just matematik är att utvärdera elevernas förmåga att integrera och tillämpa matematiska kunskaper och färdigheter i en mängd olika realistiska situationer. Det som står i fokus i PISA innebär en förskjutning i synen på matematik – från att se matematik

¹ IEA står för *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*.

² Skolverket (2004c).

³ European Commission, EACEA (2012).

⁴ Se bilaga i denna rapport.

⁵ De länder som tillhör EU eller OECD.

som en samling begrepp och färdigheter att bemästra till att förstå matematik som en meningsfull problemlösande aktivitet. I PISA 2003⁶ påvisas att de svenska eleverna har ett intresse för och en god och realistisk självuppfattning i matematik. De svenska eleverna anser även att deras lärare stöder dem i lärandet i större utsträckning än OECD-eleverna i genomsnitt. Dock konstateras en ökning av skillnader i prestationer mellan skolor och mellan enskilda elever, jämfört med tidigare PISA-studier. I PISA 2003 syns även tecken på att den sociala bakgrunden fått en allt större betydelse för svenska elevers resultat i matematik.

I TIMSS 2007⁷ deltog förutom elever i årskurs 8 för första gången även elever i årskurs 4. Resultaten av undersökningen indikerar att det ägnas mindre tid åt matematik i den svenska skolan jämfört med i många andra länder, och att detta framför allt gäller i årskurs 4. Den svenska matematikundervisningen tycks också i stor utsträckning domineras av enskilt arbete i läroboken. De tydliggjorda problemområdena i matematik som lyfts fram i denna undersökning är taluppfattning, aritmetik och geometri.

Nationella studier

Skolinspektionen har i uppdrag att utöva tillsyn över det offentliga skolväsendet. År 2009 redovisades en granskning av undervisningen i matematik⁸. Skolinspektionens arbete handlade i det här sammanhanget om att på ett övergripande plan granska skolhuvudmännens och skolornas insatser för att öka måluppfyllelsen och förbättra studieresultaten i ämnet matematik i grundskolan. Granskningen fokuserade på hur lärandemiljön stimulerade eleverna att utveckla de kompetenser som angavs i den dåvarande kursplanen i matematik.

En huvudslutsats som drogs i granskningen var att många elever inte får den undervisning som de har rätt till beroende på att få lärare har tillräcklig kunskap om målen i kursplanen och läroplanen. I intervjuerna framkom också att många lärare själva upplevde att de inte hade tillräckliga kunskaper om kursplanen i matematik. Kursplanen verkade därmed ha en svag eller obefintlig ledning och styrning för lärarna.

En annan slutsats som drogs i granskningen var att matematikundervisningen var mer inriktad mot kursplanens innehållsmoment än mot elevernas möjligheter att utveckla de centrala matematiska förmågorna. I rapporten hävdades att eleverna endast fick undervisning i begränsade delar av ämnet, och att de därmed inte gavs förutsättningar att utveckla olika förmågor såsom problemlösning, att se samband, resonera och kommunicera. Dessutom var lärarnas

⁶ Skolverket (2004b).

⁷ Skolverket (2008).

⁸ Skolinspektionen (2009).

undervisning inte tillräckligt varierad och anpassad för att möta olika elevers behov och förutsättningar. En rekommendation från Skolinspektionen var att lärarna i högre grad utarbetade och använde arbetssätt som gav alla elever möjligheter att utvecklas.

Ytterligare något som påvisades i granskningen var att undervisningen var starkt läromedelsstyrd. Detta ledde till att eleverna gavs begränsade möjligheter att utveckla sin förmåga till problemlösning, att använda logiska resonemang samt att sätta in matematiska problem i sitt sammanhang.

Skolverkets lägesbedömningar

Skolverket har varje år i uppdrag från regeringen att göra en samlad bedömning av den aktuella verksamheten och utvecklingen inom förskolan, skolan och vuxenutbildningen. Dessa bedömningar publiceras som så kallade lägesbedömningar. Bedömningarna utgår från forskning, utvärderingar och rapporter, med relevans för bland annat den svenska grundskolans matematikundervisning. Här nedan presenteras resultaten av de tre senaste bedömningarna från år 2009, 2010 och 2011, med fokus på grundskolans matematikundervisning.

I lägesbedömningen 2009⁹ analyseras matematikresultaten för elever under de tidiga årskurserna, och här tydliggörs att felaktiga strategier övas in och befästs under dessa skolår. Lägesbedömningen visar också att det är generellt allt färre elever i Sverige som når målen i matematik. I bedömningen konstateras att elevernas svårigheter kan knytas till undervisningens inriktning på beräkningar utan begreppslig förståelse. Matematikundervisningen präglas i stor utsträckning av procedurinriktat eget arbete. Ytterligare perspektiv på undervisningssituationen som ges i lägesbedömningen är att tidsbortfallet är stort i undervisningen, till exempel på grund av studie- och temadagar.

I lägesbedömningen 2010¹⁰ lyfts, med TIMSS Advanced 2008¹¹, som underlag, fram att elevernas matematikkunskaper från grundskolan inte är tillräckliga. Bristerna syns framför allt inom området algebra, och bedömningen konstaterar att undervisningen i alltför stor utsträckning är procedurinriktad. Man hänvisar till tidigare undersökningar av grundskolans matematikundervisning som har synliggjort att undervisningen ofta består av läroboksstyrt eget arbete. De slutsatser som dras i lägesbedömningen är att eleverna måste få tillfälle att diskutera matematik med sin lärare och sina klasskamrater. Gemensam reflektion och gemensamma diskussioner måste finnas i högre utsträckning. Det handlar med andra ord om att undervisningen behöver utvecklas för att stärka matematikkunskaperna.

⁹ Skolverket (2010a).

¹⁰ Skolverket (2011a).

¹¹ Publicerad i Skolverket (2009).

I lägesbedömningen 2011¹² står frågan om elevers olika behov i fokus. Rapporten hävdar att för att utveckla skolan och höja utbildningens kvalitet behöver elevernas resultat sammanställas och analyseras i relation till skolans verksamhet och de arbetssätt som förekommer i undervisningen. Ett anmärkningsvärt resultat i en attitydundersökning som Skolverket genomfört med 2000 lärare är att det skolorna lyckats med i *minst* utsträckning är att ge stimulans till särskilt duktiga elever och att ge särskilt stöd till elever i svårigheter. En viktig fråga som lyfts fram i lägesbedömningen från 2011 handlar om betydelsen av att förbättra lärarnas möjlighet till professionell utveckling i den dagliga skolverksamheten. Kollegialt lärande lyfts i bedömningen fram som ett arbetssätt som möjliggör gemensamma reflektioner över undervisningen och lärandet i matematik.

Sammanfattning

Internationella undersökningar av matematikundervisningen i olika länder visar att svenska elever till övervägande del arbetar enskilt, och att undervisningen i stor utsträckning styrs av läromedlet. Skillnader i prestationer mellan skolor och mellan enskilda elever har ökat över tid, och det ägnas i internationell jämförelse förhållandevis lite undervisningstid åt matematik i Sverige.

Nationella granskningar av matematikundervisningen konstaterar att kursplanen i matematik har en svag styrning i undervisningsverksamheten, och att elevernas svårigheter kan knytas till undervisningens inriktning på beräkningar utan begreppslig förståelse. Matematikundervisningen präglas i stor utsträckning av procedurinriktat och läroboksstyrt eget arbete. De slutsatser som lyfts fram i olika granskningar hävdar att eleverna måste få återkommande tillfällen att diskutera matematik med sin lärare och sina klasskamrater. Vidare behöver gemensam reflektion och gemensamma diskussioner förekomma i högre utsträckning, både i klassrumsarbetet och kollegor emellan.

¹² Skolverket (2012).

3. Matematikundervisningen

I föregående avsnitt presenterades några aspekter av undervisningen i matematik som lyfts fram som utvecklingsområden i nationella och internationella granskningar av ämnet. I det här avsnittet diskuteras två av dessa aspekter närmare, nämligen läromedlets roll och betydelsen av kommunikation i undervisningen. I slutet presenteras ett antal utvärderingar av Skolverkets matematiksatsning som genomfördes under åren 2009–2011. Syftet med att lyfta fram dessa utvärderingar här är att ge exempel på hur god matematikundervisning i grundskolan kan se ut för att på så sätt ge fler skolor och lärare möjligheter att utveckla och höja undervisningskvaliteten.

Läromedlet

I TIMSS 2007¹³ framgår att nästan alla elever i årskurserna 4 och 8 (93 respektive 95 % av eleverna) har lärare som uppger att de använder läroboken som huvudsaklig grund för lektionerna i matematik. Dessutom konstateras i studien att svenska elever under en stor del av undervisningstiden arbetar enskilt. Kombinationen av en läroboksstyrd undervisning med fokus på enskilt arbete tecknar bilden av att det under svenska matematiklektioner pågår mycket enskilt räknande i böcker. En sådan undervisning medför att läroplanen, kursplanen och läraren får en underordnad roll. Det medför också att den matematiska kunskap som utvecklas i klassrummet är påverkad och styrd av bokens innehåll och uppbyggnad.

Läroboken är endast ett verktyg bland många andra i matematikundervisningen menar Monica Johansson¹⁴ i sin avhandling. Hon hävdar att läraren måste vara medveten om bokens tillgångar och begränsningar när hon använder den. Ingen ifrågasätter väl att läroboken kan underlätta en lärars vardag, men den kan också utgöra en onödig begränsning när den styr för mycket. Den kan i sämsta fall göra läraren alltför låst och hindra en mer öppen och variationsrik undervisning. I avhandlingen undersöker Johansson lärobokens styrande roll ur olika perspektiv. Det handlar både om vad boken erbjuder och om läroboken i förhållande till styrdokumentet. Det viktigaste resultatet av hennes studier är att läroboken styr betydligt mycket mer än vad man kan tro. Johansson argumenterar för att lärare bör fråga sig vad boken kan tillföra, och vad som i stället måste tas in från annat håll. Det innebär att fundera över och problematisera vilket verktyg matematikboken utgör. I Johanssons sammanläggningsavhandling, som består av fyra artiklar, påvisas i den tredje artikeln att två av de tre

¹³ Skolverket (2008).

¹⁴ Johansson (2006).

lärarna som deltog i studien trots goda didaktiska och matematiska kunskaper ändå styrdes av läroboken. Detta kan vara ett tecken på att det inte bara handlar om en osäkerhetsfråga för nyblivna lärare, utan något som kan röra större delar av lärarkåren.

I en rapport¹⁵ från Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) och Umeå forskningscentrum för matematikdidaktik (UFM), synliggörs brister i läromedlen i matematik när det kommer till kompetensmålen i den dåvarande kursplanen i matematik (Lpo 94)¹⁶.

Den vanligaste uppgiftstypen i läromedlen är att utgå från en given regel eller ett löst exempel och därefter använda en algoritm – utan att behöva aktivera, använda eller träna på fler kompetenser. En slutsats som dras utifrån detta är att läroböckerna är skevt fokuserade på procedurhantering. Man kan emellertid se en skillnad mellan årskurserna. De uppgifter som eleverna arbetar med under årskurserna 1–3 innehåller generellt sett fler kompetensaktiviteter än i högre årskurser. Ett exempel är användningen av resonemangskompetens som förekommer i årskurserna 1–3 (47 % av uppgifterna i det undersökta läromedlet), årskurserna 4–6 (15 % av uppgifterna i det undersökta läromedlet) och i årskurserna 7–9 (24 % av uppgifterna i det undersökta läromedlet).

Kommunikation i matematikundervisningen

De internationella och nationella utvärderingar av matematikundervisningen som presenterades i föregående avsnitt lyfte fram bristen på kommunikation i klassrummet som en bidragande orsak till minskad måluppfyllelse i matematik. Här nedan presenteras därför resultaten av några studier som har fokuserat på just kommunikationen i matematikundervisningen.

Björklund Boistrup

Björklund Boistrups avhandling¹⁷ handlar om klassrumsbedömning, en aspekt som påverkar elevers engagemang och lärande i bland annat matematik. I fokus för avhandlingen står kommunikationen mellan lärare och elever i matematikklassrummet. I avhandlingen beskrivs hur ett generellt fokus på processer i undervisningen erbjuder rika möjligheter för elevers lärande i matematik. När bedömningshandlingarna har detta processfokus visar Björklund Boistrup

¹⁵ NCM/UFM (2009).

¹⁶ NCM använder, liksom forskningen, uttrycket kompetensmål. Kompetensmålen är de mål i läroplanen som beskriver de matematiska kompetenser som eleverna ska ges möjlighet att utveckla i undervisningen, till exempel förmågan att föra resonemang eller lösa problem. När man talar om Lgr 11 används i stället uttrycket de matematiska förmågorna i de långsiktiga målen. Av tydlighetsskäl används fortsättningsvis framför allt uttrycken matematiska kompetenser och kompetensmål i den här rapporten. När det specifikt handlar om den nya kursplanen i matematik används dock ibland uttrycket matematiska förmågor.

¹⁷ Björklund Boistrup (2010).

att möjligheterna för elevernas lärande ökar, med avseende på hur de hanterar och tillämpar matematiska begrepp och metoder, samt deras förmåga till kritisk reflektion över de matematiska tillämpningarna. Resultaten i avhandlingen visar också på betydelsen av öppna frågor. Författaren menar att öppna frågor behövs för att undervisningen ska kunna fokusera på processer såsom undersökning och problemlösning, resonering och argumentering.

I de studerade klassrummen urskiljde Björklund Boistrup fyra undervisningssätt eller undervisningsstilar. Två av dessa stilar ska särskilt nämnas här eftersom de har relevans för den här rapporten. De två stilarna är att 1) allt kan tas som utgångspunkt för en diskussion samt 2) att resonemang tar tid. I den förra undervisningsstilen står de matematiska processerna i fokus och likaså semiotiska inslag såsom ritande, förklarande gester och språk. De frågor som ställs är till övervägande del öppna till sin karaktär. Den senare undervisningsstilen, som betonar att resonemang tar tid, är en stil som fokuserar på matematiska processer som problemlösning och resonering. Här är både eleven och läraren mycket aktiva i samtalet, som tillåts ta tid.

En huvudsaklig slutsats i avhandlingen är att sättet som läraren förhåller sig till bedömning leder till olika möjligheter för elevens självständighet och lärande. Att både eleven och läraren är aktiva i undervisningssamtalet är av stor vikt för ett matematiklärande där processen står i centrum.

Emanuelsson

Emanuelsson kombinerar två intressen i sitt avhandlingsarbete¹⁸. Dels intresset för att studera lärandet, särskilt lärarens lärande, dels intresset för att undersöka vad läraren riktar sin uppmärksamhet mot i undervisningen. Han menar att det i klassrumsinteraktionen skapas ett rum för lärande, som potentiellt är öppet för både elevens och lärarens erfarenhet.

Några begrepp som beskriver vad som händer i denna interaktion är de välkända begreppen *lotsning* och *scaffolding*¹⁹. Emanuelsson tillför även ytterligare ett begrepp som han benämner *lyssnande*. Tre kvalitativt olika perspektiv på lyssnande beskrivs i avhandlingen. Det är det *utvärderande*, det *tolkande* och det *hermeneutiska lyssnandet*.

När interaktionen har som mål att läraren vill ha ett specifikt svar handlar det om det utvärderande lyssnandet. Läraren ansvarar i detta fall för utvecklingen av undervisningstillfället, och det bedöms bara som verkningfullt om eleven förmår avge rätt svar på frågan. När frågan i stället är sådan att läraren inte på ett enkelt sätt kan förutse elevens svar handlar det om det tolkande lyssnandet. Interaktionen ger här eleven möjligheter att motivera, utveckla och

¹⁸ Emanuelsson (2001).

¹⁹ *Scaffolding* kan beskrivas som jagstöttning eller byggnadsställning.

förklara sitt svar på frågan. Målet är att elevens meningsskapande ska göras begripligt, men trots detta så påverkar inte elevens svar undervisningstillfallets fortsatta utveckling. Det hermeneutiska lyssnandet påminner om det tolkande lyssnandet i och med att det fokuserar på elevens sätt att förstå, men nu får eleven även utrymme att presentera fler möjliga lösningar på problemet. Elevens förförståelse blir på så sätt ett innehåll i undervisningssituationen, vilket påverkar lektionens vidare utveckling.

Emanuelsson menar att det väsentliga inte är hur en fråga är formulerad. Det viktiga är i stället hur frågan besvaras av eleverna, och hur läraren tar hand om innehållet i deras svar. Emanuelsson beskriver vad han kallar *vertikaliserande* och *horisontaliserande* frågor. En vertikaliserande fråga är när lärandets objekt förflyttas från innehållet (stoffzonen) till lärandet (den konceptuella zonen). Det innebär att vertikaliserande frågor öppnar för en analys av stoffet, eller en generalisering av flera stoff, till en gemensam princip eller förklaringsmodell. Frågorna öppnar med andra ord för en fördjupning av innehållet mot mer generellt giltiga, djupare, mer fullständiga eller mer inkluderande sätt att förstå. De horisontaliserande frågorna innebär att objektets inramning skiftar till följd av en fråga. Exempelvis så kan en matematisk modell, som tidigare behandlats i undervisningen, genom en fråga förflyttas till ett annat sammanhang. En sådan fråga öppnar för en breddning av innehållet, och den ger eleverna förutsättningar att utveckla både sin resonemangs- och kommunikationsförmåga.

Persson

Persson²⁰ undersöker vad som sker under matematiklektioner. Hon har under fyra år följt 16 informanter från lärarstudenter till färdiga verksamma lärare. Studierna består av återkommande intervjuer samt deltagande klassrumsobservationer. I sina studier konstaterar Persson att nära hälften av undervisningstiden vid observationstillfällena utgörs av genomgångar och gemensamma samtal mellan läraren och eleverna, vilket är anmärkningsvärt och glädjande.

I den teoretiska bakgrunden till studien beskrivs olika kommunikationsformer och kommunikationsmönster i undervisningssituationen. Utgångspunkten är ett designteoretiskt perspektiv²¹ där man utgår från tecken på lärande. I människans interaktion med andra disponerar hon ett nätverk av tecken och teckensystem, som har viktiga både sociala och kognitiva funktioner. Språkets betydelse är centralt i lärandeprocessen och det synliggörs i studien som en meningsskapande princip, där det i lärandesammanhang handlar om att forma kommunikativa och meningsfulla helheter.

²⁰ Persson (2009).

²¹ Se även Björklund Boistrup (2010).

I de klassrum som Persson har undersökt domineras undervisningen av en kommunikativ, interaktiv ansats. Denna ansats beskriver Persson som antingen dialogisk eller auktoritativ. I den önskvärda dialogiska ansatsen vrider och vänder läraren, tillsammans med eleverna, på de frågor och svar som uppstår. När det uppstår ”felaktiga” svar tas de som utgångspunkt för gemensamma undersökningar, nya frågor och nya kunskaper. Persson har, som framgår, många beröringspunkter med både Björklund Boistrup och Emanuelsson.

Norén

I Noréns avhandling²² beskrivs och problematiseras också klassrumsinteraktionen i undervisningen i matematik. Hon konstaterar att i både de enspråkiga och tvåspråkiga undervisningspraktikerna som hon har observerat förekommer kommunikativ undervisning i stor utsträckning. Detta kan jämföras med tidigare svenska studier där den dominerande bilden är att eleverna framför allt arbetar tyst och enskilt i sina läroböcker. Den tid som eleverna tillbringade med att enskilt lösa uppgifter i matematikboken var förhållandevis låg i de undervisningspraktiker som Norén studerade. Det förekom diskussioner såväl i helklass som i smågrupper, och både lärare och elever var engagerade i matematikinnehållet. I de flerspråkliga klassrummen verkade matematikundervisningen bli mer transparent och explicit till följd av en utbredd kommunikativ ansats. Norén menar att denna kommunikation öppnar för en mer utvecklande och lärande undervisning, vilket är till gagn för alla elever. Både Perssons och Noréns studier ger tydliga exempel på att det i många matematikklassrum i dag skapas goda möjligheter till lärande.

Falu kommun

I Falu kommun har det gjorts en kartläggning av bland annat undervisningen i matematik²³. Syftet med kartläggningen var att, med hjälp av observationer och intervjuer, ge en fördjupad kunskap om hur matematikundervisningen ser ut i de kommunala grundskolorna samt att identifiera möjligheter till utveckling av undervisningen för att öka måluppfyllelsen. En huvudfråga som problematiserades i kartläggningen var orsaken till att kommunikationen i matematikundervisningen inte nådde ett djup. Den kommunikation som observerades var till stor del av lotsande och sluten karaktär. Alldeles för lite tid ägnades åt matematisk reflektion, att kommunicera likheter och olikheter och därmed att generalisera och se matematiska samband.

²² Norén (2010).

²³ Sterner et. al. (2011).

National council of teachers of mathematics – NCTM

De studier som redovisats hittills i avsnittet framhåller alla behovet av en god kvalitativ kommunikation i klassrummet. Studierna visar att ett processinriktat synsätt hos läraren kan skapa rika möjligheter till en kommunikation, där eleverna får möjligheter att ställa frågor, hantera matematiska begrepp och metoder samt kritiskt reflektera över tillämpningar, och inte minst över sitt eget lärande i matematik. En fråga som blir relevant i sammanhanget är då hur denna kommunikation bör se ut och hanteras i relation till grundskolan olika stadier.

Den amerikanska organisationen National council of teachers of mathematics (NCTM) har gett ut skriften *Principles and standards for school mathematics*²⁴. I skriften finns många värdefulla resonemang om hur kommunikationen i matematikundervisningen kan se ut under olika årskurser.

Under avsnittet om kommunikation i NCTM:s skrift beskrivs att målet med matematikundervisningen är att den ska göra det möjligt för alla elever att kunna följande:

- *Organize and consolidate their mathematical thinking through communication.*
- *Communicate their mathematical thinking coherently and clearly to peers, teachers and others.*
- *Analyze and evaluate the mathematical thinking and strategies of others.*
- *Use the language to express mathematical ideas precisely*²⁵.

I anslutning till avsnittet om kommunikation lyfter NCTM fram två centrala frågor som enligt dem bör ställas på alla skolnivåer. Dessa är:

- *What should communications look like?*
- *What should be the teacher's role in developing communication*²⁶?

I anslutning till dessa frågor beskrivs klassrumssituationer, elevexempel samt undervisningsepisoder som illustrerar olika matematiska förmågor. NCTM ger dessutom exempel på hur lärarens arbete och uppdrag kan beskrivas och specificeras under olika årskurser:

Kommunikation i matematikämnet under olika årskurser enligt NCTM

För verksamheten från förskola till och med årskurs 2 gäller enligt NCTM följande:

- Läraren måste tålmodigt och ihärdigt ge eleverna förutsättningar för varierade former av kommunikation.
- Läraren bör använda en korrekt matematikvokabulär.

²⁴ NCTM (2000).

²⁵ NCTM (2000) sid. 128, 194 och 268.

²⁶ NCTM (2000) sid. 128 och 130.

För verksamheten under årskurserna 3 till och med 5 gäller att:

- Läraren behöver tydligt och klart diskutera med eleverna vilka av deras kommunikationsstrategier som är effektiva respektive ineffektiva.
- Läraren behöver hjälpa eleverna att förvärva ett matematiskt språk.

För verksamheten under årskurserna 6 till och med 8 gäller att:

- Läraren bör skapa en klassrumssituation där eleverna känner sig trygga att uttrycka sina tankar öppet och ärligt, utan risk för att förlöjligas. Detta kräver skicklighet och gott omdöme.

Metodutveckling inom matematiksatsningen

Matematiksatsningen var ett projekt som pågick under åren 2009–2011. Under dessa år fördelades projektmedel till skolhuvudmän som stöd till lokala utvecklingsprojekt. Syftet var att höja kvaliteten i matematikundervisningen. Slutredovisningen av projektet visade att de över 12 000 lärare som deltagit överlag uttryckte att satsningen lett till bättre undervisning²⁷. Satsningen, menade lärarna, hade gett dem tid att utveckla det kollegiala samarbetet och förbättra undervisningsmetoderna.

Matematiksatsningen hade som utgångspunkt att motverka de tydligt påvisade bristerna i undervisningens kvalitet. Därigenom fick metodutveckling en central roll i satsningen. Nationella och internationella studier av undervisningen i matematik visar, som framgått av tidigare avsnitt i rapporten, på genomgående problem i resultaten till följd av undervisningsmetoderna. De skolprojekt som genomfördes under matematiksatsningen med avseende på metodutveckling hade därför som utgångspunkt att ge kunskap om vilka metoder som, i vilket sammanhang, skulle kunna öka kvaliteten i undervisningen och stärka måluppfyllelsen.

I de redovisade utvärderingarna av projektet²⁸ framkommer flera viktiga faktorer som kan göra det möjligt att höja kvaliteten i matematikundervisningen. De faktorer som lyfts fram är att ge *tid* för lärare att diskutera innehållsliga undervisningsfrågor, att formulera *tydliga syften och mål* med undervisningen, att inte förlora fokus på *det matematiska innehållet* i samband med en specifik undervisningsmetod, samt avslutningsvis att det *stöd* (statligt, kommunalt och lokalt) som ges håller hög kvalitet.

Hur fungerade insatserna?

I Rambölls utvärdering av matematiksatsningen²⁹ låg fokus på hur effektivt utvecklingsinsatserna fungerat, med syfte på att höja kvaliteten i undervisningen.

²⁷ Skolverket (2011d).

²⁸ Skolverket (2011e), Skolverket (2011f), Skolverket (2011g).

²⁹ Ramböll (2011).

Utvärderingen beskrev, värderade och förklarade resultatet av matematiksatsningen och problematiserade samtidigt hur satsningen hade fungerat som intervention och metodutveckling.

I Rambölls resultatanalys lyftes bland annat problemen med överförbarhet fram. Med överförbarhet avses här hur man får en insats som utvecklats lokalt att fungera även för andra och i andra sammanhang. Utvärderingen visade att matematiksatsningen inte gynnat den nationella likvärdigheten, eftersom det var skolor med goda resultat i matematik (andelen elever som blivit godkända i årskurs 9) som till övervägande del deltagit i satsningen. Vad gällde de enskilda skolorna var ett tydligt resultat att lärarkollegierna ansåg att de hade fått en god kompetensutveckling genom möjligheterna till gemensamma kollegiala samtal. Ett problem i samband med satsningen var dock att de deltagande skolorna inte hade sett sin roll som piloter, vilket försvårat möjligheterna till den önskade överförbarheten och spridningseffekterna.

Learning study, lesson study och IKT

Ett positivt resultat som redovisades i en utvärdering av matematiksatsningen, *Lesson study och learning study samt IKT*³⁰, var att användningen av lesson study och learning study under projektet hade lett till förbättringar, både när det gällde elevernas lärande och lärarnas syn på det matematiska innehållet. Innehållet hade kommit i fokus på ett sätt som lärarna inte varit vana vid, genom att de i högre grad hade tänkt på elevernas lärande utifrån deras förståelse av innehållet. De deltagande lärargrupperna lyfte fram möjligheten att samarbeta med sina kollegor som givande. Ytterligare en aspekt som framkom i utvärderingen var att lärargrupperna genom arbetet med lesson study och learning study hade utvecklat framgångsrika relationer mellan innehåll och förmågor i matematikundervisningen. Lärarna hade med andra ord utvecklat sin undervisning.

I de genomförda IKT-projekten under matematiksatsningen visade det sig att lärarna hade utvecklat sitt samarbete, och att de kunskapsmässiga dialogerna mellan lärare och elever hade ökat. Både lärare och elever framhöll i utvärderingen att IKT möjliggjorde en ökad variation och en mer mångsidig undervisning. Ytterligare resultat som redovisades var att lärarna, till följd av IKT-användningen, nu använde mer laborativt material och var mindre läromedelsstyrda. Styrkan med den interaktiva skrivtavlan lyftes också fram, i jämförelse med elevernas ensamarbete med egna datorer. Det handlade om att möjligheterna till gemensamma samtal ökat, och därigenom ett ökat fokus på bland annat den kommunikativa förmågan i kursplanen.

³⁰ Skolverket (2011f).

Laborativ matematik

Det övergripande målet för satsningar på laborativ matematik är, och har alltid varit, att förbättra undervisningen så att eleverna i högre grad ska nå målluppfyllelse. Det har inom ramen för utvärderingen av laborativ matematik inom ramen för matematiksatsningen, *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder*³¹, inte varit möjligt att kartlägga detta samband, utan rapporten syftade främst till att synliggöra faktorer som skulle kunna påverka undervisningskvaliteten i en positiv riktning. Vad som utvärderades var med andra ord om det genom de skolprojekt som hade fokus på laborativ matematik skapats nya möjligheter inom undervisningen, vilket i sin tur skulle kunna leda till ökad målluppfyllelse.

I rapporten fokuserades lärares undervisning och hur det aktuella materialet hade använts. Därutöver gjordes en analys av huruvida undervisningen hade gjort det möjligt för eleverna att förstå det matematiska innehållet på ett adekvat sätt. Resultatet visar att det laborativa materialet i sig kommit i alltför stort fokus, och att de aspekter som materialet hade haft för avsikt att belysa kommit i skymundan. Laborationerna hade på så sätt ibland blivit ett hinder för elevernas lärande.

Rapporten visade också att arbetet med laborativ matematik hade medfört variation i undervisningen och minskat mängden enskilt arbete i läroboken, men att det däremot saknades ett tydligt matematiskt innehållsperspektiv. De framgångsrika lektionerna som redovisades hade klara mål för lektionerna, både i ett kort- och långsiktigt perspektiv. En viktig slutsats som drogs i rapporten var att arbetssätten, arbetsformerna och materialet enbart är medel för att nå ett mål, och att medlen aldrig får bli överordnade målen. Huvudavsikten med en laboration är, enligt författarna till rapporten, att eleverna ska ges möjligheter att upptäcka matematiken och samtidigt utveckla fler förmågor – såsom att föra och följa matematiska resonemang och använda matematiska uttrycksformer. En av de största förtjänsterna med de laborativa projekten inom ramen för matematiksatsningen sägs avslutningsvis i rapporten vara lärarnas ökade medvetenhet om behovet av att gå vidare med sin egen kompetensutveckling av didaktiska ämneskunskaper, samt att de fått ett gemensamt intresse för och fokus på matematikundervisningen på skolan.

Även Rystedt & Trygg³² har i en kunskapsöversikt synliggjort och problematiserat styrkor och svagheter med laborativt arbete i matematik. Författarna menar att de laborativa materialen i sig inte ger eleverna matematiska insikter, men att de i samband med lämplig undervisning kan spegla de bakomliggande matematiska begreppen. Klassrumsaktiviteterna kan därigenom bidra till att skapa gemensamma referenser i lärandesituationen. För lärandet i matematik

³¹ Skolverket (2011e).

³² Rystedt & Trygg (2010).

är elevers förmåga att kunna hantera olika representationer av stor betydelse. En medveten undervisning med representationer kan underlätta elevers förståelse och därigenom förhindra att svårigheter uppstår. I de sammanfattande slutsatserna menar Rystedt & Trygg att en laborativ matematikundervisning ger tillfällen till varierade sätt att både analysera och bedöma elevernas kunskande. De understryker att lärarens roll är avgörande för vilken effekt den laborativa matematikundervisningen får för elevernas lärande.

Matematik i grundsärskolan

I utvärderingen av matematiksatsningen i grundsärskolan, *Matematikundervisningen i grundsärskolan*³³, konstateras att det råder samma principer för god matematikundervisning i grundsärskolan som i grundskolan.

Det teoretiska ramverket i utvärderingen utgår från tre huvudområden. Dels det matematiska innehållet (Vad handlar det om?) dels den matematiska kompetensen (Vad innebär det?) och slutligen undervisningen (Hur genomförs denna?). Det handlar alltså om att utgå från att både det matematiska innehållet och det sätt som eleverna ges förutsättningar att ta del av innehållet på har betydelse för vad eleverna lär sig. Matematikinnehållet består av både ett sakinnehåll, det centrala innehållet i kursplanen, och ett kompetensinnehåll med kompetensrelaterade aktiviteter, förmågorna i kursplanen.

Sist i utvärderingen identifieras ett antal gemensamma framgångsfaktorer för undervisning och lärande i matematik. Dessa faktorer kan ses som en sammanfattning av samtliga utvärderingar som presenterats ovan. De framgångsfaktorer som lyfts fram innefattar:

- Variation i arbetssätt och arbetsformer.
- Fokus på elevens egna tankestrategier.
- Avgränsning till ett matematiskt område i taget.
- Uppmuntran av eleverna till att delta aktivt i undervisningsverksamheten.

Sammanfattning

I svensk matematikundervisning ägnas förhållandevis mycket tid till självständigt arbete. Kombinationen av en läroboksstyrd undervisning och mycket enskilt arbete tecknar bilden av att det under svenska matematiklektioner pågår mycket enskilt räknande i matematikböckerna. Detta medför att läroplanen, kursplanen och läraren får en underordnad roll och att den matematiska kunskapen som utvecklas i klassrummet är påverkad och styrd av bokens innehåll och uppbyggnad.

I de utvärderingar av Skolverkets matematiksatsning som gjorts har flera metodutvecklande exempel kommit fram. Utvärderingen av de projekt som

³³ Skolverket (2011g).

handlade om lesson study och learning study visade att dessa ledde till att innehållet i undervisningen kom i fokus på ett framgångsrikt sätt, och att lärargruppen utvecklade framgångsrika relationer mellan kursplanens innehåll och förmågor i matematikundervisningen. I en utvärdering av laborativ matematik var en viktig slutsats att arbetsätten, arbetsformerna och materialet enbart är medel för att nå ett mål, och att medlen aldrig får bli överordnade målen.

4. Styrdokumentet

I följande avsnitt beskrivs och diskuteras styrdokumentet i ämnet matematik, samt forskning om hur styrdokumentet fungerar när de omsätts i en klassrumspraktik.

Den nya kursplanen i matematik

Den nya kursplanen i matematik³⁴ beskriver att syftet med skolmatematiken är att matematiken ska kunna användas i vardagen och inom olika ämnesområden. Undervisningen ska bidra till att utveckla elevernas intresse för matematik och deras tilltro till den egna förmågan i ämnet. Ett mål är att undervisningen i matematik ska bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem, samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat. Genom undervisningen ska eleverna också ges förutsättningar att utveckla en förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder samt deras användbarhet.

I den del av kursplanen som beskriver syftet med ämnet tydliggörs de fem förmågorna³⁵. Dessa är:

- Förmågan att formulera och lösa problem samt värdera valda strategier och metoder (problemlösningskompetens).
- Förmågan att använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp (sambandskompetens).
- Förmågan att välja lämpliga metoder för att göra beräkningar och utföra rutinuppgifter (procedurhanteringskompetens).
- Förmågan att föra och följa matematiska resonemang (resonemangskompetens).
- Förmågan att använda matematikens uttrycksformer för att samtala, argumentera och redogöra (kommunikationskompetens).

Efter den inledande texten som beskriver syftet med ämnet och förmågorna följer det centrala innehållet för årskurserna 1–3, 4–6 och 7–9. Innehållet omfattar kunskapsområdena taluppfattning och tals användning, algebra, geometri, sannolikhet och statistik, samband och förändring samt problemlösning.

³⁴ Skolverket (2011b).

³⁵ Se även kompetensmålen i NCM/UFM (2009).

Styrdokumentet efterlevs inte

Skolinspektionen menar att många elever inte får den undervisning i matematik som de har rätt till enligt styrdokumentet³⁶. De får inte förutsättningar att utveckla olika kompetenser såsom problemlösning, att se samband, resonera, kommunicera och genomföra procedurer. Många lärare har otillräckliga kunskaper om kursplanen i matematik, och den har därmed svag eller obefintlig styrning och vägledning för lärarna. I undervisningen har kompetensmålen en underordnad roll, och fokus ligger i stället på det som i den nya kursplanen benämns centralt innehåll. Lärarnas undervisning är heller inte tillräckligt varierad och anpassad för att möta olika elevers behov och förutsättningar.

För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. I tidigare utvärderingar som gjorts av Skolinspektionen har det framkommit att många lärare tycker att det är svårt att hitta arbetsformer där de övergripande kompetenserna kan tränas.

Kompetensmålsreformen

NCM och UFM har sedan 2008 samarbetat i ett forskningsprojekt för att förstå vilken roll de svenska nationella matematikproven har i skolans arbete med att implementera styrdokumentets kompetensmål.

I en studie³⁷ beskriver och analyserar NCM och UFM hur en ändamålsenlig undervisning ser ut för att eleverna ska få möjlighet att utveckla sina matematiska kompetenser samt vilka orsakerna är till varför eleven erbjuds just den undervisningen de får. Det som problematiseras i studien är relationen mellan styrdokumentet, undervisningen och elevernas lärande.

I studien menar man att det är otillräckligt att formulera målen med matematikutbildningen enbart som innehållsmål i styrdokumentet. Det är nödvändigt att även formulera mål som berör den process som det innebär att utöva matematik och de kompetenser som behövs i denna process. Denna förändring av synen på matematikutbildningen brukar beskrivas som *kompetensmålsreformen*. Forskarna på NCM och i UFM menar att reformen sammanfattar väl vad den internationella matematikdidaktiska forskningen anser vara det mest angelägna för att förändra skolmatematiken.

En inflytelserik och genomarbetad beskrivning av denna förändring ges i den tidigare nämnda *Principles and standards*³⁸. I denna skrift beskrivs ett antal processmål i matematik som innefattar problemlösning, kommunikation,

³⁶ Skolinspektionen (2009).

³⁷ NCM/UFM (2009).

³⁸ NCTM (2000).

samband och representation. En liknande beskrivning av målen i matematik återfinns även i det danska KOM-projektet³⁹ och i den amerikanska *Adding it up*⁴⁰.

NCM och UFM utgår från två fundamentala principer i sin beskrivning av kompetensmålen. Dessa är principen om *kompetenser som en dimension av kunnande* samt principen om *kompetenser som målstyrning*. Dimensionen om kunnande innebär att varje matematisk kompetens kan tillämpas på olika typer av matematiskt innehåll, både när det gäller nivå och när det gäller matematiskt område. Dimensionen om kompetenser som målstyrning åsyftar, förutom detta, även något som kan formuleras som tydliga lärandemål, och som därmed kan påverka undervisningen inriktning. I NCM:s och UFM:s studie beskrivs kompetensmålen mer ingående:

Kompetensmålen i matematik enligt NCM och UFM

Problemlösningskompetens handlar om att kunna lösa uppgifter där någon färdig lösningsmetod inte är tillgänglig innan arbetet börjar.

Sambandskompetens är förmågan att länka samman matematiska företeelser och representationer av dem. Som ett exempel ges att se multiplikation som upprepad addition.

Procedurhanteringskompetens innebär att identifiera vilken procedur som är lämplig för en viss uppgiftstyp.

Resonemangskompetens innefattar förmågan att motivera val och slutsatser genom argumentation. Det handlar även om undersökande verksamhet som att till exempel urskilja mönster samt att formulera, förbättra och undersöka hypoteser.

Kommunikationskompetens uttrycker förmågan att kunna kommunicera och utbyta information i muntlig eller skriftlig form.

Representationskompetens innebär förmågan att ersätta en matematisk företeelse med en annan. Exempelvis att representera en abstrakt företeelse (ett matematiskt begrepp) med ett konkret material (en boll) eller ett mentalt objekt (en tanke om).

Införandet av kompetensmål i styrdokumentet kan ses som ett av de viktigaste verktygen för att stödja och styra utvecklingen av matematikutbildningen och motverka lärandesvårigheter. Dessa mål är dock svårare att beskriva och tolka än innehållsmålen och riskerar därigenom en svagare förankring i skolverksamheten.

I sin undersökning har NCM och UFM vidare genom intervjuer synliggjort hur lärare påverkas av kursplanen. Det handlar om lärares tolkningar, värde-

³⁹ Niss & Jensen (2002).

⁴⁰ Kilpatrick, Swafford & Findell (2001).

ringar och intentioner samt hur lärare har bearbetat sina tolkningar av kursplanen. På frågan om vilka lärandemål som lärarna urskiljer i undervisningen i matematik, går de flesta svar att kategoriseras under rubrikerna innehållsmål, affektiva mål, konkretionsmål och kompetensmål. Studien visar att det är oklart om lärarna ser kompetenserna som mål eller medel, och många lärare förmedlar i intervjuerna ett intryck av att inte ha reflekterat över relationen mellan målen och arbetssätten.

I studien har de aktiviteter som syftar till att utveckla kompetenser analyserats under olika årskurser. I denna analys framkommer att det förekommer fler kompetensaktiviteter under årskurserna 1–3 och 7–9 jämfört med under årskurserna 4–6. En orsak som anges till detta är att det verkar som om matematiken under årskurserna 4–6 i stor utsträckning handlar om algoritmisk träning med enkla tillämpningar inom aritmetik. Ytterligare en tendens som kan utläsas i materialet är att användningen av kommunikation i undervisningen minskar från årskurserna 1–3 (44 % av undervisningstiden) via årskurserna 4–6 (36 % av undervisningstiden) till årskurserna 7–9 (28 % av undervisningstiden).

Studien summeras med att matematikundervisningen är otillräcklig när det gäller möjligheterna för eleverna att utveckla centrala matematiska kompetenser, utöver procedurhantering. Läroböckerna är skevt fokuserade på procedurhantering och inbjuder sällan till aktiviteter som utvecklar andra kompetenser. De avslutande implikationerna för undervisningen är att kursplanemålen måste klargöras, läroböckerna utvecklas och att det måste till en tydligare koppling mellan mål och metoder i undervisningen.

Förändringar i den nya kursplanen i matematik

Från och med läsåret 2011 finns en ny kursplan i matematik. I den nya kursplanen har ambitionen varit att tydliggöra kompetenserna i ämnet genom att presentera dessa sist i den text som beskriver syftet med ämnet, som förmågor. I kommentarmaterialet till kursplanen beskrivs bakgrunden till förändringarna. Den nya kursplanen har en tydlig ambition att lyfta fram de centrala kompetenserna just för att komma till rätta med de problem som tydliggjorts i utredningar, rapporter, internationella studier och den matematikdidaktiska forskningen.

I kommentarmaterialet konstateras att undervisningen i matematik i stor utsträckning är präglad av enskild räkning, vilket ger eleverna begränsade möjligheter att utveckla förmågan att lösa problem. I den tidigare kursplanen var det svårt att urskilja de kompetenser eller förmågor som undervisningen syftade till att eleverna skulle utveckla. Kommentarmaterialet anger att dessa förmågor har samstämmigt stöd i matematikdidaktisk forskning, och i den nya kursplanen är dessa förmågor därför tydligare framskrivna i slutet av syftestexten

i form av långsiktiga mål. Dessa förmågor ska undervisningen i matematik ge eleverna förutsättningar att utveckla. I slutet av kommentarmaterialet tydliggörs relationen mellan kunskapskraven och förmågorna i de långsiktiga målen. Eleverna ska ges möjlighet att utveckla dessa förmågor genom hela grundskoletiden, det vill säga både utveckling av och progression i de tydliggjorda förmågorna.

Sammanfattning

Flera undersökningar visar att styrdokumentet i matematik har en svag ställning på många skolor. Detta leder till att många elever inte får möjlighet att utveckla alla kompetenser i matematik. Undervisningen är i många fall skevt fokuserad på matematiskt innehåll och procedurhantering. För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer. Det kräver att styrdokumentet formulerar målen i ämnet som både innehåll och förmågor. Så är fallet i den nya kursplanen i matematik, Lgr 11. Här lyfts de centrala förmågorna respektive det centrala innehållet i ämnet fram tydligare än tidigare. Den nya kursplanen tydliggör därigenom nödvändigheten av se både innehåll och förmågor som centrala delar av en helhet i ämnet matematik.

5. Tiden och undervisningen

I detta avsnitt diskuteras olika aspekter på tid i undervisnings- och lärandesammanhang. Diskussionen tar sin utgångspunkt i resultaten från den kartläggning som presenterats i de tidigare avsnitten.

Vad är tid?

Tid som begrepp problematiseras av Nyroos⁴¹. Hon menar att tid kan betraktas utifrån många olika perspektiv, till exempel fysikaliska, biologiska, psykologiska, filosofiska och sociologiska. I det sistnämnda fallet kan tid också ses som en resurs⁴². I skolan är tiden en mycket viktig resurs, och den kan till och med betraktas som en grundbult i verksamheten. Tiden påverkar kvaliteten i utbildningen, både innehållsligt och pedagogiskt⁴³. Tänkandet att tid är ett medel som ska användas så effektivt som möjligt har blivit det dominerande i vår tid. I undervisningssammanhang kan tid dock inte betraktas som synonymt med lärande. Det är stor skillnad på kvantitativ tid och kvalitativ tid⁴⁴.

I en nationell kvalitetsgranskning som gjordes av Skolverket stod tiden för lärande i fokus⁴⁵. Kvalitetsgranskningen avsåg hur tiden för lärande användes i hela det svenska skolsystemet, och granskningen bidrog till att problematisera frågan om kvantitativ och kvalitativ tid, såväl som frågan om förlorad tid.

Kvantitativ och kvalitativ tid

Det finns många aspekter att beakta när det gäller frågan om lärande, undervisning och tid. Med hjälp av en grov indelning kan man tala om *kvantitativa* och *kvalitativa* aspekter på tid. När det kommer till den kvantitativa aspekten i undervisningssammanhang, det vill säga mängden tid, kan detta problematiseras – det är inte självklart att mer tid i ett ämne leder till ökat lärande och större måluppfyllelse. Här kommer den kvalitativa aspekten in i bilden, eftersom den inrymmer frågan om vad som *görs* under tiden – med andra ord vilka *aktiviteter* som sker inom tiden för lärandet.

Tid kan ses som ett utrymme för aktivitet. En grundläggande fråga i det här sammanhanget är hur tiden i skolan används för att nå bästa möjliga resultat. En central betydelse för hur tiden används för lärande har läroplanernas mål och riktlinjer. De formar indirekt med vad och hur tiden i skolan ska fyllas.

⁴¹ Nyroos (2006).

⁴² Lundmark (1989).

⁴³ Hargreaves (1994), Andersson (1995), Westlund (1996), Österlind (1998).

⁴⁴ Millot (1995).

⁴⁵ Skolverket (2003).

När det handlar om tiden som ett medel för att nå läroplansmålen är ett genomgående intryck från kartläggningen i den här rapporten att målen inte är det överordnade när strukturer utformas på skolor. Tradition och pragmatism är i stället starkt betydelsebärande. De kommunala skolplanerna (dessa är nu borttagna, förf. anm.) borde ha varit en naturlig plats för att formulera grundläggande avsikter med tidsanvändningen, men så har inte varit fallet. Förutom att tidsanvändningen saknas i kommunala dokument, saknas även tydliggjorda avstämningstillfällen eller delmål för att sätta in insatser och nå måluppfyllelse.

Något man slås av i granskningen är också att bristfälliga resultat ofta möts med kvantitativa åtgärder. Krav på mer tid verkar ha företräde framför en annan *användning* av tiden, det vill säga kvantitet sätts framför innehåll och kvalitet. Därför är det ytterst angeläget att understryka vikten av att kombinera kvantitet med kvalitet i utvecklingen av matematikämnet för att nå ett effektivt resursutnyttjande. De aktiviteter som tiden för elevernas lärande fylls med bör vara förankrade i professionella överväganden från pedagogernas sida, ytterst på en vetenskaplig grund.

I den här kartläggningen redovisas ett varierande förhållningssätt till tid och tidsanvändning, både mellan kommuner och skolor, men framför allt inom enskilda skolor, där bland annat de olika stadierna med sina traditioner kan förklara skillnaderna. Den nationella kvalitetsgranskningen av skolan lyfter fram det faktum att tidslösningar i skolan på många håll är en oreflekterad premis som blir ett hinder för lärande.

En ytterligare aspekt på frågan om mängden tid för lärande handlar om i vilken utsträckning eleverna tar den erbjudna tiden i anspråk. Den senare frågan kommer dock inte att stå i fokus i denna rapport.

Förlorad tid

Det finns faktorer i skolvardagen som kan bidra till att reducera tiden i ett ämne. Det gäller till exempel om undervisningen planeras utan hänsyn till schema-brytande aktiviteter (såsom friluftsdagar, prov och oförutsedda händelser). Olika lösningar på förlorad tid förekommer, men ibland återtas den förlorade tiden inte alls. Systematiska tidstjuvar som till exempel sen lektionsstart och för tidigt lektionsavslut, kan också orsaka en betydande tidsreduktion⁴⁶. Trots att varje tillfälle kan ses som ringa kan de genom sin frekvens leda till en avsevärd minskning av den faktiska undervisningstiden.

Det visar sig finnas stora variationer i hur skolor tar ansvar för att återta förlorad lärandetid både på grupp- och individnivå. Ett exempel är ”räknestugor” med lärarstöd, dit eleverna kan komma efter eget behov och ansvar.

⁴⁶ Sjöberg (2006).

Den nationella timplanen

I en diskussion om tidsanvändningen i skolan går det inte att komma ifrån att lyfta fram den nationella timplanen. I en offentlig utredning framfördes kritiska synpunkter på den nationella timplanen⁴⁷. Utredningen menade att enigheten har varit stor om att det är ologiskt att ha en nationell timplan i ett mål- och resultatstyrt system som skolan. En nationell timplan leder lätt till ett stelt schematänkande, och den kan utgöra ett hinder för en önskad skolutveckling. Samtidigt har den nationella timplanen setts som ett verktyg för att värna likvärdighet och kvalitet. Timplanen är dock, enligt utredningen, en dålig garant för att eleverna faktiskt lär sig, vilket gör den till ett något ineffektivt styrmedel.

Undervisningstiden i matematik

I Sverige ägnas förhållandevis lite undervisningstid åt matematik jämfört med snittet för EU- och OECD-länderna⁴⁸. Enligt timplanen för grundskolan är den totala garanterade undervisningstiden 6 665 timmar. Av denna tid utgör matematik 13,5 % (som en jämförelse utgör svenskämnet 22,4 %). I årskurs 4 är andelen undervisningstid i matematik 12 % av den totala undervisningstiden per vecka, att jämföras med EU- och OECD-länderna där motsvarande andel är 17 %. Som en jämförelse omfattar matematikundervisningen i årskurs 8 i Sverige 10 %, mot motsvarande 12 % för EU- och OECD-länderna.

Sammanfattning

Tiden i undervisningssammanhang kan betraktas både utifrån kvantitativa och kvalitativa aspekter. Det är av yttersta vikt att kombinera dessa perspektiv för att få ett effektivt resursutnyttjande. Den kvalitativa aspekten handlar om hur lärandet organiseras och bedrivs, och därmed om hur tiden används. Detta måste anpassas till den eftersträlvade kunskapens karaktär. Frågan om hur undervisningstiden dimensioneras och används har stor betydelse för vilka resultat som nås.

⁴⁷ SOU 2004:35.

⁴⁸ Skolverket (2008).

6. Enkät om utökad undervisningstid

Som ett komplement till den kartläggning av forskning, utvärderingar och granskningar av matematikämnet som presenteras i denna rapport skickades en enkät ut till landets matematikutvecklare och det nationella rektorsnätverket. I enkäten, som distribuerades via e-post, ombads de tillfrågade svara på frågor om den utökade undervisningstiden i matematik. Det gällde framför allt frågor om under vilka årskurser och med vilket innehåll den utökade undervisningstiden borde placeras.

I brevet beskrevs mycket kortfattat uppdraget och de frågor som ställdes var:

Vad föreslår du med avseende på följande: Hur ska de utökade timmarna användas? I vilken åldersgrupp bör timmarna användas? Med vilket innehåll ska timmarna fyllas?

De svar som inkom var till övervägande del från matematikutvecklare runt om i landet. Ett tiotal matematikutvecklare och några få rektorer har skickat in enskilda svar och därutöver har det inkommit svar från olika stora grupper med matematikutvecklare.

Sammantaget har mellan 50 och 70 matematikutvecklare från 18 kommuner i landet gett sina synpunkter på hur de utökade 120 timmarna bäst borde användas. Med anledning av den låga svarsfrekvensen bör resultaten av enkäten hanteras med stor försiktighet. Den får endast ses som ett komplement till frågan om hur en ökning av undervisningstiden i matematik kan användas för att i så stor utsträckning som möjligt stärka elevernas kunskaper.

En tydlig tendens – ju tidigare desto bättre

En tydlig tendens går att utläsa i svaren, nämligen att många svarande ser behovet av att sätta in insatserna i matematik tidigt. Nedan följer några exempel på röster från enkäten:

Röster från enkäten om utökad undervisningstid

- Det är viktigt att lägga grunden och befästa kunskaperna tidigt.
- Har man grunderna och hittat sitt sätt att tänka där man känner sig trygg blir det lättare genom åren att bygga på sina kunskaper.
- God taluppfattning är ingenting som försvinner utan något man behöver när matematiken blir alltmer avancerad.
- Undvik missuppfattningar och lös problemen så tidigt som möjligt.
- Vi tror på tidiga insatser eftersom forskningen visar på betydelsen av detta.
- Tidiga insatser är viktigt inte minst för elevernas tilltro till den egna förmågan.

- Om man lägger en god grund under de tidiga skolåren underlättas senare inläring och sannolikheten för att man ska fortsätta lära sig under hela livet ökar.

På frågan om var timmarna ska placeras är det dock även en mycket stor spridning bland svaren. Förslagen varierar från specifika årskurser till hela stadier, samt varianter på stadier, exempelvis årskurserna 2–5, 3–6 och 6–9. Argumenten för de sistnämnda förslagen bygger på att det är viktiga stadieövergångar där olikartade skolkulturer möts. Förutom de nämnda förslagen på var timmarna ska läggas finns några förslag på att fördela tiden jämnt över hela grundskolan (årskurserna 1–9) men även det rakt motsatta, det vill säga nödvändigheten av att fokusera på en specifik ålderskategori (årskurs) för att få en bättre effekt och förhoppningsvis ett bättre resultat.

Problemlösning och taluppfattning gemensamt för alla stadier

Ett genomgående förslag i enkäten är att lägga fokus på problemlösning under hela grundskoletiden. Ytterligare innehåll som lyfts fram som betydelsefullt att förstärka är kunskaperna om taluppfattning. Detta gäller generellt under årskurserna 1–6, samt med specifikt fokus på decimal- och bråktal under årskurserna 4–9.

I enkäten nämns även vikten av ett varierat arbetssätt med många laborativa inslag under varje stadium, samt behovet av att kunna arbeta i halvklass vid dessa tillfällen. Några få svarande nämner vikten av att få mer tid till att arbeta med kombinationen av förmågorna och det centrala innehållet i kursplanen.

Sammanfattning

Den utskickade enkäten om utökad undervisningstid i matematik har en låg svarsfrekvens varför svaren måste tolkas med försiktighet. I enkätsvaren understryker flera informanter vikten av att förstärka undervisningstiden i de tidiga skolåren och att det ger bäst effekt på lång sikt. De vanligast förekommande innehållsförslagen handlar om att förstärka undervisningen i taluppfattning och problemlösning. Avslutningsvis kan konstateras att förhållandevis få (endast tre stycken) lyfter fram behovet av att få mer tid till att arbeta med förmågorna i relation till kursplanens centrala innehåll.

7. Slutsatser och förslag

Den här rapporten bygger på en kartläggning av granskningar, utvärderingar och forskning om matematikämnet och skolans undervisning i matematik. Utgångspunkten har varit olika aspekter som har relevans för en diskussion om utökad undervisningstid i matematik. Nedan följer en sammanfattande diskussion av rapporten, samt slutsatser om och konkreta förslag på hur den utökade undervisningstiden bör disponeras.

Kartläggningen visar på ett starkt behov av en gemensam förståelse av den nationella kursplanen i matematik, eftersom denna ofta inte efterlevs i den konkreta undervisningspraktiken. Flera studier tydliggör att undervisningen domineras starkt av enskilt arbete i läroboken. Det ligger en fara i att felaktiga strategier övas in och befästs ju längre skoltiden fortskrider, och detta faktum förstärks av att matematikundervisningen ofta till stor del präglas av procedurinriktat eget arbete.

Undervisningen måste således bli mer varierad och eleverna måste få möjlighet att diskutera matematik med sina klasskamrater och sin lärare. Gemensamma reflektioner och diskussioner måste förekomma i högre utsträckning. Forskning om kommunikationen i klassrummet visar att fokus på processer i klassrumssamtalen erbjuder rika möjligheter för elevernas lärande.

Eleverna måste ges förutsättningar att utveckla de centrala förmågorna i kursplanen, och kursplanens ledning och styrning av matematikundervisningen måste stärkas. Lärarna behöver dessutom få stöd i att utveckla ett kritiskt förhållningssätt till läromedlen i matematik, eftersom dessa ofta får en stark styreffekt på undervisningen. Lärarna måste också vara de som tar det didaktiska ansvaret för undervisningen.

Lesson study och learning study är framgångsrika exempel på metoder som gör det möjligt att utveckla undervisningen. Dels genom att de leder till att lärarna i större utsträckning arbetar gemensamt, dels för att lärarna utvecklar en större förståelse för relationen mellan kursplanens centrala innehåll och förmågorna och på ett mer framgångsrikt sätt lyckas kombinera dessa. För att möjliggöra denna utveckling av undervisningen måste lärarna få tid och utrymme för de nödvändiga och gemensamma samtalen om undervisning och lärande i matematik.

Vad gäller frågan om tiden som läggs på undervisningen i matematik är det ytterst angeläget att kombinera kvantitet med kvalitet. Dessutom måste skolorna ta ett ansvar för att kompensera stora tidsbortfall både på grupp- och individnivå. Hur kompenseras till exempel de schemabrytande aktiviteterna? Hur stöttas elever som varit frånvarande under längre perioder?

Ytterligare ett perspektiv på tidsanvändningen, som inte berörts i så stor utsträckning i kartlägningsarbetet, handlar om grundskolans stadiindelning

och stadietraditioner. Hartman diskuterar och problematiserar skolan i relation till kulturarv och kunskapstraditioner⁴⁹. Han beskriver de olika kunskapstraditionerna utifrån begreppen ämnesrationalitet, *didaktisk rationalitet* och *omsorgsrationalitet*. Kling Sackerud⁵⁰ visar i en studie att alla tre traditioner finns representerade i skolan, men med olika stark förankring på olika stadier. I förskoleklassen och under de allra tidigaste årskurserna finns en omsorgsrationalitet som handlar om att läraren med sina kunskaper om barn följer deras utveckling. På låg- och mellanstadiet råder den didaktiska rationaliteten vilken innebär att läraren kan undervisning och att vara lärare. Högstadiet representeras av ämnesrationaliteten, där fokus på ämnet och lärarens ämneskunskaper är det centrala.

Med utgångspunkt i detta blir en viktig utmaning att kunna problematisera vilken betydelse de olika rationaliteterna har för undervisningen och lärandet i matematik. Råder det olika skolkulturer vad gäller matematikundervisningen på olika stadier? Hur hanteras stadieövergångarna och vilka krav ställs på både elever och lärare i samband med detta? Vilka konsekvenser får eventuella olikheter för eleverna och deras lärande i matematik?

Forskning visar att det verkar som att matematikundervisningen under årskurserna 4–6, i jämförelse med under årskurserna 1–3 och 7–9, innefattar få aktiviteter som syftar till att utveckla kompetenser i matematik, och att det är ett alltför stort fokus på procedurhantering i relation till styrdokumentet. Hur kan då detta motverkas?

Förslag

Med utgångspunkt i det kartläggande arbetet föreslår jag att de 120 timmarna placeras i de tidiga skolåren. Det handlar om att ha tid och utrymme för att realisera kursplanemålen. Forskningen visar på tydliggjorda brister under årskurserna 4–6 när det kommer till förmågorna i kursplanen, både vad gäller läromedlen och själva undervisningen i ämnet. På lång sikt är det ideala att detta förebyggs med en satsning på årskurserna 1–3. På kort sikt, och då inte som en *quick fix*, kan en tänkbar variant vara att lägga timmarna under årskurserna 2–4.

Viktigt i detta sammanhang är att matematikundervisningen måste bli mer varierad och leva upp till devisen om matematik som ett kommunikationsämne. Det innebär att den förstärkta undervisningstidens behöver få ett kvalitativt innehåll med ett tydligare fokus på de centrala förmågorna, eftersom forskningen visar att undervisningen ofta brister i detta. Här måste lärarna få stöd av både Skolverket, NCM och den matematikdidaktiska forskningen, samt möjligheter till kompetensutveckling genom både centrala och lokala insatser.

⁴⁹ Hartman (2005).

⁵⁰ Kling Sackerud (2009).

För att en förstärkning av undervisningstiden i matematik ska bli en hållbar och lyckad kvalitativ satsning måste lärarna i matematik få stöd och hjälp i arbetet med att förstå de nationella kursplanemålen och omsätta dessa i undervisningen. Lärarna behöver också bli mindre beroende av läromedlet och över- ta det matematikdidaktiska ansvaret i klassrumsarbetet.

Referenslitteratur

- Andersson, L. W. (red). (1995). *The Nature of Time in Schools: Theoretical Concepts, Practitioners Perceptions*. New York: Teacher College Press.
- Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment Discourses in Mathematics Classrooms*. Stockholm: Stockholms universitet.
- Emanuelsson, J. (2001). *En fråga om frågor*. Doktorsavhandling. Göteborg: Acta universitatis Gothburgensis.
- European Commission, EACEA. (2012). *Recommended Annual Taught Time in Full-Time Compulsory Education in Europe, 2011/12*. Eurydice network.
- Hargreaves, A. (1994). *Changing Teachers, Changing Times. Teachers work and culture in the postmodern age*. London: Cassell.
- Hartman, S. (2005). *Det pedagogiska kulturarvet*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Hufferd-Ackles, K. Fuson, K. & Sherin, M. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. I: *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(1), s. 81–100.
- Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: a classroom and curricular perspective*. Doktorsavhandling. Luleå: Luleå tekniska universitet.
- Kilpatric, J. Swafford, J & Findell, B (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academic Press.
- Kling Sackerud, L. (2009). *Elevernas möjligheter att ta ansvar för sitt lärande i matematik. En skolstudie i postmodern tid*. Doktorsavhandling. Umeå: Umeå universitet.
- Lundmark, L. (1989). *Tidens gång och tidens värde*. Stockholm: Författarförlaget Fischer & Rye.
- Millot, B. (1995). Economics of Educational Time and Learning. I: *International Encyclopedia of Economics of Education*. Oxford: Pergamo, s. 353–358.
- NCM /UFM. (2009). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet*. Göteborg: NCM, Nationellt centrum för matematikutbildning.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). *Kompetencer og matematiklaering*, Uddannelsestyrelsens temahæfteserie nr 18-2002. Köpenhamn: Undervisningsministeriets forlag.

- Norén, E. (2010). *Flerspråkiga matematikklassrum: Om diskurser i grundskolans matematikundervisning*. Doktorsavhandling. Stockholm: Stockholms universitet.
- Nyroos, M. (2006). *Tid till förfogande*. Doktorsavhandling. Umeå: Umeå universitet.
- Persson, E. (2009). *Det kommer med tiden. Från lärarstudent till matematiklärare*. Doktorsavhandling. Stockholm: Stockholms universitet.
- Ramböll. (2011). *Skolverket. Utvärdering av matematiksatsningen*. Stockholm: Ramböll.
- Reikerås, I., Kitsti, E. & Heiberg Solem, I. (2004). *Det matematiska barnet*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* Göteborg: NCM, Nationellt centrum för matematikutbildning.
- Sjöberg, G. (2006). *Om det inte är dyskalkyli – vad är det då?* Doktorsavhandling. Umeå: Umeå universitet.
- Skolinspektionen. (2009). *Undervisningen i matematik. Utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*. Rapport 2009:5. Stockholm: Skolinspektionen.
- SKOLFS 1994:1. Lpo 94.
- SKOLFS 2010:37. Lgr 11.
- Skolverket. (2003). *Tid för lärande – nationella kvalitetsgranskningar 2001–2002*. Rapport nr 222. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2004a). *NU 03. Nationella utvärderingen av grundskolan 2003*. Skolverkets rapport nr 250. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2004b). *PISA 2003*. Skolverkets rapport nr 254. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2004c). *TIMSS 2003*. Skolverkets rapport nr 255. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2007). *PISA 2006*. Skolverkets rapport nr 306. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2008). *TIMSS 2007*. Skolverkets rapport nr 323. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009). *TIMSS Advanced 2008*. Skolverkets rapport nr 336. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2010a). *Skolverkets lägesbedömning 2009. Förskoleverksamhet, barnomsorg, skola och vuxenutbildning*. Skolverkets rapport nr 337. Stockholm: Skolverket.

- Skolverket. (2010b). *PISA 2009*. Skolverkets rapport nr 352. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011a). *Skolverkets lägesbedömning 2010. Förskoleverksamhet, barnomsorg, skola och vuxenutbildning*. Skolverkets rapport nr 349. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011b). *Kursplan i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011c). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011d). *Redovisning av regeringsuppdraget – Matematiksatsningen*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011e). *Laborativ matematik, konkretiserande undervisning och matematikverkstäder. En utvärdering av matematiksatsningen*. Skolverkets rapport nr 366. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011f). *Lesson study och learning study samt IKT i matematikundervisningen. En utvärdering av matematiksatsningen*. Skolverkets rapport nr 367. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011g). *Matematikundervisning i grundsärskolan. En utvärdering av matematiksatsningen*. Skolverkets rapport nr 368. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2012). *Skolverkets lägesbedömning 2011. Förskoleverksamhet, barnomsorg, skola och vuxenutbildning*. Skolverkets rapport nr 363. Stockholm: Skolverket.
- SOU 2004:35. *Utan timplan – med målen i sikte*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- SOU 2010:28. *Vändpunkt Sverige – ett ökat intresse för matematik, naturvetenskap, teknik och IKT*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Sterner, H., Sundström, M., Axelsson, E. & Tegmark, K. (2011). *Kvalitetsarbete i matematik och svenska*. Skolförvaltningen Falu kommun.
- Westlund, I. (1996). *Skolbarn av sin tid. En studie av skolbarns upplevelse av tid*. Doktorsavhandling. Linköping: Linköpings universitet.
- Österlind, E. (1998). *Disciplinering via frihet. Elevers planering av eget arbete*. Doktorsavhandling. Uppsala: Acta universitatis Upsaliensis.

Bilaga

Obligatorisk total undervisningstid i matematik i 28 europeiska länder, 2011/2012

Undervisningstid i timmar:

- Bulgarien 705
- Cypern 937
- Danmark 1 200
- Estland 944
- Finland 912
- Frankrike 1 440
- Grekland 900
- Island 1 080
- Italien 1 209
- Kroatien 945
- Lettland 993
- Lichtenstein 1 314
- Litauen 852
- Luxemburg 1 557
- Malta 1 306
- Norge 1 096
- Polen 1 080
- Portugal 1 657
- Rumänien 946
- Slovakien 926
- Slovenien 988
- Spanien 841
- Sverige 900
- Tjeckien 1 029
- Turkiet 876
- Tyskland 1 231
- Ungern 845
- Österrike 1 110

Källa: European Commission, EACEA. (2012). Eurydice network.

Författarens kommentarer:

Medeltalet för antalet undervisningstimmar i matematikämnet: 1 065

Medianvärdet för antalet timmar i matematikämnet: 967

5 länder har färre undervisningstimmar i matematik än Sverige.

21 länder har fler undervisningstimmar i matematik än Sverige.

Spridning mellan lägsta respektive högsta antalet timmar i matematikämnet:

705 timmar (Bulgarien) – 1 657 timmar (Portugal).

Med en ökning till 1 020 undervisningstimmar hamnar Sverige fortfarande under medeltalet som då blir 1 069.

Bilaga 3
Exempel på
hantering av
timplaneförändring
i en kommun

Utökad undervisningstid i matematik – exempel på hantering av timplane- förändringar i en medelstor kommun

Bakgrund

I kommunen aktualiserades frågan om den aktuella lokala fördelningen av den garanterade undervisningstiden stämde överens med de nya kursplanerna redan inför genomförandet av läroplanen för grundskolan (Lgr11) höstterminen 2011. En f.d. planerare i kommunen beskriver på uppdrag av Skolverket i denna PM hur man har hanterat timplaneförändringar¹ i kommunen. Arbetet innebar dels en generell översyn av de lokala timplanerna inför läroplansreformen, dels det påföljande arbetet med att ta fram underlag för beslut om var 120 extra timmar i matematik skulle kunna förläggas. Beskrivningen bifogas Skolverkets rapport till regeringen som ett konkret exempel på hur nationella timplaneförändringar kan hanteras på kommunal nivå.

Kommunen är indelad i fem geografiska skolområden. Områdena med 45 grundskolor lyder under var sin driftnämnd, vilket gör att alla frågor som berör samtliga kommunala skolor måste föras upp till respektive driftnämnd för beslut. Innan övergripande beslut tas ska varje beslut samverkas, alternativt förhandlas enligt MBL. Arbetet med att ta fram nya riktlinjer för samtliga kommunala grundskolor kan därför ibland ta lång tid. Risken är att de fem skolområdena får olika politiska direktiv och att det blir svårt att komma fram till ett gemensamt beslut.

Arbetet med en gemensam lokal timplan påbörjades i december 2010 och avslutades i mars månad 2011, då de fem driftnämnderna antog förslaget till gemensam timplan. När denna skulle beslutas i mars 2011 var det av stor vikt att de fem driftnämnderna godkände förslaget utan att göra lokala förändringar. Detta lyckades och därmed hade skolorna möjlighet att planera tjänstefördelning, schemaläggning och andra praktiska arrangemang före vårterminens slut.

Timplanerna och Lgr11

Planerarna på Förvaltningskontoret fick i uppdrag att genomföra en översyn av grundskolornas timplaner. Efter insamling av timplaner från alla skolor kunde

¹ Benämningen timplan används här för huvudmannens lokala fördelning av den garanterade undervisningstiden. Benämningen nationell timplan används för timplanen i Skollagen (2010:800), bilaga 1.

man konstatera att skolorna behövde ha bättre kontroll över elevernas garanterade undervisningstid. Grundskolornas rektorer hade inte heller väl fungerande system för hur enskilda elever skulle kunna garanteras undervisningstid vid ”stadiebyte” eller när de bytte skola under sin skoltid. Det saknades också ett forum för kommunikation kring timplanefrågor mellan de kommunala skolorna och de många fristående skolor, som tillkommit i kommunen. När detta resultat redovisades fick planerarna i uppdrag att ta fram ett förslag till en gemensam timplan för samtliga kommunala skolor. Denna timplan skulle gälla från och med höstterminen 2011.

Under ett stormöte med samtliga rektorer redovisades alla tankar bakom förslaget till ny samlad lokal timplan. Rektorerna fick två veckor på sig för att sätta sig in i de synpunkter som kommit fram. Därefter hölls ett nytt stormöte där alla rektorer deltog. Efter diskussion ställde sig samtliga rektorer bakom förslaget, som sedan lades fram för politiskt beslut i driftnämnderna.

I arbetet medverkade kommunens utvecklingspedagoger i matematik och svenska samt ett antal rektorer som referenspersoner. Många hade synpunkter på hur de olika ämnena skulle läggas ut på ”stadier” och årskurser. Det framkom önskemål om att det totala timutlägget per vecka och årskurs skulle förändras så lite som möjligt jämfört med tidigare timplaner. Skälen till detta var att tjänstefördelningar och skolskjutsar skulle påverkas så lite som möjligt.

Under arbetets gång aviserade regeringen i budgetpropositionen 2011 att den garanterade undervisningstiden grundskolan skulle utökas med 120 timmar i matematik. Frågan om var dessa timmar skulle göra mest nytta diskuterades i gruppen. Planerarna, som utförde timplaneuppdraget, ansåg att matematikförstärkningen borde läggas i de lägre årskurserna. Skälet till detta var att varken matematik eller de naturorienterande ämnena hade varit prioriterade i de lägre årskurserna i den aktuella lokala timplanen. Detta kunde vara en trolig orsak till att många elever anser att matematik är ett ”svårt” ämne, när de kommer upp till årskurs 4-5. Något beslut om en sådan utökning och fördelning av timmar togs dock aldrig, eftersom utökningen bara aviserats och inget beslut ännu fattats av riksdagen.

Den nya gemensamma timplanen beslutades och har följts upp under läsåret 2011/12. Timplanen finns i bilaga 1. En utvärdering gjordes i april 2012 i samband med en förnyad diskussion om var de 120 timmarnas utökning av matematikämnet borde läggas. Skolverket har inom sitt uppdrag att rekommendera regeringen var 120 timmar borde läggas följt arbetet i kommunen. Ett förslag till utläggning av timmar med 120 timmar extra matematik finns i bilaga 2.

Utökad undervisningstid i matematik

När de nya 120 timmarna i matematik ska fördelas måste samtliga fem drift-nämnder godkänna timplaneändringen. Utifrån det arbete som gjordes i kommunen med en gemensam timplan har en diskussion förts om var de 120 timmarna i matematik som tillkommer från läsåret 2013-2014 bör förläggas.

Rektorerna förespråkar en förstärkning i de högre årskurserna utifrån att många elever inte uppnår den mognad som behövs för att förstå matematikämnet förrän i tonåren. Denna åsikt framförs av samtliga rektorer som menar att det är deras egen erfarenhet som ligger till grund för denna åsikt. Även utvecklingspedagogerna anser att det för vissa elever kan vara en mognadsfråga, men att det inte gäller flertalet av de elever som har svårigheter med matematik.

Utvecklingspedagogerna förespråkar att satsningen bör ske så tidigt som möjligt. Under en femårsperiod har en systematisk kartläggning skett av elevernas måluppfyllelse i matematik, svenska och engelska. I den kartläggningen har det framkommit att elevernas måluppfyllelse i matematik i årskurs 3 har varit för låg. Alltför många elever har inte klarat av de moment som funnits i det nationella provet för årskursen. Som följd av detta beslutades det om ett uppföljningssystem som samtliga lärare skulle följa och åtgärder som skulle vidtas för att hjälpa de elever som hade svårigheter. Resultaten har förbättrats, men de är fortfarande inte helt tillfredsställande.

En av pedagogerna uttrycker sig så här:

Utifrån forskning/beprövad erfarenhet tyder mycket på att en förståelseinriktad matematikundervisning, som bygger på problemlösning/kommunikativ matematik – som också inkluderar elevers förmåga att resonera matematiskt – ger en god förtroendet hos eleverna. Läger vi denna insats på 120 extra timmar med fokus på grundläggande taluppfattning i årskurs 2-4 eller 3-5 bör detta ge bäst utfall. Skälet är att många elever tappar motivationen runt årskurs 5-6, bland annat på grund av att de inte förstår. Läger vi insatsen tidigare bör eleven få bättre förtroendet med matematik och därmed förstå den matematik som kommer i högre årskurser (inklusive gymnasieskolan), då den innehåller ökad abstraktion.

Den andra pedagogen anförde följande synpunkter:

Eleverna måste få "number sense" dvs. "sinne för tal" och det måste ske tidigt. Allt matematiskt tänkande bygger på att det "sitter i ryggmärgen" innan man går vidare. Utlägget bör ligga i årskurserna 2-4 (ev. även åk 5) och vara maxat i årskurserna 3-4. För att förstå problemlösning behövs fantasi - förmågan att bedöma information - att kunna rita problemet - uttrycka den i en graf - förstå och göra en tabell - beskriva med ord - visa i handling - uttrycka i symbolspråk. Allt detta måste tränas innan man går vidare. Kompetensen hos lärarna behöver stärkas så att de kan förmedla alla led till eleverna hur man löser matematiska problem. Den utökade tiden ska inte användas för "hinna med fler tal i matteboken.

Utifrån de resonemang som fördes och de uttalanden som rektorerna och utvecklingspedagogerna gjorde togs ett förslag fram för en revidering av den timplan som nu gäller. Gruppen förordar en förstärkning i årskurserna 2-5 med maximalt utlägg i årskurserna 3-4. Skälet till att årskurs 1 inte är aktuell är att då sker så mycket annat för eleven med läsinläring och hela anpassningen till skolan och undervisningssituationen.

Konsekvenser av den föreslagna utläggningen

- **Praktiska** (exempelvis skoldagens längd, skolskjutsar, lokalproblem)
Skoldagens längd utökas för eleverna med 40 minuter i årskurserna 2 och 5 samt med 60 minuter i årskurserna 3 och 4. Inga problem med tidsutläggen, elevernas totala undervisningstid sträcker sig i förslaget mellan drygt 17 timmar/vecka i årskurs 2 till knappt 22 timmar/vecka i årskurs 5. Några problem med skolskjutsar eller lokaler ska inte behöva uppstå.
- **Ekonomiska** (utökad lärartid medför ökade lönekostnader)
Den ökade lärartiden kommer att kompenseras av det ökade statsbidraget till kommunerna från läsåret 2013-2014.
- **Pedagogiska** (utbildning alternativt fortbildning av lärare)
Kompetensutveckling behövs hos lärare i de lägre årskurserna. De satsningar som aviserats från regeringen (Matematiklyftet) bör täcka behovet.

Möjligheter för lärarna vid utökning av undervisningstiden i matematik
Flertalet skolor har fortfarande kvar ett "klasslärsystem" i de lägre årskurserna där många lärare får undervisa i ämnen som de inte har adekvat utbildning i. Detta upplevs som tråkigt för många lärare som har satsat på en matematik- och naturorienterad utbildning. Man kan se att de lärare som har matematik i sin utbildning kan få fler matematiktimmar i sina tjänster. Detta borde vara en positiv effekt för dem, då de får möjlighet att utnyttja sina kunskaper på ett bättre sätt.

För de lärare som saknar matematik i sin utbildning finns då möjligheten att få fler timmar i de ämnen de har ämneskompetens för. På detta sätt kan "ämneslärarundervisning" införas även i de lägre årskurserna. I de små skolor som finns, framför allt på landsbygden, uppstår ofta problem med ämneskompetensen hos de fåtal lärare som tjänstgör. Detta måste rektorer uppmärksamma och vidta åtgärder så att samtliga elever får undervisning av ämnesbehöriga lärare. Om rektorerna ser ett införande av "ämneslärarundervisning" i de lägre årskurserna som en möjlighet att ändra på sin organisation kan det i slutändan visa sig att nyanställningar blir möjliga.

Uppföljning av den nya timfördelningen

Om kommunen kommer att besluta om matematikförstärkningen enligt det förslag som nu tagits fram kommer en uppföljning att ske året efter, dvs. 2014/2015, för att se om problem uppstått. Därefter bör kommunen göra en total uppföljning av den reviderade timplanen efter ca fem år för att säkerställa att timplanen följs och att timutlägget är fördelat så att måluppfyllelse kan nås enligt de kursplaner som gäller.

Tre goda råd till huvudmän som ska besluta var en utökad undervisningstid ska förläggas:

1. Samla in de timplaner som finns i skolorna och gör en översyn av dessa. Detta är det viktigaste av allt. Om viljan finns så rekommenderar vi att det beslutas om en gemensam timplan för kommunen. Detta behövs för att säkerställa att elever som byter skola får sin garanterade undervisningstid. Innan kommunen vet om matematikämnet har ”rätt fördelning” i den timplan som gäller kan ett tillskott med 120 timmar inte fördelas och beslutas.
2. Satsa på kvalitet – ge rätt kompetensutveckling och satsa på lärarna som ska undervisa i de lägre åldrarna (årskurs 1-6).
3. Låt inga elever tappa intresset och tilltro till sin förmåga – *jag inte är så smart så matte är nog inget för mig*. Arbeta för att få med vårdnadshavarna i satsningen, eftersom deras förhållningssätt till skolan påverkar barnens resultat oerhört mycket. *I vårt samhälle är smarthet starkt förknippat med matematik.*

Timplan kommunens grundskolor

Timmar per ämne och läsår

Ämne/Åk	1	2	3	Totalt 1-3			4	5	6	Totalt 4-6			7	8	9	Totalt 7-9	Totalt 1-9	Gar. u-tid
Slöjd			45	45	63	63	63	63	63	189			48	48	48	96	330	330
Bild	20	20	20	60	20	20	22	22	22	62			36	36	36	108	230	230
Idrott	48	48	48	144	58	58	60	60	60	176			60	60	60	180	500	500
Musik	14	30	30	74	36	36	36	36	36	108			24	24	24	48	230	230
Hemkunsk.							36	36	36	36			46	36		82	118	118
Svenska	220	220	216	656	183	183	183	183	183	549			95	95	95	285	1 490	1 490
Engelska	19	20	20	39	75	75	75	75	75	225			72	72	72	216	480	480
Matematik	90	96	106	292	106	107	107	107	107	320			96	96	96	288	900	900
SO*	57	69	81	207	90	96	102	102	102	288			130	125	135	390	885	885
NO**	64	64	64	192	72	80	81	81	81	233			125	120	130	375	800	800
Elev. val	26	28	28	82	36	36	36	36	36	108			64	64	64	192	382	382
Språkval										0			107	106	107	320	320	320
Summa	539	594	658	1 791	739	754	801	801	2 294	2 294	855	855	858	867	2 580	6 665	6 665	6 665

Tim/vecka	15,14	16,6854	18,4831	20,7584	21,17978	22,50	24,02	24,10	24,35
Avrundat värde	15 tim 10 min	16 tim 30 min	18 tim 15 min	20 tim 30 min	21 tim	22 tim 30 min	24 tim	24 tim	24 tim 20 min

* I SO-ämnena ingår geografi, historia, religionskunskap och samhällskunskap.
Respektive skola ska göra en uppdelning av samtliga ingående ämnen och timmar ska fördelas över samtliga årskurser.
** I NO-ämnena ingår biologi, fysik, kemi och teknik.
Respektive skola ska göra en uppdelning av samtliga ingående ämnen och timmar ska fördelas över samtliga årskurser.

Timplan kommunens grundskolor – tillägg med 120 timmar (Förslag 2012-04-24)

Bil. 3.2

Timmar per ämne och läsår

Ämne/Åk	1	2	3	Totalt 1-3	4	5	6	Totalt 4-6	7	8	9	Totalt 7-9	Totalt 1-9	Gar- u- tid
Slöjd			45	45	63	63	63	189		48	48	96	330	330
Bild	20	20	20	60	20	20	22	62	36	36	36	108	230	230
Idrott	48	48	48	144	58	58	60	176	60	60	60	180	500	500
Musik	14	30	30	74	36	36	36	108	24	24	24	48	230	230
Hemkunsk.							36	36	46	36		82	118	118
Svenska	220	220	216	656	183	183	183	549	95	95	95	285	1 490	1 490
Engelska	19	20	20	39	75	75	75	225	72	72	72	216	480	480
Matematik	90	120	142	352	142	131	107	380	96	96	96	288	1 020	1 020
SO*	57	69	81	207	90	96	102	288	130	125	135	390	885	885
NO**	64	64	64	192	72	80	81	233	125	120	130	375	800	800
Elev. val	26	28	28	82	36	36	36	108	64	64	64	192	382	382
Språkval								0	107	106	107	320	320	320
Summa	539	648	694	1 851	775	778	801	2 354	855	858	867	2 580	6 785	6 785

Tim/vecka	15,14	17,3596	19,4944	21,7697	21,8539	22,50	24,02	24,10	24,35
Avrundat värde	15 tim 10 min	17 tim 10 min	19 tim 15 min	21 tim 30 min	21 tim 40 min	22 tim 30 min	24 tim	24 tim	24 tim 20 min
ma +120 tim		40 min	60 min	60 min	40 min				

* I SO-ämnena ingår geografi, historia, religionskunskap och samhällskunskap.

Respektive skola ska göra en uppdelning av samtliga ingående ämnen och timmar ska fördelas över samtliga årskurser.

** I NO-ämnena ingår biologi, fysik, kemi och teknik.

Respektive skola ska göra en uppdelning av samtliga ingående ämnen och timmar ska fördelas över samtliga årskurser.

Hur utnyttjas en utökad undervisningstid i matematik för att i så stor utsträckning som möjligt stärka elevernas matematikkunskaper? Rapporten svarar på tre frågor: när tiden bör förläggas, vilka undervisningsformer som är mer framgångsrika än andra och vilket matematiskt innehåll som bör prioriteras. Utgångspunkten för rapporten är forskning och resultat från nationella och internationella studier. Rapporten består av en sammanfattning av området, samt två forskares fördjupade kartläggning av framgångsrik matematikundervisning.

Rapporten vänder sig till lärare i matematik och till rektorer. Men även till huvudmän, politiker och tjänstemän som arbetar med utbildningsfrågor på kommun- och riksnivå.

Skolverket

www.skolverket.se