GÖTEBORGS UNIVERSITET

RAPPORT

Ämnesspecifika instruktioner för ämnet matematik

Ola Helenius, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession

Förord

Dessa ämnesspecifika instruktioner är framtagna på uppdrag av Skolverket i samband med de läroplansreformer som planerades under 2025. De ska tjäna som underlag för utarbetande av kursplaner i ämnet matematik i grundskolan, anpassade grundskolan, specialskolan och sameskolan.

Texterna är skrivna av Ola Helenius. Referenspersoner som har bidragit i arbetet nämns i appendix D.

Om Ämnesspecifika instruktioner 1
Ställningstaganden och deklarationer 3
Kursplanen ska ha fyra delar 3
Betygskriterierna ska kunna formuleras ämnesövergripande och det ska av Mål och innehåll kunna avgöras vilka kunskaper som behöver bedömas 4
Undervisningens innehåll ska specificeras tydligare 5
Tydligare stadieuppdelning 6
Kursplanens språk och tilltal 6
Anpassning till barns kognitiva förutsättningar 7
Behärska och behandla 8
Hänsyn till nytt betygssystem och det nationella slutprovet 10
Problemlösning och ett undersökande arbetssätt 11
Kursplanens funktion i olika skolformer 13
En övergripande beskrivning av skolämnet matematik 13
En motivering till varför matematikämnet finns i skolan 14
Matematikämnets bidrag till läroplanens övergripande mål 16
Centrala undervisningsstrategier 19
Årskurs 1–2 21
Årskurs 3–4 25
Årskurs 5–7 30
Årskurs 8–10 33
Ämnets mål och innehåll 37
Principer för urval och prioriteringar 37
Ämnets centrala kunskapsområden 38
Den innehållsmässiga progressionen 39
Aritmetik 39
Algebra 83
Funktioner och samband 99
Statistik och sannolikhet 109
Geometri och mätning 113
Tekniska hjälpmedel och programmering 114
Referenser 120
Appendix A 129
Appendix B. Förslag till kursplan i matematik 133
Ämnets syfte 133
Ämnets bidrag till skolans mål 133

Årskurs 1–2: Undervisningsstrategier 134
Årskurs 1–2: Mål och innehåll 135
Aritmetik 136
Multiplikativa strukturer 136
Algebra 137
Funktioner och samband 137
Statistik och sannolikhet 137
Årskurs 3–4: Undervisningsstrategier 138
Årskurs 3–4: Mål och innehåll 139
Aritmetik 140
Algebra 141
Funktioner och samband 141
Statistik och sannolikhet 141
Tekniska hjälpmedel och programmering 142
Årskurs 5–7: Undervisningsstrategier 142
Årskurs 5–7: Mål och innehåll 143
Aritmetik 144
Algebra 145
Funktioner och samband 145
Statistik och sannolikhet 145
Tekniska hjälpmedel och programmering 146
Årskurs 8–10: Undervisningsstrategier 146
Årskurs 8–10: Mål och innehåll 148
Aritmetik 148
Algebra 149
Funktioner och samband 149
Statistik och sannolikhet 149
Tekniska hjälpmedel och programmering 150
Appendix C. Progression i Mål och innehåll 151
Aritmetik 151
Tal 151
Additiva strukturer 152
Multiplikativa strukturer 153
Algebra 154
Likhet, ekvationer och uttryck 154

Mönster och talföljder 155
Funktioner och samband 156
Proportionella samband 156
Statistik och sannolikhet 157
Geometri och mätning 158
Tekniska hjälpmedel och programmering 159
Tekniska hjälpmedel 159
Programmering 159
Appendix D. Referenspersoner 161

Om Ämnesspecifika instruktioner

Detta dokument beskriver Ämnesspecifika instruktioner för ämnet matematik. Ämnesspecifika instruktioner är den term läroplansutredningen, *Kunskap för alla*, SOU 2025:19[1] har valt för dokument som i samband med framtagandet av en ny läroplan ska produceras innan de till läroplanen tillhörande kursplanerna tas fram. Ämnesspecifika instruktioner är tänkt att fungera ungefär som ett kommentarmaterial, fast som skrivs före själva kursplanearbetet[2]. En förlaga till detta sätt att ta fram ett förarbete kan vi hitta i arbetet med den reviderade läroplanen för förskolan som kom 2010. Den togs fram av Utbildningsdepartementet tillsammans med ett antal experter och i den processen skapades först ett utvecklat förarbete som publicerades under namnet *Förskola i utveckling*[3]. Först när denna mer omfattande och resonerande text var klar konstruerades själva kursplanetexten. Gruppen som tog fram läroplanen kunde på det sättet först komma överens om själva innehållet och presentera motiv och argument på ett utvecklat sätt utan att begränsas av de textuella ramar som präglar en kursplanetext. Formuleringarna i kursplanetexten kunde sedan tas fram för att på bästa sätt motsvara den tidigare framtagna utvecklade texten. När kursplanen sedan implementerades kunde Förskola i utveckling användas som ett slags förarbete som förklarade hur och i vilken kontext olika textpassager i läroplanen rimligen borde tolkas. Detta står i bjärt kontrast till hur kursplanearbete för grundskolan har gått till, då förhandlingar om innehållet ofta har skett på ren textnivå. Det gör att det i slutändan inte nödvändigtvis finns någon som vet vad en viss formulering är tänkt att. exakt betyda, vilket i praktiken gör alla möjliga tolkningar lika giltiga[4].

I SOU 2025:19 rekommenderas alltså att sådana ämnesspecifika instruktioner tas fram och Skolverket har valt att för varje ämne erbjuda uppdraget till en person[5], efter att alla universitet och högskolor har fått erbjudande om att nominera skribenter. Enligt den arbetsinstruktion som är inkluderad i avtalet med Skolverket ska texten behandla tre aspekter: *En övergripande beskrivning av skolämnet*, *Ämnets mål och innehåll*, samt ha *Ett avsnitt om centrala undervisningsstrategier*. Dessa motsvarar huvudsakligen de fyra rubriknivåer som Läroplansutredningen (SOU 2025:19)

---

[1] I detta dokument används benämningarna Läroplansutredningen eller SOU 2025:19 omväxlande och den formella referensen (Regeringskansliet, 2025) används bara när det särskilt påkallas

[2] I SOU 2025:19 hänvisas till Ahl & Helenius (2024) när idén om Ämnesspecifika instruktioner beskrivs. De i sin tur hänvisar till arbetet med den reviderade läroplanen för förskolan som kom 2010 och det associerade dokumentet Förskola i utveckling (Regeringskansliet, 2010)

[3] (Regeringskansliet, 2010).

[4] Processen som leder fram till denna brist på gemensam förankring av de konkreta kursplaneformuleringarna har beskrivits av Anette Jahnke (Jahnke, 2014, 2016).

[5] För matematik är det alltså jag, Ola Helenius, som skriver. Det kan tilläggas att jag även var tillförordnad expert till läroplansutredningen samt utseddd att för utredningen skriva exemplifierande kursplanetext för ämnet matematik. Dessa ämnesspecifika instruktioner bygger i hög grad på detta arbete tillsammans med diskussioner jag har haft efteråt. Många referenspersoner har också påverkat arbetet. Dessa finns listade i Appendix C. Fem rapporter skrivna ihop med Linda Marie Ahl och Johan Prytz, framtagna under Näringslivets Skolforums paraply, har också varit formaterande för arbetet (Helenius & Ahl, 2023, 2024a, 2024b; Prytz, 2023b, 2023a).

föreslår ska finnas i kursplanerna eftersom den övergripande beskrivningen ska behandla både ämnets syfte i skolan och ämnets roll i relation till de övergripande läroplansmålen.

Detta dokument är alltså tänkt att stödja och styra den fortsatta utvecklingen mot en färdig kursplan. Det är också tänkt att kunna fungera som stöd när ett kommentarmaterial till den kursplan tas fram.

Det går att tänka sig olika grad av specifikation när ämnesspecifika diskussionerna tas fram. Det här dokumentet innehåller förutom argument för olika val som kan göras när en kursplan ska tas fram, även ett fullständigt förslag på hur en sådan kursplan ska se ut. Förslaget är inte riktigt lika genomarbetat i alla sina delar, men bör ändå i huvudsak kunna utgöra ett detaljerat utkast till en färdig kursplan. Dessutom exemplifieras alla kursplanens delar på ett tämligen explicit sätt i förklarande texter och med många bilder och figurer på specifika representationer som kan motsvara olika formuleringar av mål och innehåll, och sätt att förstås och använda dem. Dokumentet är därmed tämligen omfattande. Ett skäl för att gå så här långt i specifikation och exemplifieringsgrad är att ge så bra stöd som möjligt till de som ska färdigställa kursplanen och tillhörande kommentar- och exemplifieringsmaterial. Men framställningen här bör även vara mycket användbar för läromedelsförfattare och förlag. Framställningen i detta dokument är trots omfånget tämligen kompakt och schematiskt. Ett framtida kommentarmaterial behöver använda ett språk mer anpassat till att lärare är de huvudsakliga läsarna. Icke desto mindre är förhoppningen att även detta dokument kan vara intressant att läsa för lärare eller grupper av lärare som vill förbereda sig för en nu kursplan i matematik.

De olika avsnitten i dessa ämnesspecifika instruktioner inleds med resonemang om olika ställningstaganden som är lämpliga att göra i en kursplan inklusive på vilka grunder dessa ställningstaganden görs samt vad de betyder. Därefter följer i varje avsnitt förslag på hur kursplanetext som respekterar dessa ställningstaganden kan se ut. De textavsnitt som beskriver konkret kursplanetext är skrivna i en narrativ progressionsform där avsikten är att beskriva sammanhängande strukturer av mål, innehåll och undervisningsstrategier i ett 1–10. perspektiv. Appendix B innehåller ett komplett kursplaneförslag. Appendix C innehåller avsnittet Mål och innehåll i repetition, men sorterat så att progressionen inom olika delar av ämnet kan följas via färgkodad text. Appendix D listar de referenspersoner som på olika sätt har bidragit till texten eller till arbetet med att ta fram texten.

Ställningstaganden och deklarationer

I detta avsnitt redogörs det för de viktigaste övergripande ställningstagandena som kursplaneförslaget bygger på. Vissa av dessa är en direkt följd av Läroplansutredningens (SOU 2025:19) förslag, medan andra är resultat av överväganden som inte i sig har med Läroplansutredningen att göra. De centrala slutsatserna om kursplanernas utformning som dras i Läroplansutredningen finns återgivna i Appendix A och där finns sidhänvisningar till SOU 2025:19.

Kursplanen ska ha fyra delar

Läroplansutredningen anger två huvudsakliga argument för varför kursplanestrukturen behöver förändras jämför med Lgr22, samt ett argument för att det ska finnas särskilda avsnitt som styr undervisningens utformning

- De olika delarna i kursplanerna – syfte, centralt innehåll och betygskriterier – styr lärarnas planering, genomförande och uppföljning av undervisningen samt deras bedömning och betygssättning på sätt som delvis inte var avsedda. I kursplanerna behöver det ingå fler delar så att varje enskild del kan renodlas mer utifrån sina tänkta funktioner.
- Kursplanerna saknar systematiska kopplingar till läroplanernas inledande delar. En risk med detta är att det blir oklart vem som ska ta ansvaret för de områden som lyfts fram i de inledande delarna. Samtidigt behöver kursplanerna vara ämnesspecifika. Ett sätt att hantera denna problematik är att i kursplanerna visa på hur varje ämne bidrar till läroplanernas inledande delar.
- Kursplanerna behöver innehålla klarare anvisningar om undervisningens genomförande. Ur ett historiskt perspektiv har tidigare svenska kursplaner innehållit såväl avsnitt om metoder som beskrivningar av ämnets karaktär och uppbyggnad. Internationellt är det vanligt med delar som behandlar metoder och arbetssätt i kursplanerna.

Läroplansutredningen specificerar att kursplanerna i de olika ämnena innehålla fyra distinkta delar och att dessa i möjligaste mån inte ska vara dubbelreglerande, dvs varje del ska fylla en specifik roll. De fyra delarna är Syfte, som ska specificera varför ämnet finns i skolan, men inte ange övergripande mål; Ämnets roll för läroplanens övergripande mål som ska beskriva hur ämnesundervisningen kan bidra till de mål som finns i läroplanen; Mål och innehåll där det ska beskrivas vilka kunskaper, färdigheter och förhållningssätt som man vill att eleverna ska få och vilket innehåll som undervisningen ska behandla; samt Undervisningsstrategier. Den sista kategorin kan sägas vara ett tydligt skifte i hur vi i Sverige formulerar kursplaner eftersom man där ska kunna beskriva hur undervisningen bör bedrivas. Till skillnad från att enbart styra med hjälp av att mål för elevernas lärande anges, kan kursplanerna nu alltså även styra genom att reglera undervisningens utformning.

Betygskriterierna ska kunna formuleras ämnesövergripande och det ska av Mål och innehåll kunna avgöras vilka kunskaper som behöver bedömas

Läroplansutredningen anger följande sammanfattande problembeskrivningar för relationen mellan betygskriterier och målformuleringar.

- Betygskriterierna ska inte styra planeringen av undervisningen och det behöver bli mer fokus på undervisning och lärande än på bedömning och betyg.
- Värdeorden som Skolverket införde i Lgr 11 har spelat ut sin roll. De är svårtolkade och alltför generella. Även om dagens betygskriterier är mindre detaljerade än i Lgr 11 bygger de fortfarande på värdeord som är generella för olika ämnen.

Läroplansutredningen föreslår alltså att det inte ska tas fram några specifika betygskriterier för de enskilda ämnena. Det huvudsakliga skälet är att det sådana kriterier tenderar att skapa en dubbelreglering och göra det svårt för lärare och andra berörda att veta om det är angivna Mål och innehåll eller betygskriteriernas formuleringar som egentligen ska styra undervisningens inriktning. Nu föreslås istället mycket generella beskrivningar för fem alternativt tio betygssteg:

– A	10	Utmärkta kunskaper
– B	8–9	Mycket goda kunskaper
– C	6–7	Goda kunskaper
– D	6–7	Mer än godtagbara kunskaper
– E	4–5	Godtagbara kunskaper
– F	1–3	Mindre än godtagbara kunskaper.

Bedömningen är att om det finns mycket tydligare beskrivet mål och innehåll, ska detta direkt kunna användas för övergripande bedömningar. Mål och innehåll ska alltså formuleras så att sådana bedömningar blir möjliga, men målen i sig föreslås inte bli hierakiserade. Varje enskilt mål ska alltså inte nödvändigtvis kunna förstås på olika betygsnivåer. Snarare vill utredningen komma bort ifrån ett synsätt på uppnådda kunskaper som fokuserar på vad som lätt kan bli avprickningslistor så utredningen föreslår att målen för en given årskurs eller ett stadium skrivs fram på ens slags medelnivå. Man kan dock tänka sig att det är önskvärt att formuleringar i mål och innehåll skrivs så att de kan tolkas på flera nivåer. Många av målen beskrivs därför som en form av kunskapsområden. En punkt inom området algebra för årskurs 8–10 är t. ex. *användning och bevis av aritmetiska identiteter i algebraiska form, som konjugatregeln och kvadreringsregeln*. Inom ett sådant område kan man tänka sig att

elever uppvisar ett mycket brett spann av kunskaper, från att bara kunna ange relativt rudimentära argument till varför vissa av de vanliga aritmetiska identiteterna gäller och bara under vissa förutsättningar kunna använda dem, till att kunna ge relativt stringent bevis och kunna använda identiteterna i kreativa sammanhang.

Undervisningens innehåll ska specificeras tydligare

Läroplansutredningen ger följande sammanfattande problembeskrivningar:

- Kursplanerna behöver på ett tydligare sätt ange vad det är meningen att eleverna ska kunna och när det är meningen att de ska göra det. Därför behöver innehållet uttryckas på ett mer konkret och detaljerat sätt. Kursplanerna behöver också ge mer ledning om hur lärarna ska prioritera mellan olika innehåll.
- Progressionen mellan stadier och årskurser behöver förstärkas, bland annat genom att införa mer specifika mål och tydliggöra i vilken ordning olika innehållsområden ska behandlas i undervisningen.

Sedan 90-talet har svenska matematikkursplaner genomgående haft en låg specifikationsgrad när det gäller det matematiska innehåll som ska undervisas, också mycket lägre specifikationer än många andra länder[6]. För det här förslaget gäller att denna specifikation ska öka och att det också ska bli tydligare vad som ska undervisas på vilket stadium. Avsikten är att det ska bli enklare för lärare och läromedelsförfattare att veta vilken matematik som ska prioriteras. Det betyder också att det ska bli lättare för lärare på ett visst stadium, och även gymnasielärare, att veta vilka matematikkunskaper som är rimligt att förvänta sig från elever som kommer från ett lägre stadium. Naturligtvis kommer det alltid att vara stor variation i kunskap mellan olika elever i samma årskurs. En lärare på högstadiet ska dock kunna veta att alla elever har fått systematisk undervisning om till exempel primtal och faktorisering och hur det används för att hantera bråk. En mer explicit beskriven progression bör därför göra det enklare för lärare på senare stadier att både repetera tidigare matematik och att bygga undervisningen av matematik på tankemodeller som eleverna är bekanta med. Det bör även bli enklare för läromedelsproducenter att konstruera sammanhängande progressioner om beskrivningen av vilket matematiskt innehåll som ska behandlas är tydligare i kursplanen.

En tydligare specifikation betyder inte bara att fler begrepp och resultat som ska undervisas nämns explicit, utan även att det kan beskrivas på vilket sätt elever förväntas kunna något. Ett. exempel är addition och subtraktion. Det anges i detta förslag att undervisningen tydligt ska fokusera på sambandet mellan addition och subtraktion och även att undervisningen ska behandla dessa båda operationer tillsammans.

[6] Två rapporter av Prytz visar i detalj hur inte bara specifikationen av innehållet har varierat utan även ämnesspråkets kvalitet (Prytz, 2023b, 2023a)

Tydligare stadieuppdelning

Läroplansutredningen gör följande övergripande sammanfattning:

- Progressionen mellan stadier och årskurser behöver förstärkas, bland annat genom att införa mer specifika mål och tydliggöra i vilken ordning olika innehållsområden ska behandlas i undervisningen.

Även om progressionen i det matematiska innehållet ska bli mer specifik och göra matematiken mer sammanhängande sett över hela grundskolan är avsikten samtidigt att undervisningen ska ha olika fokus på de olika stadierna. Detta hänger också ihop med att undervisningen i högre grad ska anpassas till elevernas kognitiva utveckling. I tillägg delas det nya lågstadiets fyra år upp i detta förslag upp i två delar[7]. Både Mål och innehåll samt Undervisningsstrategier beskrivs alltså separat för årskurserna 1–2, 3–4, 5–7 och 8–10[8]. Det bedöms att de fyra första skolåren är en allt för lång tid för att mål enbart ska anges för slutet av det fjärde året. Dessutom bör de två första åren ha en mer inskolande karaktär än de följande två åren, särskilt när förskoleklassen försvinner som organisatorisk nivå. Denna indelning gör också att man kan ha färre mål och mindre innehåll de första två åren, så att lärarna kan fokusera på det som är viktigast att lära sig tidigt och på att få eleverna att fungera bra i matematikklassrummet.

Kursplanens språk och tilltal

Läroplansutredningen beskriver följande sammanfattande problemformulering:

- Överlag behöver de begrepp som används i kursplanerna bli mer ämnesspecifika.

Både läroplansutredningen, forskning och andra rapporter har uppmärksammat att svenska kursplaner i matematik har avprofessionaliserats språkligt och att länder som antingen presterar mycket bra i matematik i internationella mätningar eller har förbättrat sig avsevärt i sådana mätningar har kursplaner med ett mer ämnesspecifikt språk[9]. I detta förslag har den språkliga nivån höjts avsevärt i den föreslagna kursplanetexten. För att viktiga didaktiska och matematiska distinktioner ska kunna beskrivas måste språket vara specialiserat. I själva kursplanetexten kan det därför finnas ord, termer och uttryck som inte lärare och andra tilltänkta läsare förstår eller ens känner till. Kursplanen kan inte i sig innehålla förklaringar till sådana ord och uttryck. Det kan däremot ett kommentarmaterial göra, liksom denna text. För den här texten har intentionen varit att använda ett så avancerat språk som behövs, men samtidigt förklara vad en viss terminologi avser genom att ge konkreta exempel. I ett

[7] I läroplans utredningen anges det explicit att “I matematik anser vi att mål och innehåll ska anges för årskurs 1–2 och årskurs 3–4” (Regeringskansliet, 2025, s. 311).

[8] I vissa fall kommer vi något oegentligt referera till alla dessa fyra årskursgrupper som stadier trots att det formellt bara finns tre stadier, 1-4, 5-7 och 8-10.

[9] (Prytz, 2023b, 2023a; Regeringskansliet, 2025)

framtida kommentarmaterial är det möjligt att man vill ge ytterligare förklaringar och exempel. När det gäller kursplanetext anses det alltså inte nödvändigt, eller ens rimligt, att elever och föräldrar ska kunna förstå allt som står i kursplanen. De i kursplanen beskrivna målen och innehållet kan alltså behöva omformuleras om de ska kommuniceras till elever eller föräldrar, eller förklaras med exempel.

Läroplansutredningen har också påpekat att det inte ska prioriteras att olika ämnens kursplaner skrivs med likartat språk. Tvärtom är det önskvärt att de sätt som mål, innehåll och undervisningsstrategier beskrivs på grundas i sådana sätt att uttrycka kunskap som finns inom respektive ämnestradition.

Anpassning till barns kognitiva förutsättningar

Ett av uppdragen till läroplansutredningen var att utreda hur skolan i högre grad ska kunna anpassas till barns kognitiva förutsättningar. En sammanfattning av problemen lyder:

- Kursplanerna och betygskriterierna är inte tillräckligt anpassade till elevernas kognitiva utveckling och skilda förutsättningar. Det är för lite fokus på grundläggande kunskaper och färdigheter, särskilt i låg- och mellanstadiet. Vikten av bakgrunds-, referens- eller orienteringskunskaper behöver lyftas fram, liksom vikten av färdighetsträning. Även om fakta betonas något mer i Lgr 22 – bland annat genom att ”kunskaper om” används i målen i vissa ämnen – är det fortfarande förmågor som dominerar i målen. Här behöver alltså balansen mellan å ena sidan grundläggande kunskaper och färdigheter och å andra sidan förmågor som att analysera och reflektera ses över.

Detta är relativt svårt att förhålla sig till när det gäller matematikämnet. Inga studier tyder på att det är för lite fokus på grundläggande kunskaper i låg- och mellanstadiet i matematik. Det går däremot att argumentera för att det fokuseras på fel grundläggande kunskaper och att det inte görs på att för eleverna sammanhängande sätt[10]. Det är också svårt att skilja på vad som kan karakteriseras som fakta respektive förmåga i matematiken. Det är exempelvis enklare för barn att addera tal än att beskriva vad addition är.

Den viktigaste anpassningen som har gjorts i det kursplaneförslag som presenteras här handlar snarare om prioritering av innehåll, dvs att särskilt under lågstadietiden göra det klart att det är aritmetiken som ska prioriteras. Punkterna under Mål och innehåll för aritmetik och algebra är också konstruerade för att i högre grad än nu stödja en långsiktig progression för alla elever. I analyser av läromedel kan det konstateras att relativt tidigt i lågstadiet fokuseras en stor del av innehållet på att utföra beräkningar. Det är visserligen en viktig del av matematiken att kunna utföra beräkningar och många elever i högstadiet kan inte alls utföra beräkningar på den förväntade nivån. Bedömningen är dock att detta inte beror på för lite träning på beräkningar utan på att den begreppsliga progressionen från lågstadiet till högstadiet

[10] (Helenius & Ahl, 2024b)

är mycket större än ökningen i beräkningskomplexitet. Därför har särskilt de tidiga årskurserna inriktats mot en begreppsligt orienterad undervisning, framför allt inom aritmetiken, som ska kunna ge eleverna tankemodeller som är hållbara ändå upp till högstadiet och vidare. När den begreppsliga progressionen redovisas i avsnittet Ämnets mål och innehåll i detta dokument så görs det på ett noggrant och explicit sätt.

Ett ytterligare sätt att relatera till elevers kognitiva förutsättningar ges av nästa rubrik.

Behärska och behandla

Ett dilemma när det ska sättas mål för undervisningen är att elever har olika förkunskaper och lär sig olika mycket av den undervisning som ges. Det är naivt att tro att en viss undervisning ska leda till att alla elever når vissa specificerade kunskapsmål såtillvida man inte sätter dessa mål mycket lågt. Hur bra elever tar till sig undervisning kan bero på deras förkunskaper och tidigare erfarenheter, men också på individuella och relativt stabila olikheter som har med kognitiva och så kallade icke-kognitiva förmågor att göra[11].

En del elever lära sig på direkten sådant som andra elever behöver år av systematisk undervisning för att lära sig[12]. Ett sätt att hantera sådana olikheter är genom individualisering. Hur funktionell individualisering ska kunna gå till har varit ett tema i svensk skoldiskurs sedan idéerna om en gemensam grundskola började att diskuteras[13]. Samtidigt finns det många som hävdar att svensk matematikundervisning redan är allt för individuell, i betydelsen att elever arbetar för mycket enskilt med läroboksuppgifter eller andra uppgifter, och där lärarens arbete handlar om att hjälpa elever som kört fast att komma vidare[14]. Detta är en ineffektiv användning av lärarresursen, som troligen också gör att nivån på det matematiska innehållet i läromedlen sänks och hackas upp i alltför små bitar eftersom undervisningsmodellen måste bygga på att de flesta eleverna kan sitta och arbeta med uppgifter de huvudsakligen redan klarar av[15]. En utgångspunkt för det kursplaneförslag som levereras med denna text är att de undervisningsval som hjälper eleverna att vara framgångsrika i skolmatematiken på sikt inte är samma undervisningsval som gör det lätt att få elever att klara många uppgifter på varje enskild lektion utan allt för mycket hjälp från läraren. I de fall där det har bedömts som möjligt specificerar kursplanen undervisningsinnehåll och

[11] Se diskussionsavsnittet i Eriksson m fl. (2021) för en bakgrund till detta resonemang eller Helenius (2022) för en populärvetenskaplig förklaring.

[12] Se Neuman (2013) för en bra diskussion om detta för området aritmetik.

[13] Se Vinterek (2006) och Giota (2013) för historiska översikter över temat som även belyses i Haldéns (1997) beskrivning av bakgrunden till de stora svenska skolreformerna på 90-talet.

[14] Individualiseringen av den svenska skolmatematiken och den associerade praktiken att räkna en mycket stor mängd övningsuppgifter ha rötter långt tillbaka i tiden. Se Lundin för en beskrivning av hur denna praktik kom till. Det är en vanlig uppfattning att övning på många likartade uppgifter befäster elevers kunskaper, men både empiriskt grundad forskning i matematikämnet

[15] (Helenius & Ahl, 2024b)

undervisningsstrategier som kan förväntas vara fördelaktiga för elevers långsiktiga matematiklärande.

I största möjligaste mån är alltså det kursplaneförslag som beskrivs i denna text konstruerad enligt en princip där utgångspunkten är vad elever bör kunna vid grundskolans slut (eller senare). Utifrån detta har sedan progressionslinjer skapats hela vägen tillbaka till den tidiga matematikundervisningen i grundskolans start. När vissa särskilt viktiga kunskaper har identifierats så har utgångspunkten varit att försöka hitta sätt att introducera den matematiken så tidigt som möjligt för eleverna. Principen har varit att om något är viktigt att kunna men svårt att lära sig, så är det bra om eleverna har så lång tid som möjligt på sig att lära sig, från att den matematiska idén introduceras till att den behöver behärskas[16]. Men om denna princip ska kunna upprätthållas behöver det specificeras innehåll i undervisningen som eleverna inte förväntas behärska vid den tidpunkten, utan snarare att de på ett framåtsyftande sätt ska bekanta sig med. Samtidigt behöver det ju anges vissa kunskaper och färdigheter som man verkligen vill att elever ska ha uppnått i en viss årskurs.

Det sätt att hantera detta är att ha två slag av mål och innehåll. Det som står med normal text är sådant som man på vanligt sätt tänker sig att undervisningen behandlar med målet att det *behärskas* i slutet av det stadie målet är angivet för. Det som är angivet med *kursiv stil* är sådant som undervisningen ska *behandla* men där men inte förväntar sig att typiska elever behärskar det vid stadiet slut. Naturligtvis kan man inte tänka sig att elever behärskar det som ska behärskas lika bra i slutet av stadiet, man måste förvänta sig stor variation. Hur stor variation? Det är inget som dessa ämnesspecifika instruktioner behandlar, eftersom det inte är tänkt att finnas några specifika betygskriterier (se nästa avsnitt).

Att lägga in mer avancerat innehåll tidigare, med det huvudsakliga syftet att elever som har svårare att lära sig ska få mer tid på sig kommer inte vara någon nackdel för elever som har lättare att lära sig. De får ju möjlighet att lära sig det mer avancerade innehållet tidigare och kommer också kunna vara en viktig tillgång i grupparbeten och helklassdiskussioner. Det som är utmaningen är att de elever som har lättare att lära sig inte ska bli uttråkade. Det typiska sättet som mål och innehåll har konstruerats på gör dock att det är relativt enkelt att hitta på uppgifter till ett innehåll med väldigt många olika svårighetsgrader. Om elever i årskurs 1 eller 2 t. ex. arbetar med likheter av typen 3+6=_+4, så finns det inget som hindrar att några elever kan jobba med uppgifter där man generaliserar de underliggande principerna bakom detta sätt att hantera likheter till 30+60=_+40, 43+36=_+44, eller till 33+66=_44 osv.

Även en del mål och innehåll för högstadiet har kategoriserats som behandla, fastän det inte finns någon självklar uppföljning i senare årskurser. Det betyder att de rimligen inte bör prövas på nationella slutprov, så det kan förutsättas att olika lärare i olika hög grad kommer att behandla sådant innehåll. Detta innehåll som

[16] En princip som många tänker sig är att man skulle kunna hacka upp en viss progression i väldigt många små bitar, och försäkra sig om att varje elev klarade varje bit före den tar sig an nästa. Detta kallas ibland mastery learning. Det är dock svårt eller omöjligt att få till i helklass. För enkla lärandemål som klaras av på kort tid (några veckor) går det, men inte över progression som ska administreras över flera år.

kategoriserats som behandla på högstadiet är dock av sådant slag att det inte är avgörande för gymnasiet. Skälet att ändå ha sådant innehåll på högstadiet är för att läraren även där ska kunna ha en viss spännvidd i undervisningen. Nytt innehåll är ju inte bara bra för att man ska lära sig det, utan också som träningsfält för existerande kunskaper och färdigheter.

Hänsyn till nytt betygssystem och det nationella slutprovet

Både Läroplansutredningen (SOU 2025:19) och betygsutredningen (SOU 2025:18) vill att lärare ska ägna sig mer åt undervisning och mindre åt bedömning. Läraren ska sätta sina betyg utan att veta elevens resultat på det nationella slutprovet. Man kan anta att olika lärare (och olika läromedel som läraren använder) kommer att lägga olika prioritet på olika delar av kursplanen. I både betygsutredningen och i läroplansutredningen föreslås att det inte ska finnas några betygskriterier förutom en skala från icke godtagbara till utmärkta kunskaper i matematik. Läraren ska sätta betyg i direkt relation till Mål och innehåll. För de lärarsatta betygen kan i praktiken en individuell lärare göra sina betygsgrundande bedömningar i relation till vad läraren själv har undervisat. Det är alltså rimligt att läraren placerar ut sina elever på betygsskalan med hänsyn taget till elevernas kunskaper inom områden som har prioriterats i undervisningen.

Motvikten till en sådan starkare individualisering är att elevens meritvärde enligt betygsutredningens huvudförslag kommer att till 30% direkt avgöras av resultaten på de nationella slutproven i bland annat matematik. Dessutom tillkommer en slags skalfaktor som beror på en skolas alla elevers samlade resultat på alla ämnens nationella slutprov. Det kommer alltså ligga i allas intresse att fokusera undervisningen på sådan matematik som slutproven i matematik testar. Detta skapar ett dilemma när mål och innehåll i kursplanen ska väljas. Ett. exempel kan förklara dilemmat.

Antag att vi vill skulle vilja ha ett undervisningsinnehåll som går ut på att elever ska få erfarenhet av att med modernt AI-stöd skapa simuleringar av problem inom sannolikhet och statistik i valfritt programspråk. Låt oss anta att det går att skapa ett webbstöd som gjorde det rimligt för skolans lärare att undervisa detta och det kanske skulle vara värt en handfull lektioner spridda över högstadietiden. Men hur skulle ett sådant mål kunna testas på ett digitalt nationellt slutprov givet att man behöver kunna detektera variation i elevkunskaper om saken över en mycket vid skala? Det skulle antagligen vara både tekniskt och testkonstruktionsmässigt komplicerat. Om det inte testas är risken att det inte heller undervisas. För att undvika en sådan situation borde kursplanen bara innehålla mål som är enkelt testbara, vilket skulle göra skolmatematiken väldigt snäv.

Valet som har gjorts är att använda uppdelningen *behärska och behandla* och att mål som anges att de endast ska behandlas på högstadiet inte bör testas på det nationella slutprovet. Olika lärare kommer prioritera sådant innehåll olika, dvs man kan inte räkna med att det blir innehållsmässigt likvärdigt för eleverna. Men genom att endast låta innehåll som inte är direkt centralt för elevernas fortsatta skolmatematiska framgång ligga under kategorin behandla uppstår inga direkta problem på gymnasiet. Och eftersom även mål som står under behandla, trots allt

ska behandlas, bör alla elever få någon slags undervisning relaterat även till dessa mål.

Problemlösning och ett undersökande arbetssätt

I flera kursplaner som föregår den som föreslås i detta dokument har problemlösning haft en central roll. Redan i 1980 år läroplan införs problemlösning som ett så kallat huvudmoment och beskrivs som det första och viktigaste huvudmomentet i den nya kursplanen[17]. I 1994 års kursplan fanns problemlösning också tydligt framskrivet, men då som ett av flera mål av processtyp, dvs mål som handlar om hur matematik utövas, snarare än om det matematiska innehållet[18]. I kursplanerna från och med 2011 har problemlösning funnits med både som ett särskilt centralt innehåll och som en så kallad förmåga. Lgr 22[19] anges det t. ex. att "[u]ndervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla [...] förmåga att formulera och lösa problem med hjälp av matematik och värdera valda strategier". Under rubriken centralt innehåll för årskurs 9 finns punkterna:

- Strategier för att lösa matematiska problem i olika situationer och inom olika ämnesområden samt värdering av valda strategier och metoder.
- Formulering av matematiska frågeställningar utifrån olika situationer och ämnesområden.
- Enkla matematiska modeller och hur de kan användas i olika situationer.

Dessa formuleringar tar sikte på att utveckla elevers förmåga att lösa problem. Men det finns skäl att sätta in problemlösning i ett vidare perspektiv som har att göra med att det också finns andra skäl till att problemlösning är en viktig komponent av undervisningen. Definitionen av problemlösningsorienterad undervisning som används här är att den ska sätta eleverna i en situation de behöver använda kreativa resonemang för att hantera[20] uppgifter. Kreativa resonemang definieras här som motsatsen till imitativa eller algoritmiska resonemang, dvs resonemang som bygger på att eleverna inte kan lösa uppgifter som de blev tilldelade enbart med imitativa metoder. Imitativa metoder betyder att eleven kan använda en teknik eller metod som på förhand kan anses känd för eleven[21].

Undervisning baserad på ett undersökande arbetssätt i syfte att lära sig vissa begrepp eller metoder har ibland beskrivits som en motsats till så kallad explicit

---

[17] (Skolöverstyrelsen, 1982, s. 14)

[18] 1994 års kursplan var överlag tydligt inspirerad av det pågående arbetet i USA som senare ledde till NCTM standard (Bergqvist m.fl., 2010a, 2010b; Boesen m.fl., 2014; Emanuelsson m.fl., 1992)

[19] (Läroplan för grundskolan, - förskoleklassen och fritidshemmet 2022, u.å.)

[20] Användningen av hantera istället för lösa här beror på att en del uppgifter som ges till elever inte nödvändigtvis behöver ha en specifik lösning och dels på att även arbete med en uppgift som inte leder eleven ända fram till en lösning kan vara viktigt.

[21] Detta sätt att beskriva problemlösning bygger på Lithners (2008, 2017) arbete och är mycket etablerat.

undervisning. Detta har gjorts genom att likställa ett undersökande arbetssätt med undervisning baserat på minimal guidning[22]. Detta är en falsk dikotomi. I själva verket måste bra undervisning baserad på ett undersökande arbetssätt vara mycket välplanerad och explicit och innehålla höga grader av guidning. Den typiska lektionen bygger på en introduktion där centrala fenomen görs tillgängliga för eleverna. Därefter kommer en fas där eleverna utforska dessa fenomen. Elevernas undersökande arbete tas sedan omhand i en diskussion och institutionaliseras sedan i en avslutande sammanfattning ledd av läraren. Valen av problem att arbeta med, eller fenomen att undersöka. måste vara noggrant planerade och relaterade till de begrepp eller metoder man vill att eleverna ska lära sig. I den här meningen är ett problemlösande undersökande arbetssätt mycket likt. ex.plicit undervisning. Den centrala skillnaden är att man använder elevernas undersökningar för att forma vad lektionen ska handla om innan man kommer fram till explicita metoder eller begrepp.

Trots många år av fokus på problemlösning och andra förmågor verkar inte undervisningen i svenska matematikklassrum i särskilt hög grad präglas av problemlösning. Problemlösningsuppgifter är inte heller särskilt vanligt förekommande i läromedlen[23]. Det verkar som att ett fokus på problemlösning i kursplaner eller kursplaneliknande dokument inte tenderar att få brett genomslag i den praktiska undervisningen[24]. En tolkning av detta är att det finns viss slags önskvärd utveckling av matematikundervisningen som inte kursplanerformuleringar verkar kunna stimulera. När man betraktar de svenska kursplanerna från 1994 och framåt verkar det dessutom som att fokuseringen på problemlösning och andra förmågor har resulterat i att det matematiska innehållet beskrivs med avsevärt lägre detaljnivå; en slags undanträngningseffekt. Eftersom sådant som skrivs om det matematiska innehållet i en kursplan, i allmänhet verkar få genomslag i läromedel och den praktiska undervisningen, är det bättre att kursplanen i första hand just specificerar matematiskt innehåll[25].

Det finns dock fler effekter av kursplaner än de direkta effekterna på undervisningen och på läromedel. Man kan till exempel beakta lärares fortbildning. Vad som väljs ut för fortbildning kommer troligtvis att påverkas av vad som kan motiveras med stöd i kursplanen. Om inte kursplanerna alls nämner problemlösning eller likartade processer minskar chansen att kompetensutveckling ägnas åt sådant[26]. Faktum är

---

[22] Se Sweller (2007) för en sammanfattning av denna argumentation.

[23] Se t. ex. Jäder m. fl (2015) för en läromedelsanalys och Bergqvist m. fl (2010a) samt Boesen (2014) m fl för klassrumsanalyser

[24] Helenius & Ahl (2023) beskriver t. ex. med utgångspunkt från en forskningsöversikt (Ahl m.fl., 2023) att det generellt verkar vara svårt att implementera processmål via kursplaner, samtidigt som förändrat matematiskt innehåll verkar kunna får tydligt genomslag, se även Prytz (2020).

[25] (Prytz, 2023a). Se även Wahlström (2023). Att ett fokus på problemlösning inte måste resultera en minskad precisering av det matematiska innehållet kan man t. ex. se i Singapores kursplaner (Kaur & Leong, 2021; *Mathematics syllabus. Primary one to six*, 2012). Dessa är dock betydligt mer omfattande än de svenska sett till textmassa ock kan närmast ses som en kombination av en kursplan och ett kommentarmaterial om man översätter det till svenska förhållanden.

[26] Att problemlösningsorienterad undervisning har bra effekt på eleverna när det väl genomförs ordentligt får ses som väl dokumenterat. Se t. ex. Bando m fl (2019) som rapporterar 10

att även en hel del matematikdidaktisk forskning motiveras med argument som hänvisar till kursplaner och liknande dokument. Eftersom det finns mycket goda skäl att hävda att en mer problemlösningsorienterad undervisning är önskvärt, kan det alltså vara motiverat att behandla problemlösning i kursplanen även då man inte förväntar sig att sådana skrivningar utan kompletterande stöd har särskilt tydliga direkta effekter på undervisningen.

Denna argumentationslinje har lett fram till följande ställningstaganden. För det kursplaneförslag som presenteras här har valet gjorts att låta punkterna i avsnitten Mål och innehåll beskriva olika typer av matematiskt innehåll (som *sambandet mellan addition och subtraktion*) eller sätt att behandla matematiskt innehåll (som *hantera uttryck med en blandning av aritmetiska operationer*) och att inte ha problemlösning som en övergripande rubriknivå under Mål och innehåll. Det valet ligger också i linje med Läroplansutredningens förslag om ett förenklat kunskapsbegrepp, som ska bygga på kategorierna kunskaper, färdigheter och förhållningssätt[27]. Däremot ägnas flera tydliga stråk genom avsnitten Undervisningsstrategier för åk 1–2, 3–4, 5–7 och 8–10 åt att beskriva att olika aspekter av problemlösningsorienterad undervisning ska prägla undervisningen. Avsikten har varit att skapa en tydligare progression för vad problemlösning ska kunna innebära och vad undervisningen ska fokusera på i de olika stadierna. I de kommentarer som finns i anslutning till att undervisningsstrategier för de olika årskurserna beskrivs finns utvecklade beskrivningar av hur problemlösning och undersökande arbetssätt är tänk att prägla undervisningen.

Kursplanens funktion i olika skolformer

Det kursplaneförslag och tillhörande exempel och argument i dessa ämnesspecifika instruktioner är skrivna för grundskolan. Den bedömning som har gjorts är dock att den kan utgöra en utgångspunkt för kursplaner i den anpassade grundskolan och specialskolan på samma sätt som dagens kursplaner.

En övergripande beskrivning av skolämnet matematik

I detta avsnitt beskrivs övervägande om på vilket sätt matematikämnet i skolan bör beskrivas i en kursplan. I SOU 2025:19 anges att kursplaner i de olika ämnena ska innehålla en text som beskriver varför ämnet finns i skolan och en text som specificerar hur undervisning i ämnet bidrar till att uppfylla läroplanens generella mål.

Matematik är ett mångfacetterat ämne som kan beskrivas på många olika sätt. Men allt som är relevant att säga om matematiken eller om skolmatematiken är inte relevant att skriva i en kursplan. Ett övergripande ställningstagande är att de aspekter av matematiken som är värda att lyfta fram i en syftestext i en kursplan är

klusterrandomicerade kontrollerade studier i flera länder på med över 17000 elever med mycket tydliga positiva effekter även efter fyra år.

[27] Se bilaga 9 i SOU 2025:19 (Regeringskansliet, 2025)

sådana aspekter som på ett eller annat sätt kan hjälpa lärare och andra intressenter att avgöra hur matematiken bör undervisas och hur den därmed bör framstå för skolans elever.

I Sverige har vi en sammanhållen grundskola, dvs alla elever i grundskolan studerar huvudsakligen samma matematik. Det gör att relativt mycket matematik behöver läras ut till alla, eftersom vi ju inte kan veta vilka livsval elever senare kommer att göra och hur mycket och vilken matematik de kommer att ha behov eller nytta av. Detta i sin tur gör att relativt mycket av den matematik som undervisas behöver vara framåtsyftande, alltså av sådant slag att den underlättar fortsatt matematiklärande. Den bedömning som har gjorts är mycket av de färdigheter i de generella och symboliska aspekterna av matematik som gör att det blir lättare att lära sig mer matematik, dvs fortsätta att lära sig i den kommande skolmatematiken. Därför poängteras denna del av matematiken i syftet. Å andra sidan är ju målet med matematikundervisningen i stort att man genom att lära sig matematik i skolan också ska lära sig att använda matematiken i olika sammanhang. Därför poängteras också matematikens tillämpade karaktär. I övrigt förklaras de olika komponenterna av syftestexten i nästa avsnitt.

En sak som också behöver nämnas här är något som skulle kunna varit en del av en syftestext, men som inte är det. En ofta diskuterad fråga i olika länders och regioners kursplaneutveckling är om ett visst lands eller regions speciella kultur ska avspeglas i kursplanen. Ska det förekomma skrivningar som specificerar att undervisningen på olika sätt ska anpassas till den kulturella variation som kan finnas inom en klass eller annan gruppering? Man skulle kunna tänka sig en matematikundervisning som fokuserade på en mycket detaljerad kulturell anpassning, där det som skiljer olika slags matematikutövande åt mellan kulturer lyfts fram. Förtjänsterna med en sådan inriktning på matematiken har bland annat beskrivits inom den så kallade etnomatematikrörelsen[28]. Det kursplaneförslag som presenteras här har dock inte gått den vägen. Hela kursplanekonstruktionen i stort är snarare gjord för att lyfta fram matematikens generalitet i så hög grad som möjligt. Av det skälet undviks i syftestexten sådant som syftar på olikheter mellan kulturer när det gäller användningen av matematik. Istället används en referens till Bishops sex matematiska aktiviteter, som även om de i en given kultur kan arta sig på olika sätt, samtidigt lyfter fram att användning av matematik präglas av vissa gemensamheter. Denna kursplanemässiga prioritering betyder naturligtvis inte att lärare inte kan välja att använda specifika kulturella referenser relaterade till eleverna i den klass de undervisar.

En motivering till varför matematikämnet finns i skolan

I enlighet med diskussionen ovan presenteras här ett förslag på skrivning till varför matematikämnet finns i skolan. Det är samma för alla årskurser. I Appendix B finns förslaget återgivet i sin helhet. Här kommer vi att bryta ned det i kortare delar och förklara den tänkta betydelsen av varje sådan del för sig. Själva kursplanetexten är skriven med blå text

[28] En översikt finns i (D'Ambrosio, 2016)

Matematik är en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning, metodutveckling och för utveckling av matematikspecifika symbolsystem.

Detta är portalparagrafen för posten matematik i Nationalencyklopedin med ett tillägg om att matematik i hög grad handlar om att utveckla speciella notationer, här kallade symbolsystem[29]. Denna skrivning poängterar att målet med matematiken är att lösa problem, samtidigt som den antyder att det som gör matematiken så pass generellt användbar är just dess abstrakta natur. Skälet att lägga till texten om symbolsystem är att det i praktiken snarare är användningen av matematikens symbolsystem än dess abstraktion som gör matematiken praktiskt hanterbar. Sammantaget ger alltså denna inledningsmening riktningen mot att kunna lösa problem klar och antyder att det är genom hantering av de matematikspecifika symbolsystemen som detta ska ske.

Människor i alla kulturer skapar matematik för att kunna använda den till att räkna, mäta, orientera sig, hantera lekar och spel, designa och konstruera samt för att förklara fenomen i sin omvärld. Matematik är alltså både ett tillämpat ämne med en mycket bred uppsättning tillämpningar och en kulturföreteelse med världsvid spridning. Det är därför matematik är ett viktigt ämne i svensk skola, liksom i andra skolsystem världen över.

Detta styckes inledning refererar till Bishop's arbeten om olika kulturers matematik[30]. De sex specificerade användningsområdena av matematik är kända som Bishops sex matematiska aktiviteter och är enligt Bishop kulturövergripande. Bishop är själv tydlig med att olika kulturer kan utveckla väldigt olika typer av matematik, men referensen till Bishop i den här meningen är alltså snarare för att lyfta fram matematikens generella natur. Resten av stycket handlar om att matematiken världen över både existerar som en kulturföreteelse i sig, och för att den är så användbar och att ett tydligt fokus på matematik är någon som förenar skolsystem världen över.

Matematikens abstraktion hanteras huvudsakligen genom starkt sammanlänkade nätverk av matematikspecifika begrepp, metoder och symbolsystem. Sådana symbolsystem kan vara uttryck med siffror och andra tecken, men också grafiska och spatialt orienterade system, som till exempel tallinjer eller koordinatsystem. Matematikens generalitet uppnås genom att samma nätverk av begrepp, metoder och resonemangsformer kan användas för att beskriva och modellera en vid uppsättning av olika fenomen. Det är den kompakta och symboliska naturen av dessa matematikens språk och redskap tillsammans med hur matematikens resultat struktureras i logiskt sammanhängande system som kommer till med hjälp av logisk slutledning som gör matematikens generalitet möjlig och gör den till ett så viktigt verktyg i många olika sammanhang.

Detta stycke återvänder till frågan om matematikens symboliska och kompakta natur. Här ges också vissa exempel för att förklara vad som avses. Att det i allmänhet är samma matematiska begrepp och notationer som kan användas till en stor mängd

[29] Begreppet symbolsystem förklaras mer senare i detta dokument.

[30] (Bishop, 1988)

olika tillämpningar är något som fokuseras specifikt på i denna kursplan. Här beskrivs också att matematiken ofta kommer till genom logiska resonemang av olika slag, men att den ändå är effektiv för att hantera praktiska problem[31].

Skolmatematikens syfte är att eleverna utvecklar matematiska kunskaper och färdigheter så att de i sin framtid kan använda matematik för att tolka och värdera situationer som är matematiska eller där matematiska perspektiv kan tillämpas, i arbetsliv, vardagsliv, vetenskap och media.

Det övergripande målet med skolans matematikundervisning är att elever ska utveckla kunskaper och färdigheter i att hantera matematikens språk och redskap för att med hjälp av dessa kunna ställa matematiska frågor och ge matematiska svar.

I dessa två sista stycken specificeras att matematiken inte bara i stort är att ämne för tillämpning och praktisk användning utan att det också ska vara skolmatematikens syfte och mål. Frasen “i framtiden” är dock avsedd att vara meningsbärande här. Kursplanen som helhet har inte fokus på att eleverna ska använda den matematik de för tillfället har lärt sig till att lösa elevnära problem. I linje med det som redan beskrivits är det snarare allt bättre kunskaper och färdigheter i att hantera matematikens språk och redskap som möjliggör praktisk användning av matematiken. I övrigt är formuleringarna i detta stycke plockade från den danska KOM-rapporten som har varit en inspirationskälla för de matematiska förmågor som präglade tidigare kursplaner. Även om inte förmågorna har samma roll nu, så är sättet man formulerar sig om matematik i KOM-rapporten fortfarande viktigt.

Matematikämnets bidrag till läroplanens övergripande mål

I SOU 2025:19 anges nio förslag på övergripande mål för skolan.

Skolans mål är att varje elev:

- inser värdet av kunskap för möjligheterna att forma sitt liv samt för att förstå och intressera sig för sin omvärld lokalt, nationellt och internationellt,
- tidigt lär sig läsa, skriva och räkna samt vidareutvecklar sin förmåga att använda språk i tal och skrift och att i övrigt dra nytta av språk och matematiskt tänkande,
- har grundläggande kunskaper och färdigheter inom de humanistiska, naturvetenskapliga, praktisk-estetiska, samhällsvetenskapliga och tekniska kunskapsområdena,
- kan bygga uppfattningar på kunskap och kritisk grund samt förmår hantera mångbottnade sammanhang på ett ansvarsfullt sätt utifrån en bred historisk, samtida och kulturell referensram,
- känner till demokratins förutsättningar och villkor, kan arbeta i demokratiska former och ta ställning på demokratisk grund samt är förberedd för delaktighet

[31] Detta har ibland benämnts som matematikens obegripliga effektivitet, se från s 14 och framåt i Helenius och Mouwitz (2009) för en övergripande diskussion.

och medansvar utifrån de rättigheter och skyldigheter som präglar ett demokratiskt samhälle,
- har kunskaper om förutsättningar och dilemman som relaterar till hållbar utveckling ur ekologiska, ekonomiska och sociala aspekter, har insikt i den egna livsstilens betydelse för hälsan, miljön och samhället samt visar respekt för och omsorg om både närmiljön och miljön i ett vidare sammanhang,
- kan förstå, samspela med och respektera andra människor oavsett olikheter samt tar avstånd från våld, förtryck, diskriminering och kränkande behandling,
- tar ansvar för sitt lärande genom egen ansträngning, uthållighet och delaktighet samt visar respekt för och hänsyn mot skolans personal och andra elever som en del av det gemensamma ansvaret för arbetsmiljön på skolan,
- kan göra väl underbyggda val av fortsatt utbildning och yrkesinriktning samt har inblick i kultur-, arbets- och föreningsliv.

Till det exempel på matematikkursplan som finns i SOU 2025:19 togs ett förslag på text som beskriver matematikämnets bidrag till skolans mål fram, huvudsakligen av utredningens sekretariat[32]. Nedan presenteras detta förslag i kursiv stil i delar, som var och en kommenteras.

Ämnet bidrar till att eleverna lär sig matematiskt tänkande och hur matematikens språk och framför allt symbolspråk kan användas för att representera icke-matematiska fenomen och hantera dessa med matematiska metoder.

Denna del av texten fungerar bra till den kursplan som presenteras här.

På detta sätt bidrar ämnet till förståelse av omvärlden på kvantitativ och annan matematisk grund samt för matematikens roll inom olika delar av samhället.

Det skulle vara bättre att ta bort delen om matematikens roll. I Någon mening kommer matematikstudier kanske i sig att ge viss kunskap om matematikens roll i samhället, men i förslaget som presenteras här finns inga sådana mål eftersom det anses vara en samhällsvetenskaplig fråga[33].

Ämnets matematiska kunskapsbas bidrar därmed även till elevernas förutsättningar att bygga uppfattningar på kunskap samt till deras förmåga att hantera sammanhang de ställs inför på ett kritiskt och ansvarsfullt sätt.

Detta är en rimlig effekt.

Ämnets matematiska kunskapsbas bidrar också till förståelse för hur demokrati fungerar och att kunna delta i demokratin, särskilt eftersom många samhällsfrågor representeras och diskuteras i kvantitativa eller statistiska termer.

---

[32] Jag tog fram de andra delarna av kursplaneförslaget men var alltså bara lite inblandad i just detta.

[33] Jämför med MacKenzies (2008) studie om effekten av Black-Scholes-Mertons formel på Chicago-börsen, som är ett utmärkt. exempel på en studie av matematikens roll. Men det är en sociologisk studie, inte en matematisk.

Detta är rimligt, men det blir bättre om man vänder runt meningen lite (se förslag nedan).

Inte minst gäller detta frågor som relaterar till hållbar utveckling inom såväl ekonomiska, ekologiska som sociala områden.

Det är inte givet att skolmatematiken i sig har denna effekt, men meningen kan mjukas upp lite genom att det skriva att skolmatematiken i förlängningen kan göra förståelse för fält som ofta beskrivs i kvantitativa termer

I ämnesundervisningen involveras eleverna att dela sina matematiska tankar och uppfattningar samt delta i diskussion med andra, vilket bidrar till att eleverna lär sig att intressera sig för, förstå och respektera andras tankegångar.

Ja

Ämnets konceptuella karaktär ställer eleverna inför utmaningar som bidrar till att de lär sig att inse värdet av att göra sitt bästa, vara delaktiga och ta ett gemensamt ansvar.
Ja, men meningen kan skärpas, särskilt i relation till skrivningarna i avsnitten undervisningsstrategier om undervisningens sociala natur.

Genom ämnet ges eleverna inblick i metoder med relevans för områden som exempelvis natur- och samhällsvetenskap, teknik, informationsteknologi, tillverkning, finans och försäkring.

Ja, men detta kan bli mer specifikt.

Baserat på denna analys föreslås följande text (presenteras i färg för att markera att det är förslag till kursplanetext).

Ämnet bidrar till att eleverna lär sig matematiskt tänkande och hur matematikens språk och framför allt symbolspråk kan användas för att representera icke-matematiska fenomen och hantera dessa med matematiska metoder. På detta sätt bidrar ämnet till förståelse av omvärlden på kvantitativ och annan matematisk grund. Kunskap i matematik, samt vana att tillämpa matematiken i olika sammanhang bidrar även till elevernas förutsättningar att bygga sina uppfattningar om världen på kunskap samt till deras förmåga att hantera sammanhang de ställs inför på ett kritiskt och ansvarsfullt sätt.

Många samhällsfrågor representeras och diskuteras i kvantitativa eller statistiska termer och information presenteras ofta med hjälp av matematikens representationsformer. Därför bidrar också sådana kunskaper som skolmatematiken kan förmedla till att elever kan ta beslut på välinformerad grund, till exempel beslut relaterade till demokratiska valsituationer. Detta gäller särskilt frågor om hållbar utveckling, där ekonomiska, ekologiska och sociala prioriteringar behöver vägas

samman. I den matematikundervisning som rekommenderas i denna kursplan involveras eleverna att dela sina matematiska tankar och uppfattningar samt delta i diskussion med andra. Detta bidrar till att eleverna lär sig att intressera sig för, förstå och respektera andras tankegångar. Ämnets konceptuella karaktär ställer eleverna inför utmaningar som bidrar till att de lär sig att inse värdet av att göra sitt bästa, vara delaktiga och ta ett gemensamt ansvar. Genom ämnet ges eleverna också inblick i metoder med relevans för områden som exempelvis natur- och samhällsvetenskap, teknik, informationsteknologi, tillverkning, finans och försäkring.

Centrala undervisningsstrategier

Centrala undervisningsstrategier[34] berör både prioriteringar som har med undervisningen långsiktiga effekter och rekommendationer om undervisningens upplägg. En övergripande bedömning som har gjorts är att en mycket viktig del av hur undervisning i matematik bör bedrivas har med själva framställningen av det matematiska innehållet att göra. Därför är undervisningsstrategier tätt kopplade till hur man formulerar mål och innehåll för undervisningen. Den förändring av undervisningen[35] som har bedömts mest angelägen handlar om att matematikundervisningen ur ett begreppsutvecklingsperspektiv behöver bli mer sammanhängande[36]. Att stödja en sådan utveckling med en kursplan görs antagligen bäst genom att konstruera strukturen för mål och innehåll på ett så detaljerat och sammanhängande sätt som möjligt. Det har varit en ambition i detta kursplanearbete. Denna ambition har först och främst påverkat formuleringarna inom mål och innehåll, men avsnittet Undervisningsstrategier innehåller också flera formuleringar avsedda att påpeka behovet av långsiktigt sammanhängande progression.

Det finns även andra rimliga rekommendationer för vad som är en föredragen matematikundervisning. Ett klassiskt problem med matematikundervisning, inte bara i Sverige och inte bara i vår tid[37], är att eleverna arbetar för mycket enskilt med uppgifter. Det gör dels att lärarresursen inte används effektivt, dels att eleverna inte lär sig så mycket som de skulle kunna göra om undervisningen var av mer undersökande slag[38]. Eleverna får få chanser att träna sin resonemangsförmåga, problemlösningsförmåga och kommunikationsförmåga. Ett sätt att med hjälp av kursplaner försöka motverka detta arbetssätt har i Sverige sedan 90-talet varit att skriva in mer eller mindre tydliga beskrivningar som poängterar utveckling av sådana

[34] Undervisningsstrategier är en term som införs i läroplansutredningen SOU 2025:19, Kunskap för alla (Regeringskansliet, 2025). Undervisningsstrategier ska beskriva lämpliga aspekter av undervisningens genomförande, som i de föregående kursplanerna inte alls har reglerats. Skälen för att nu införa sådana avsnitt i kursplanerna beskrivs i avsnitten 3.2.5 och 5.2.5 i SOU 2025:19.

[35] I förhållande till vad man fortfarande kan anta är förhärskande (Bergqvist m.fl., 2010b, 2010a).

[36] (Helenius & Ahl, 2024b, 2024a)

[37] Många av de problem med matematikundervisningen som i Sverige och på det internationella planet har formulerats de senaste 3–4 decennierna formulerade på likartat sätt på 1930-talet (Diesterweg, 1938)

[38] (Bando m.fl., 2019)

förmågor hos eleverna[39]. De svenska kursplanerna från 2011 och framåt har inneburit en kulminering av dessa försök. Som vi har argumenterat för tidigare verkar dock inte den här typen av kursplanemål slå igenom särskilt mycket i den praktiska undervisningen, eller i läromedel. Som vi också har argumenterat för finns fortsatt goda skäl att hävda att undervisning ska involvera problemlösning, resonemang och kommunikation. Eftersom det med den nu aktuella strukturen på kursplanen går att styra och stödja med beskrivningar av önskvärda undervisningsstrategier finns det vissa förhoppningar om att det ska bli lättare att vi får genomslag för en undervisning med tydliga inslag av problemlösning, resonemang och kommunikation.

Svensk undervisning har nu en oklar progression från att förklara och introducera centrala begrepp med hjälp av bilder och konkreta situationer till att stimulera eleverna att resonera i matematikens symbolsystem[40]. Därför beskrivs relationen mellan hur man mycket noggrant i skolmatematiken tidigare delar måste introducera symboler och symbolsystem genom att anknyta till elevernas upplevelsebara värld men att man i senare delen av grundskolan vill att eleverna ska ha kunskaper och färdigheter i att resonera i symbolsystemen[41]. Det finns en tydlig framskriven progression gällande detta.

Att referera till elevernas upplevelsebara värld, istället för till eleverna vardag, är också ett explicit ställningstagande. Det kan finnas goda skäl att i undervisning använda sig att elevers olika vardagliga eller kulturella erfarenheter. Men i kursplanen som helhet poängteras att i så hög grad som möjligt använda sig av referenser och representationer som är så stiliserade, enkla och kroppsnära som möjligt, för att elever i så hög utsträckning som möjligt ska ha likartade erfarenheter av dessa referenser[42].

Ett ytterligare ställningstagande är att ge specificerade undervisningsstrategier för 1–2, 3–4, 5–7 och 7–9 var för sig, eftersom det är en önskvärt att elever i olika åldrar med olika kognitiva förutsättningar, som har kommit olika långt i sin matematikutveckling behöver olika inriktning på undervisningen. I själva verket har bedömningen gjorts att det är enklare att skriva fram en sammanhängande progression om de olika stadierna för tydligare egna uppdrag.

I övrigt framgår de principer för undervisning som har befunnits värda att lyfta fram som undervisningsstrategier i kommentarerna till de specifika kursplaneförslagen i

---

[39] Svenska kursplanearbete har i denna mening varit tydligt inspirerat från internationellt utvecklingsarbete (Emanuelsson m.fl., 1992; Kilpatrick m.fl., 2001; NCTM, 1989, 1991, 1995, 2000; Niss & Jensen, 2002).

[40] Detta kallas ofta att resonera abstrakt, men i detta dokument används nästan undantagslöst terminologin att resonera i eller med matematikens symbolsystem. Poängen med detta är att det går att exakt beskriva vad utgör exempel på sådana resonemang, eftersom symbolsystemen i sig i själva verket är högst konkreta. Det går ju att beskriva exakt hur symbolerna ser ut och exakt vilka evaluerings- och manipulationsprinciper som ska gälla (Ahl & Helenius, 2022; Harnad, 1990). Vad resonera abstrakt betyder, utöver att just använda symbolsystemen, är oklart eller i alla fall mycket svårt att beskriva på ett sätt som gör att man kan veta när eleverna gör det eller ej.

[41] Detta har beskrivits med begreppet epistemologiskt skifte (Ahl & Helenius, 2021b).

[42] Inspirationen är här så kallad embodied cognition, som den t.ex. skriv fram av Lakoff och Núñez (2000).

följande avsnitt. Förslagen till undervisningsstrategier för 1–2, 3–4, 5–7 och 8–10 presenteras var för sig genom att varje stycke, eller ibland del av stycke, följs av en förklaringstext. För att det ska harmoniera med resten av dessa ämnesspecifika instruktioner är själva förslagen till kursplanetext i färg, blått för 1–2, grönt för 3–4, orange för 5–7 och rött för 8–10. Den kommenterande texten är i svart. En del formuleringar är samma eller liknande i alla årskurser medan andra är olika, men varje stycke för varje stadie ges en fullständig kommentar, även om den ibland är identisk med kommentaren för motsvarande stycke för ett annat stadie.

Årskurs 1–2

Matematiken präglas av att ett relativt litet antal mönster och samband används i många olika situationer. När man lär sig matematik är det lätt att också se mönster och samband som är felaktiga eller som inte leder till utvecklingsbara matematiska uppfattningar. Undervisningen ska läggas upp så att sådana icke utvecklingsbara uppfattningar eller missuppfattningar kan synliggöras för att kunna bearbetas och omvärderas.

Första meningen här relaterar tillbaka till matematikens syfte och den karaktäristiska egenskapen att matematikens generellt tillämpbara natur kommer av dess kompakta och abstrakta natur. När man använder sig av konkreta situationer för att skapa matematik, som man måste göra på lågstadiet, kan eleverna ibland se mönster och samband som inte nödvändigtvis motsvarar strukturen hos de matematiska begrepp som ska introduceras. Undervisningen måste avslöja denna typ av uppfattningar och se till att de utmanas.

Eftersom det är mycket tidskrävande att göra detta med varje elev var för sig behöver undervisningen i hög grad bygga på aktiviteter som får elever att i helklass eller grupp dela med sig av sina matematiska tankegångar, ta del av andras tankegångar och delta i fokuserade diskussioner om olika matematiska fenomen. En sådan resonemangsorienterad undervisning utvecklar också elevernas förmåga att kommunicera matematiskt.

I fortsättningen på stycket ovan skiftas fokus till undervisningens organisation. Principen här är att det är tidsmässigt och kanske även kognitivt svårt att kontinuerligt hålla koll på vilka uppfattningar elever former på ett individuellt plan. Men om undervisningen bygger på att elevernas resonemang blir kommunicerade och därefter utmanade, så har läraren större möjligheter att fånga elevernas uppfattningar. Att få eleverna att på detta sätt tillsammans med andra presentera och diskutera sina resonemang är också ett sätt att utveckla förmågan att resonera, liksom förmågan att kommunicera. I praktiken behöver undervisningen alltså innehålla element av kooperativt lärande[43].

Dessutom behöver eleverna arbeta undersökande med problemuppgifter som har potential att åskådliggöra matematiska begrepp och metoder. I sådant arbete förankras elevernas resonemang i deras egna etablerade tankegångar. När arbetet sedan följs upp med lärarledda diskussioner har dessa större chans att få fäste i

[43] (Capar & Tarim, 2015; Johnson & Johnson, 1987, 2009; Slavin, 1996)

eleverna, jämfört med då läraren utan föregående elevarbete beskriver ett begrepp eller förklarar en metod.

Detta stycke handlar om ett undersökande arbetssätt som här har fokus på att elever arbetar med uppgifter som de inte har en på förhand given lösningsmetod för och som istället är till för att de ska använda sina etablerade kunskaper och sätt att tänka för att försöka hantera uppgiften. Om uppgiften då är konstruerad för att uppmärksamma vissa mönster, samband eller sätt att använda vissa representationer så skapas rent kognitivt en förbindelse mellan eleverna existerande tankegångar och det nya som det är tänkt att eleven ska lära sig. Man kan dock inte lämna eleverna med sina funderingar, utan dessa måste följas upp i diskussioner i grupp eller helklass, i enlighet med första stycket.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig.

Denna mening handlar om att skapa en slags repetitionsstruktur. Det är känt från kognitionsvetenskaplig forskning att i princip alla slags kunskaper och färdigheter befästs bättre om de tillämpas i varierande sammanhang. Vi glömmer också det vi lärt oss om vi inte får påminnelser. Det är alltså inte bra att lära ut något och låta elever öva på det länge, och sedan vänta länge, kanske ett helt år, innan man återkommer till det. Istället är det bra att arbete med en viss sak en kortare period och sedan återvända när glömskan börjar att sätta in. Att återkalla minnen under ansträngning, möjligen med minimal hjälp från andra, är ett mycket bra sätt att befästa minnen[44].

Att delta i en sådan undervisningspraktik som beskrivs ovan är en färdighet i sig. De två första skolårens matematikundervisning ska tydligt inriktas mot att skola in eleverna till att delta i sådan undervisning.

Detta stycke bildar en central avslutning för allt det ovanstående. Det handlar om att de första två årens matematikundervisning har som specifikt uppdrag att skola in eleverna i ett rikt och kommunikativt matematikundervisningssammanhang.

I sin mest effektiva form är matematikens språk och redskap komplexa regelsystem. För att ge dessa system mening måste de dock till en början förankras i det konkreta. De första årens skolmatematik ska därför handla om att med stöd i elevers upplevelsebara värld introducera, förankra och använda sådana tankemodeller som lägger en stabil kognitiv grund för de viktigaste matematiska begreppen, metoderna och resonemangsformerna, framför allt inom den grundläggande aritmetiken.

De bärande idéerna i detta stycke är att matematikundervisningen på sikt, i linje med denna kursplans huvudintentioner, behöver sikta mot att eleverna ska behärska matematikens symbolsystem[45]. I skolmatematiken inledning måste dock den

[44] (Cepeda m.fl., 2008; Dunlosky m.fl., 2013; Roediger & Butler, 2011)

[45] En symbol är ett tecken som representerar något men där tecknets form inte avslöjar dess betydelse. Siffror är typiska exempel på symboler. 5 skiljer sig från IIIII som representationer av talet eller antalet fem. Symbolen 5 kan inte i sig manipuleras för att avslöja några egenskaper hos talet, men IIIII kan delas upp som II och III och därmed som i Figur 1 avslöja en möjlig uppdelning av talet

huvudsakliga inriktningen vara att utnyttja de erfarenheter och intuitioner som eleverna har för att ge mening åt de matematiska begrepp som introduceras. Att skriva elevers upplevelsebara värld[46] i stället för att referera till elevens vardag är för att det inte nödvändigtvis är särskilt bra att använda vardagserfarenheter. Dels kan dessa ofta vara så olika mellan elever att det är svårt att hitta det som funkar. Dels kan vardagserfarenheter ibland komma med en struktur som inte passar det man vill illustrera. Dessutom, så snart eleverna har lärt sig lite matematik, är ju deras upplevda verklighet präglad även av den, inte bara av deras vardag. Alla exempel som presenteras i dessa ämnesspecifika instruktioner bygger därför på mycket stiliserade standardsituationer eller på konkreta föremål med så lite kulturell konnotation som möjligt. Det betyder inte att det är dåligt att visa upp hur matematik t.ex. förekommer i konst och kultur, men man behöver bara vara väldigt noga med hur sådana exempel väljs. Med begrepp avses matematiskt idéinnehåll (för benämningar av sådant idéinnehåll används termen term). Metod betyder något särskilt sätt att utföra en viss klass av uppgifter. Matematiska resonemangsformer avser särskilda typer av tankestrukturer som är vanliga i matematiken[47].

Matematikundervisningen ska präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen, framför allt inom aritmetiken, ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna.

Det här är en paragraf som är tänkt att sätta standarden för kursplanen i stort och vilket undervisningsfokus kursplanen är tänkt att åstadkomma, i och med referensen till ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt. Termerna strukturell och algebraisk är delvis överlappande, men strukturell har en lite bredare mening och syftar på ett fokus på hur olika matematiska strukturer och begrepp hänger ihop. Att matematiken för eleverna ska upplevas som sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna är ett mycket högt ställt krav. För att det ska kunna hända behöver dels progressionen vara mycket noggrant uttänkt och man kan inte presentera ett nytt matematiskt begrepp på ett sätt som senare kommer att leda till missuppfattningar, även om det sättet verkar funkar bra till en början. I dessa ämnesspecifika instruktioner finns under Mål och innehåll schematiska beskrivningar av progressioner som särskilt för de första åren är tämligen detaljerade. Dessa progressioner är inte de enda möjliga, men de är i alla fall konstruerade för att försöka att minimera kända missuppfattningar och andra fallgropar på sikt. Avsikten är att sådana progressioner just ska göra matematiken mer pålitlig och förutsägbar för eleverna.

---

fem. Representationer som IIIII kallas ikoniska. Ett symbolsystem består av en begränsad lista symboler som med hjälp av ett regelsystem kan sättas samman och manipuleras för att få olika betydelser. Vårt vanliga positionssystem med bas tio är ett typiskt positionssystem, men vi kommer även sättet att skriva bråk och division som a/b är ett symbolsystem (Ahl & Helenius, 2021a, 2021b, 2022; Harnad, 1990). Denna fotnot förekommer på flera ställen i dokumentet.

[46] Begreppet kommer från Realistic Mathematics Education (Freudenthal, 1991).

[47] Att resonera är i grunden en mental företeelse, men resonemang utvecklas också i grupp (Mercier & Sperber, 2017). Eftersom resonemang därmed kan göras kollektiva, är det rimligt att tala om olika typer eller klasser av resonemang och temen resonemangsform är tänkt att fånga detta

Den huvudsakliga inriktningen för de första två årens skolmatematik är att eleverna ska utveckla relevanta utvecklingsbara mentala modeller för tal och de fyra räknesätten och hur de kan representeras. Med mentala modeller avses sätt att tänka på tal och operationer i termer av ikoniska bildsystem och klasser av additiva respektive multiplikativa situationer. Med utvecklingsbara menas att de modellerna som undervisas, ska vara sådana att de är användbara för beräkningar och resonemang. Modellerna ska också vara sådana att de inte i elevernas framtida matematikutveckling skapar onödiga missuppfattningar. Med relevanta menas att modellerna är upplevelsebara av eleverna och kan representeras och hanteras fysiskt och konkret av eleverna i åldersgruppen samt att modellerna understödjer utveckling av kunskap om hur man kan hantera tal och operationer med matematikens symbolsystem.

Här beskrivs en den viktiga inriktningen att de första årens skolmatematik ska ha som huvudsakligt syfta att utveckla elevernas möjligheter att lära sig aritmetik. Det som avses med paragrafen i sin helhet är att det inte är exempelvis beräkningsstrategier som är det huvudsakliga fokuset utan de underliggande tankesätt som överhuvudtaget hjälper eleverna att förstå hur de grundläggande operationerna inom främst aritmetiken fungerar och fungerar tillsammans. Och de modeller som introduceras ska alltså väljas så att de i så låg grad som möjligt leder till senare missuppfattningar. Det betyder att en del modeller som ofta används i undervisningen bör bytas ut (se mer under avsnittet Aritmetik och Mål och innehåll).

De fyra räknesätten ska grupperas i additiva och multiplikativa strukturer, där det huvudsakliga undervisningsinnehållet under de första två skolåren är tal och additiva strukturer. En sådan gruppering innebär till exempel att addition och subtraktion ska undervisas tillsammans och att undervisningen ska inriktas mot att elever förstår och kan använda sambandet mellan addition och subtraktion för att både beskriva additiva situationer och hantera och beräkna additiva uttryck. Detsamma gäller för multiplikativa strukturer och sambandet mellan multiplikation och division som dock kan behandlas på ett övergripande sätt de första två skolåren.

Här poängteras att allt som har med addition och subtraktion att göra ska undervisas som en sammanhängande struktur, och samma sak med allt som har med multiplikation, division och bråk att göra. Begreppen additiva respektive multiplikativa strukturer[48] är valda för att poängtera detta. Huvudsakliga upplägg för sådan undervisning beskrivs i detalj i avsnittet Aritmetik under Mål och innehåll. Det poängteras också att det är de additiva strukturerna som är i absolut huvudfokus de första två åren.

Undervisningen ska också behandla matematik från områdena Samband och funktioner, Geometri och mätning, samt Statistik och sannolikhet på ett orienterande och översiktligt sätt och med fokus på sådana aktiviteter som fungerar som

[48] Termerna additiva strukturer och multiplikativa strukturer kommer från Vergnaud (Vergnaud, 1979, 2009, 2020). Additiva och multiplikativa strukturer är exempel på ett begreppsfält (conceptual field). Om man tänker på matematiken som ett stort vägnät där alla begrepp, metoder, representationer mm hänger ihop med varandra, så kan man tänka på ett begreppsfält som en stad, där alla begrepp hänger extra tätt ihop via många alternativa vägar. Denna fotnot återkommer som påminnelse flera gånger i texten.

tillämpningar på elevernas aritmetikkunskaper. Undervisningen ska också involvera övning i att kunna använda linjal och andra mätverktyg, att rita strukturerade bilder inklusive med hjälp av linjal, att klippa samt att sortera och strukturera samlingar av objekt.

Här beskrivs att även övriga områden inom matematiken ska behandlas i undervisningen, men inte med samma krav på att de ska behärskas. Två skolår med matematikundervisning är innebär väldigt mycket tid, och det övergripande upplägg som föreslås under Mål och innehåll för aritmetiken och algebran (som i dessa skolår överlappar nästan helt med aritmetiken) täcker långt ifrån in alla denna tid. När andra områden behandlas är det också ett bra sätt att tillämpa kunskaper färdigheter i aritmetik. Den sista mening kan tyckas lite väl generell, men den matematikundervisning som rekommenderas innebär i sig mycket plockande med konkreta objekt, att kunna rita, rutmönster, pilar och på andra sätt strukturera representationer på papper, att klippa exempelvis rektangelfigurer med mera. Därför påpekas det att det är relevant att öva på det i samband med matematikundervisningen. Eftersom undervisningen i sig bygger på hantering av de nämnda representationerna, så handlar det inte typiskt om särskilda klippövningar eller dylikt utan mer om att läraren kan rikta särskild uppmärksamhet mot elever som kan behöva extra stöd i detta.

Årskurs 3–4

I sin mest effektiva form är matematikens språk och redskap komplexa regelsystem. För att ge dessa system mening måste de dock till en början förankras i det konkreta. Skolmatematiken i årskurs 3 och 4 ska handla om att med stöd i elevers upplevelsebara värld introducera, förankra och använda sådana tankemodeller som lägger en stabil kognitiv grund för de viktigaste matematiska begreppen, metoderna och resonemangsformerna, framför allt inom den grundläggande aritmetiken, för att eleverna ska bli allt bättre på att använda aritmetikens symbolsystem för att kunna göra beräkningar och lösa problem.

Detta stycke är mycket likt ett motsvarande stycke i åk 1–2 men är här placerat som en inledning. De bärande idéerna i detta stycke är att matematikundervisningen på sikt, i linje med denna kursplans huvudintentioner, behöver sikta mot att eleverna ska behärska matematikens symbolsystem[49]. I skolmatematiken inledning måste dock den huvudsakliga inriktningen vara att utnyttja de erfarenheter och intuitioner som eleverna har för att ge mening åt de matematiska begrepp som introduceras. Att

[49] En symbol är ett tecken som representerar något men där tecknets form inte avslöjar dess betydelse. Siffror är typiska exempel på symboler. 5 skiljer sig från IIIII som representationer av talet eller antalet fem. Symbolen 5 kan inte i sig manipuleras för att avslöja några egenskaper hos talet, men IIIII kan delas upp som II och III och därmed som i Figur 1 avslöja en möjlig uppdelning av talet fem. Representationer som IIIII kallas ikoniska. Ett symbolsystem består av en begränsad lista symboler som med hjälp av ett regelsystem kan sättas samman och manipuleras för att få olika betydelser. Vårt vanliga positionssystem med bas tio är ett typiskt positionssystem, men vi kommer även sättet att skriva bråk och division som a/b är ett symbolsystem (Ahl & Helenius, 2021a, 2021b, 2022; Harnad, 1990). Denna fotnot förekommer på flera ställen i dokumentet.

skriva elevers upplevelsebara värld[50] istället för att referera till elevens vardag är för att det inte nödvändigtvis är särskilt bra att använda vardagserfarenheter. Dels kan dessa ofta vara så olika mellan elever att det är svårt att hitta det som funkar. Dels kan vardagserfarenheter ibland komma med en struktur som inte passar det man vill illustrera. Dessutom, så snart eleverna har lärt sig lite matematik, är ju deras upplevda verklighet präglad även av den, inte bara av deras vardag. Alla exempel som presenteras i dessa ämnesspecifika instruktioner bygger därför på mycket stiliserade standardsituationer eller på konkreta föremål med så lite kulturell konnotation som möjligt. Det betyder inte att det är dåligt att visa upp hur matematik t. ex. förekommer i konst och kultur, men man behöver bara vara väldigt noga med hur sådana exempel väljs. Med begrepp avses matematiskt idéinnehåll (för benämningar av sådant idéinnehåll används termen term). Metod betyder något särskilt sätt att utföra en viss klass av uppgifter. Matematiska resonemangsformer avser särskilda typer av tankestrukturer som är vanliga i matematiken[51]. I styckets sista mening påpekas att undervisningen i åk 3 och 4 ska ha en något tydligare inriktning på att utveckla elevernas kunskaper och färdigheter att använda matematikens symbolsystem för att lösa problem och göra beräkningar, det vill säga inte bara förlita sig på andra representationer. Dessa intentioner konkretiseras under Aritmetik i Mål och innehåll.

Den huvudsakliga inriktningen skolmatematiken i årskurserna 3–4 är att eleverna ska fortsätta att utveckla relevanta utvecklingsbara mentala modeller för tal och de fyra räknesätten och hur de kan representeras. Med mentala modeller avses sätt att tänka på tal och operationer i termer av ikoniska bildsystem och klasser av additiva respektive multiplikativa situationer. Med utvecklingsbara menas att de modeller som undervisas, ska vara sådana att de är användbara för beräkningar och resonemang. Modellerna ska också vara sådana att de inte i elevernas framtida matematikutveckling skapar onödiga missuppfattningar. Med relevanta menas att modellerna är upplevelsebara av eleverna och kan representeras och hanteras fysiskt och konkret av eleverna i åldersgruppen samt att modellerna understödjer utveckling av kunskap om hur man kan hantera tal och operationer med matematikens symbolsystem.

Stycket är huvudsakligen identiskt med motsvarande stycke för åk 1–2. Här beskrivs en den viktiga inriktningen att de första årens skolmatematik ska ha som huvudsakligt syfte att utveckla elevernas möjligheter att lära sig aritmetik. Det som avses med paragrafen i sin helhet är att det inte är exempelvis beräkningsstrategier som är det huvudsakliga fokuset utan de underliggande tankesätt som överhuvudtaget hjälper eleverna att förstå hur de grundläggande operationerna inom främst aritmetiken fungerar och fungerar tillsammans. Och de modeller som introduceras ska alltså väljas så att de i så låg grad som möjligt leder till senare missuppfattningar. Det betyder att en del modeller som ofta används i undervisningen bör bytas ut (se mer under avsnittet Aritmetik och Mål och innehåll).

---

[50] Begreppet kommer från Realistic Mathematics Education (Freudenthal, 1991).

[51] Att resonera är i grunden en mental företeelse, men resonemang utvecklas också i grupp (Mercier & Sperber, 2017). Eftersom resonemang därmed kan göras kollektiva, är det rimligt att tala om olika typer eller klasser av resonemang och termen resonemangsform är tänkt att fånga detta.

Matematikundervisningen ska präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen, framför allt inom aritmetiken, ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna.

Stycket är identiskt med motsvarande stycken för åk 1–2. Det här är en paragraf som är tänkt att sätta standarden för kursplanen i stort och vilket undervisningsfokus kursplanen är tänkt att åstadkomma, i och med referensen till ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt. Termerna strukturell och algebraisk är delvis överlappande, men strukturell har en lite bredare mening och syftar på ett fokus på hur olika matematiska strukturer och begrepp hänger ihop. Att matematiken för eleverna ska upplevas som sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna är ett mycket högt ställt krav. För att det ska kunna hända behöver dels progressionen vara mycket noggrant uttänkt och man ska inte presentera ett nytt matematiskt begrepp på ett sätt som senare kommer att leda till missuppfattningar, även om det sättet verkar funkar bra till en början. I dessa ämnesspecifika instruktioner finns under Mål och innehåll schematiska beskrivningar av progressioner som särskilt för de första åren är tämligen detaljerade. Dessa progressioner är inte de enda möjliga, men de är i alla konstruerade för att försöka att minimera kända missuppfattningar och andra fallgropar på sikt. Avsikten är att sådana progressioner just ska göra matematiken mer pålitlig och förutsägbar för eleverna.

De fyra räknesätten ska grupperas i additiva och multiplikativa strukturer. En sådan gruppering innebär till exempel att multiplikation och division, samt den associerade representationsformen bråk ska undervisas tillsammans och att undervisningen ska inriktas mot att elever förstår och kan använda sambandet mellan multiplikation och division för att både beskriva multiplikativa situationer och hantera och beräkna multiplikativa uttryck. För additiva strukturer ska undervisningen huvudsakligen präglas av en konsolidering av det tidigare lärandet, och att de etablerade tankemodellerna återanvänds för att hantera bråk och tal i decimalform.

Här poängteras att allt som har med multiplikation, division och bråk att göra ska undervisas som en sammanhängande struktur, vilket även gäller för additiva begrepp som det har poängterats i motsvarande stycke för åk 1–2. Begreppet multiplikativ strukturer är till för att fånga detta övergripande sammanhang[52]. Huvudsakliga upplägg för sådan undervisning beskrivs i detalj i avsnittet Aritmetik under Mål och innehåll. Formuleringen avser att göra klart att i åk 3 och 4 är det ett tydligt fokus på

[52] Termen additiva strukturer kommer från Vergnaud (1979, 2009, 2020). Additiva strukturer är ett. exempel på ett begreppsfält (conceptual field). Om man tänker på matematiken som ett stort vägnät där alla begrepp, metoder, representationer mm hänger ihop med varandra, så kan man tänka på ett begreppsfält som en stad, där alla begrepp hänger extra tätt ihop via många alternativa vägar. Denna fotnot förekommer på flera ställen i texten där termerna additiva eller multiplikativa strukturer förekommer.

multiplikativa strukturer. Det poängteras också att det är de additiva strukturerna som är i absolut huvudfokus de första två åren ska konsolideras i åk 3–4.

För både additiva och multiplikativa strukturer ska undervisningen inriktas mot att när matematiska situationer, som exempelvis uppgifter i textform, behandlas så ska eleverna först skriva ett aritmetiskt uttryck som beskriver situationen och sedan beräkna detta uttryck. Undervisningen i årskurserna 3 och framför allt 4 behöver därför innehålla uppgifter som är svåra att lösa i huvudet men möjliga att lösa när man väl skrivit ned de aritmetiska uttrycken. För att elever ska lära sig att tolka situationer behöver undervisningen ibland erbjuda uppgifter där det inte är på förhand givet om det är en additiv eller multiplikativ situation som ska behandlas.

Detta stycke avser att beskriva att till skillnad från i åk 1–2 ska det i åk 3–4 arbetas mer med att översätta praktiska situationer, t. ex. formulerade som en textuppgift, till matematisk form. En viktig princip är att lära eleverna att inte direkt försöka att lösa uppgiften utan att först tolka den matematiska situationen. För att motivera eleverna till detta behöver uppgifter ibland vara konstruerade så att de är omöjliga att lösa direkt, men blir möjliga att hantera matematisk när man väl skrivit dem som matematiska uttryck eller representerat dem i någon annan matematisk form. Se Figur 14 för ett exempel.

Undervisningen ska också behandla matematik från områdena Samband och funktioner, Geometri och mätning, samt Statistik och sannolikhet på ett orienterande och översiktligt sätt och med fokus på sådana aktiviteter som fungerar som tillämpningar på elevernas aritmetikkunskaper som t. ex. proportionella samband och på begrepp som är särskilt avgörande för den framtida matematikutvecklingen, t. ex. samvariation representerad i grafer (som växande växter, temperaturförändringar), osäkerhet vid mätning och geometriska figurers grundläggande egenskaper och sådana egenskaper kan användas för att klassificera figurer.

Liksom i åk 1–2 ska det huvudsakliga fokuset vara på aritmetiken och algebran, som för dessa årskurser nästan helt överlappar med aritmetiken. Övriga områden kan behandlas mer översiktligt och orienterande med lägre krav på vad man förväntar sig att eleverna ska behärska. Detta avser att ge lärare mer flexibilitet i planeringen. Jämfört med åk 1–2 poängteras dock här vissa aspekter av andra områden som är särskilt bra att eleverna tidigt får börja bekanta sig med.

De följande avslutande styckena är huvudsakligen samma som finns i Undervisningsstrategier för årskurserna 1–2, men är här placerade som en avslutande uppsummering, snarare än som portalparagraf för hela texten.

Matematiken präglas av att ett relativt litet antal mönster och samband används i många olika situationer. Men när man lär sig matematik är det lätt att också se mönster och samband som är felaktiga eller som inte leder till utvecklingsbara matematiska uppfattningar. Undervisningen ska läggas upp så att sådana icke utvecklingsbara uppfattningar eller missuppfattningar kan synliggöras för att kunna bearbetas och omvärderas.

Första meningen här relaterar tillbaka till matematikens syfte och den karaktäristiska egenskapen att matematikens generellt tillämpbara natur kommer av dess kompakta

och abstrakta natur. När man använder sig av konkreta situationer för att skapa matematik, som man måste göra på lågstadiet, kan eleverna ibland se mönster och samband som inte nödvändigtvis motsvarar strukturen hos de matematiska begrepp som ska introduceras. Undervisningen måste avslöja denna typ av uppfattningar och se till att de utmanas.

Eftersom det är mycket tidskrävande att göra detta med varje elev var för sig behöver undervisningen i hög grad bygga på aktiviteter som får elever att i helklass eller grupp dela med sig av sina matematiska tankegångar, ta del av andras tankegångar och delta i fokuserade diskussioner om olika matematiska fenomen. En sådan resonemangsorienterad undervisning utvecklar också elevernas förmåga att kommunicera matematiskt.

I denna fortsättning på stycket ovan skiftas fokus till undervisningens organisation. Principen här är att det är tidsmässigt och kanske även kognitivt svårt att kontinuerligt hålla koll på vilka uppfattningar elever formar på ett individuellt plan. Men om undervisningen bygger på att elevernas resonemang blir kommunicerade och därefter utmanade, så har läraren större möjligheter. Att få eleverna att på detta sätt tillsammans med andra presentera och diskutera sina resonemang är också ett sätt att utveckla förmågan att resonera, liksom förmågan att kommunicera. I praktiken behöver undervisningen alltså innehålla element av kooperativt lärande[53].

Dessutom behöver eleverna arbeta undersökande med problemuppgifter som har potential att åskådliggöra matematiska begrepp och metoder. I sådant arbete förankras elevernas resonemang i deras egna etablerade tankegångar. När arbetet sedan följs upp med lärarledda diskussioner har dessa större chans att få fäste i eleverna, än om läraren utan föregående elevarbete beskriver ett begrepp eller förklarar en metod.

Detta stycke handlar om ett undersökande arbetssätt som här har fokus på att elever arbetar med uppgifter som de inte har en på förhand given lösningsmetod för och som istället är till för att de ska använda sina etablerade kunskaper och sätt att tänka för att försöka hantera uppgiften. Om uppgiften då är konstruerad för att uppmärksamma vissa mönster, samband eller sätt att använda vissa representationer så skapas rent kognitivt en förbindelse mellan eleverna existerande tankegångar och det nya som är tänkt att eleven ska lära sig. Man kan dock inte lämna eleverna med sina funderingar, utan dessa måste följas upp diskussioner i grupp eller helklass, i enlighet med första stycket.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig.

Denna mening handlar om att skapa en slags repetitionsstruktur. Det är känt från kognitionsvetenskaplig forskning att i princip alla slags kunskaper och färdigheter befästs bättre om de tillämpas i varierande sammanhang. Vi glömmer också det vi lärt oss om vi inte får påminnelser. Det är alltså inte bra att lära ut något och låta elever öva på det länge, och sedan vänta länge, kanske ett helt år, innan man

[53] (Capar & Tarim, 2015; Johnson & Johnson, 1987, 2009; Slavin, 1996)

återkommer till det. Istället är det bra att arbete med en viss sak en kortare period och sedan återvända när glömskan börjar att sätta in. Att återkalla minnen under ansträngning, möjligen med minimal hjälp från andra, är ett mycket bra sätt att befästa minnen[54].

Att delta i en sådan undervisningspraktik som beskrivs ovan är en färdighet i sig som behöver underhållas och utvecklas genom hela grundskolan.

Detta stycke bildar en central avslutning för allt det ovanstående. Men medan motsvarande formulering i åk 1–2 beskriver en slags inskolning, handlar det i åk 3–4 om att underhålla detta arbetssätt så att eleverna kan utvecklas vidare.

Årskurs 5–7

Undervisningen i årskurserna 5–7 ska präglas av ett ökat fokus på formell matematisk notation och kommunikation. Matematikens notationer och symbolsystem är inte bara centrala för att kommunicera matematik mellan människor utan också för att organisera och administrera sitt matematiska tänkande. Att tydligt och stringent kunna beskriva matematiska argument och resultat i skrift är en förutsättning för att kunna hantera problem vars lösning kräver flera steg och överstiger vad vårt arbetsminne kan hantera. Därför ska sådan matematisk notation vara prioriterad i årskurserna 5–7. Detta stycke poängterar att undervisningen i årskurserna 5–7 i högre grad ska inriktas mot att utveckla elevernas färdigheter i att använda matematikens symbolsystem[55] och andra sätt att administrera matematiska notationer. Skälet för det ökade fokuset på skriftlig kommunikation är att de mer komplexa matematiska problemställningarna blir omöjliga att hantera i huvudet. Man måste kunna dela isär problem i delproblem som behandlas var för sig. Om man då inte på papper eller i annan form kan teckna ned och hålla ordning på sina resonemang kommer man inte att kunna klara av problem i flera steg som i sin helhet överskrider ens kognitiva förmåga. Ett ökat fokus på sådan skriftlig kommunikation även bra för att förbättra kommunikationsförmågan i sig. Detta stycke kan ses som en naturlig progression från motsvarande inledningsstycke för åk 3–4

Eftersom matematisk problemlösning karakteriseras av att redan kända metoder kombineras ihop för att lösa nya och mer komplexa problem är ett viktigt fokus för matematiken i årskurserna 5–7 att utveckla en tillräckligt omfattande samling av matematiska situationer som eleverna kan hantera med metoder som eleverna

---

[54] (Cepeda m.fl., 2008; Dunlosky m.fl., 2013; Roediger & Butler, 2011)

[55] En symbol är ett tecken som representerar något men där tecknets form inte avslöjar dess betydelse. Siffror är typiska exempel på symboler. 5 skiljer sig från IIIII som representationer av talet eller antalet fem. Symbolen 5 kan inte i sig manipuleras för att avslöja några egenskaper hos talet, men IIIII kan delas upp som II och III och därmed som i Figur 1 avslöja en möjlig uppdelning av talet fem. Representationer som IIIII kallas ikoniska. Ett symbolsystem består av en begränsad lista symboler som med hjälp av ett regelsystem kan sättas samman och manipuleras för att få olika betydelser. Vårt vanliga positionssystem med bas tio är ett typiskt positionssystem, men vi kommer även sättet att skriva bråk och division som a/b är ett symbolsystem (Ahl & Helenius, 2021a, 2021b, 2022; Harnad, 1990). Denna fotnot förekommer på flera ställen i dokumentet.

känner igen, samt att eleverna sätts i situationer där kända lösningar kombineras ihop eller justeras för att lösa nya problem.

Detta stycke innehåller en slags deklaration om karaktären på matematisk problemlösning, nämligen att det inte bara handlar om att vara kreativ, utan kanske mer om att vara kreativ genom att modifiera eller kombinera ihop redan kända metoder. Naturligtvis kan problemlösning även i tidigare årskurser präglas av sådant, men där skrevs det snarare fram att problemlösning och undersökande arbetssätt var en del i att lära sig matematik i allmänhet. Detta är aktuellt även i åk 5–7, men alltså med ett ökat fokus på att tillämpa existerande kunskaper kreativt. Denna formulering beskriver en koppling mellan metoder och rutiner och problemlösning.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig. Att använda kända metoder i nya kontexter på ett kreativt sätt eller i kombination med varandra kan också vara en del i att befästa metoderna i minnet.

Detta stycke finns även för tidigare årskurser och är bara lite justerat här. Det handlar om att skapa en slags repetitionsstruktur. Det är känt från kognitionsvetenskaplig forskning att i princip alla slags kunskaper och färdigheter befästs bättre om de tillämpas i varierande sammanhang. Vi glömmer också det vi lärt oss om vi inte får påminnelser. Det är alltså inte bra att lära ut något och låta elever öva på det länge, och sedan vänta länge, kanske ett helt år, innan man återkommer till det. Istället är det bra att arbete med en viss sak en kortare period och sedan återvända när glömskan börjar att sätta in. Att återkalla minnen under ansträngning, möjligen med minimal hjälp från andra, är ett mycket bra sätt att befästa minnen[56].

Matematikundervisningen ska präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen, ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna. I årskurserna 5–7 ska det också vara ett ökat fokus på att arbeta i formella symbolsystem, inklusive att arbeta med uttryck och likheter som innehåller variabler med bokstavsbeteckningar.

Detta stycke liknar motsvarande stycken för tidigare år är även här en paragraf som är tänkt att sätta standarden för kursplanen i stort och vilket undervisningsfokus kursplanen är tänkt att åstadkomma, i och med referensen till ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt. Termerna strukturell och algebraisk är delvis överlappande, men strukturell har en lite bredare mening och syftar på ett fokus på hur olika matematiska strukturer och begrepp hänger ihop. Att matematiken för eleverna ska upplevas som sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna är ett mycket högt ställt krav. Eleverna bör när de kommer till mellanstadiet redan ha matematiska kunskaper och färdigheter som bildar en sammanhängande struktur utan motsägelser och som de kan lite på fungerar även framåt. Men detta behöver konsolideras i mellanstadiets undervisning samtidigt som nya begrepp introduceras på sätt som återanknyter till de tankemodeller som elever redan har med sig. Det här betyder att mellanstadiets lärare måste veta om hur

[56] (Cepeda m.fl., 2008; Dunlosky m.fl., 2013; Roediger & Butler, 2011)

undervisningen på lågstadiet har bedrivits. Den sista meningen återupprepar fokuset på formella system och lägger till att man på mellanstadiet även ska utvidga elevernas aritmetikkunskaper så att de även täcker arbete med variabler eller andra ickenumeriska symboler.

Inom aritmetikområdet ska det vara fortsatt fokus på multiplikativa strukturer och särskilt bråkuttryck och hur dessa kan användas för att beskriva flera olika matematiska situationer och på hur bråkuttryck hanteras i beräkningar. Även bråkuttryckens täta koppling till hanteringen av proportionella situationer ska vara i fokus.

Denna paragraf beskriver att en stor del av undervisningen även på mellanstadiet ska handla om multiplikativa strukturer[57] dvs allt som har med multiplikation, division och bråk att göra, vilket inkluderar proportionella situationer och förhållanden. Det framgår i Mål och innehåll hur detta kan göras.

I årskurserna 5–7 behandlas matematik från områdena Funktioner och samband, Geometri och mätning och Sannolikhet och statistik med ökad formalitet jämfört med den översiktliga behandlingen i tidigare årskurser. Särskilt viktiga fokusområden är Proportioner och proportionella resonemang samt användandet av variabler för att kunna ställa upp uttryck för olika matematiska situationer och beräkna dessa som ekvationer. I detta arbete ska det särskilt fokuseras på att eleverna lär sig att ange argument för de likheter de ställer upp.

Till skillnad från i lågstadiet ska det i mellanstadiet läggas mer undervisningsfokus på övriga matematikområden. Eftersom eleverna nu också är mer kompetenta inom aritmetik och algebra, går det att behandla andra områden mer formellt och inkludera uppgifter som kräver mer färdigheter i aritmetik och algebra. Proportionella resonemang lyfts fram som ett särskilt viktigt område med tillämpningar inom flera andra matematikområden, vilket motiverar att proportionella samband är ett särskilt delområde inom området Funktioner och samband.

I de tidigare årskurserna har elevernas upplevelsebara värld huvudsakligen använts för att skapa mening åt matematiska begrepp, som exempelvis tal och operationer. I årskurserna 5–7 ska undervisningen också inkludera hur redan konsoliderade matematikkunskaper kan användas för att matematisera situationer som ännu inte är beskrivna matematiskt, beskriva och formulera sådana situationer i matematisk form, så att de kan hanteras med matematiska metoder. Det ställer också ökade krav på att lösningarnas giltighet värderas i relation till originalsituationen.

Den här formuleringen bygger vidare på formuleringar från tidigare årskurser om att kunna skriva ned aritmetiskt uttryck för situationer som beskrivs i uppgifter, innan man med matematiska metoder försöker att hantera dessa uttryck. Nu skärps detta

[57] Termen multiplikativ struktur kommer från Vergnaud (1979, 2009, 2020). Additiva och multiplikativa strukturer är exempel på ett begreppsfält (conceptual field). Om man tänker på matematiken som ett stort vägnät där alla begrepp, metoder, representationer mm hänger ihop med varandra, så kan man tänka på ett begreppsfält som en stad, där alla begrepp hänger extra tätt ihop via många alternativa vägar. Denna fotnot återkommer som påminnelse flera gånger i texten.

fokus och riktas mer mot modellering. De situationer som ska hanteras kan på mellanstadiet vara lite mer realistiska och därmed ibland mer svårtolkade. Det kräver ett ökat fokus på att eleverna värderar den matematiska lösningen i relation till den ursprungliga problemformuleringen.

Oavsett om undervisningen handlar om att lösa problem med hjälp av etablerade begrepp och metoder eller om att introducera nya begrepp eller metoder ska den präglas av ett problemlösande arbetssätt. Det betyder att eleverna ska arbeta med uppgifter som de inte har en färdig lösningsmetod för. Dels är det viktigt att träna sig på att kunna hantera matematiska situationer där man inte direkt ser en lösning framför sig. Men ett problemlösande arbetssätt med tydlig uppföljning i helklass eller grupp är också ett sätt för läraren att få information om hur nya begrepp och metoder har fått fäste i elevers etablerade matematiska tänkande. Lektioner eller lektionssekvenser behöver ha en tydlig riktning som kan avslutas med att läraren samlar ihop och strukturerar det som har hänt och ser till att det får en form som är tydligt strukturerad och gärna skriver ned de viktigaste slutsatserna och i senare undervisning tydligt plockar upp dessa igen. Detta är en viktig del i att göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna, och visa att ny matematik nästan alltid bygger på redan etablerade matematiska kunskaper.

Denna formulering följer upp motsvarande formulering för tidigare årskurser och handlar om problemlösning och ett undersökande arbetssätt. Problemlösningens koppling till rutiner och metoder berördes redan i stycke två ovan, men här är det snarare ett problemlösande arbetssätt i stort som ligger i fokus. Liksom för tidigare år poängteras att problemlösning inte är en enskild verksamhet för eleverna, utan ska sättas i ett sammanhang där läraren leder en uppsummerande sammanfattning av arbetet. Detta betyder inte bara att elever eller grupper redovisar sina lösningar, utan att man under lärarens ledning drar övergripande slutsatser från arbetet. För att detta ska vara möjligt behöver alla i klassen i någon mening arbete med problem som handlar om samma sak. Även om olika elever har olika kunskaper och arbetar med problem på olika nivåer, så ska det alltså finnas några gemensamma principer i spel som kan bilda grund för gemensamma slutsatser.

Årskurs 8–10

Även avancerad matematik introduceras ofta med referenser till ikoniska bildsystem eller konkreta företeelser, men för att effektivt kunna arbeta matematiskt måste man också kunna arbeta med och operera direkt på matematikens symbolsystem. Ett fokus i årskurserna 8–10 är därför att elever ska kunna hantera matematiska situationer på ett flexibelt sätt, oberoende av talområden och talrepresentationer och även om kvantiteter eller objekt betecknas med variabler eller bokstäver.

Den här formuleringen har tydliga beröringspunkter med motsvarande formuleringar för tidigare årskurser men här tas ett tydligare steg mot att eleverna måste kunna arbete i de matematiska symbolsystemen[58]. Det poängteras att ett syfte med

[58] En symbol är ett tecken som representerar något men där tecknets form inte avslöjar dess betydelse. Siffror är typiska exempel på symboler. 5 skiljer sig från IIIII som representationer av talet eller antalet fem. Symbolen 5 kan inte i sig manipuleras för att avslöja några egenskaper hos talet,

matematikundervisningen i stort är att eleverna nu i slutet av grundskolematematiken inte ska begränsas av talområde eller talrepresentationer i sin hantering av uppgifter. I stycket återkommer också formuleringen från tidigare år om ett algebraiskt förhållningssätt. Progressionen från tidigare här är att det algebraiska förhållningssättet initialt var till för att skapa en generell och sammanhängande matematik, där få representationer och resonemangsformer kunde samla en stor mängd matematik och matematiktillämpningar. Här har vi kommit till att de kunskaper i algebra och formell aritmetik som har byggts upp ska tillämpas i vida sammanhang.

Matematikundervisningen ska alltså präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna. Algebrans representationsformer och metoder ska ha en tydlig roll inom alla områden av matematiken, särskilt för att hantera funktioner och samband och samvariation. Nya begrepp och representationer inom områdena Funktioner och samband, Geometri och mätning och Sannolikhet och statistik ska introduceras med ökad formalitet jämfört med den översiktliga behandlingen i tidigare årskurser.

I linje med föregående stycke är det alltså meningen att elever ska kunna hantera bråk i till exempel geometriuppgifter och att arbete med bråk, eller för den delen variabler eller andra ickenumeriska symboler inte bara kan förekomma i särskilda arbetsområden utan måste prägla allt matematiskt arbete. Inför åk 8–10 ska det mesta av aritmetiken och algebran egentligen vara avklarad. Det är fortfarande viktigt att högstadiets undervisning konsoliderar denna kunskap genom att den används och genom att förklaringar och principer repeteras, vilket alltså betyder att lärare på högstadiet behöver känna till hur de centrala begreppen tidigare har behandlats. Att skapa ett sådant sammanhang i relation till elevernas tidigare undervisning är ett sätt att låta matematiken förbli sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna.

Undervisningen i årskurserna 8–10 ska också präglas av användning av formell matematisk notation och kommunikation och av att beskriva argument för samband och resultat med hjälp av formella resonemang. Att tydligt och stringent kunna beskriva matematiska argument och resultat i skrift är en förutsättning för att kunna hantera problem vars lösning kräver flera steg och överstiger vad vårt arbetsminne kan hantera.

Denna formulering är lik första stycket för årskurs 5–7. Att bibehålla fokus på skriftlig kommunikation är för att de komplexa matematiska problemställningarna är omöjliga att hantera i huvudet. Man måste kunna dela isär problem i delproblem som behandlas var för sig, och om man då inte på papper eller i annan form kan teckna ned och hålla ordning på sina resonemang kommer man inte att kunna klara av problem i flera steg som i sin helhet överskrider ens kognitiva förmåga. Ett ökat fokus

---

men IIIII kan delas upp som II och III och därmed som i Figur 1 avslöja en möjlig uppdelning av talet fem. Representationer som IIIII kallas ikoniska. Ett symbolsystem består av en begränsad lista symboler som med hjälp av ett regelsystem kan sättas samman och manipuleras för att få olika betydelser. Vårt vanliga positionssystem med bas tio är ett typiskt positionssystem, men vi kommer även sättet att skriva bråk och division som a/b är ett symbolsystem (Ahl & Helenius, 2021a, 2021b, 2022; Harnad, 1990). Denna fotnot förekommer på flera ställen i dokumentet.

på sådan skriftlig kommunikation även bra för att förbättra kommunikationsförmågan i sig.

I årskurserna 8–10 ska undervisningen liksom i tidigare stadie inkludera hur redan konsoliderade matematikkunskaper kan användas för att matematisera situationer som ännu inte är beskrivna matematiskt. Det vill säga beskriva och formulera sådana situationer i matematisk form, så att de kan hanteras med matematiska metoder. Det ställer ökade krav på att lösningarnas giltighet värderas i relation till originalsituationen. Sådana problem kan med fördel hämtas från andra ämnesområden, eller från media, och involvera situationer där matematik från olika områden behöver kombineras. Eleverna ska få tillfällen att använda den mest avancerade matematiken de kan, vilket betyder att många av de tillämpade problemen ska formuleras så att olika talområden och talrepresentationer måste användas. Detta inkluderar variabler och algebraiska uttryck.

Den här formuleringen bygger vidare på formuleringar från tidigare årskurser om att kunna skriva ned aritmetiska uttryck för situationer som beskrivs i uppgifter, innan man med matematiska metoder försöker att hantera dessa uttryck. Detta skärptes på mellanstadiet i riktning mot modellering dvs mot att hantera mer realistiska och därmed ibland mer svårtolkade situationer. Det kräver ett ökat fokus på att eleverna värderar den matematiska lösningen i relation till den ursprungliga problemformuleringen. Nu skärps detta ytterligare med det ovan nämnda syftet att elever inte ska begränsas av talområden och talarpresentationer eller förekomst av variabler.

Matematisk problemlösning är en kreativ verksamhet där kombinationer av kända metoder sätts samman eller modifieras för att hantera nya situationer. Med hjälp av ett etablerat bibliotek av matematiska situationer och tillhörande lösningsmetoder, som ibland kan komma från olika delar av matematiken, skapas möjligheter att hantera nya och mer komplexa situationer. Att utvecklas till en kreativ matematisk problemlösare handlar inte bara om att lösa nya problem, utan också om att analysera lösningar och undersöka lösningarna giltighet för att hantera klasser av problem som är näraliggande originalproblemet. På detta sätt hänger matematisk problemlösning och metodutveckling samman.

Undervisningen ska präglas av att eleverna vänjer sig vid att hantera uppgifter de inte på förhand har fått en färdig lösningsmetod för, men där de alltså samtidigt kan känna en trygghet i att modifikationer och kombinationer av metoder och rutiner de redan kan, troligen kommer att hjälpa dem lösa problemet. Oavsett om undervisningen handlar om att lösa problem med hjälp av etablerade begrepp och metoder eller om att introducera nya begrepp eller metoder ska den bygga på ett problemlösande arbetssätt. Dels är det viktigt att träna sig på att kunna hantera matematiska situationer som man inte har en på förhand given metod för att hantera.

Men ett problemlösande arbetssätt med tydlig uppföljning i helklass eller grupp är också ett sätt för elever att lära sig och för läraren att få information om hur nya begrepp och metoder har fått fäste i elevers etablerade matematiska tänkande. Lektioner eller lektionssekvenser behöver ha en tydlig riktning som kan avslutas med att läraren samlar ihop och strukturerar det som har hänt och ser till att det får en form som är tydligt strukturerad och gärna skriver ned de viktigaste slutsatserna och i

senare undervisning tydligt plockar upp dessa igen. Detta är en viktig del i att göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna, och visa att ny matematik nästan alltid bygger på redan etablerade matematiska kunskaper.

Denna formulering följer huvudsakligen upp motsvarande formulering för mellanstadiet och handlar om problemlösning och ett undersökande arbetssätt. Problemlösningens koppling till rutiner och metoder berördes redan ovan, men här är det snarare ett problemlösande arbetssätt i stort som ligger i fokus. Liksom för tidigare år poängteras att problemlösning inte är en enskild verksamhet för eleverna, utan ska sättas i ett sammanhang där läraren leder en uppsummerande sammanfattning av arbetet. Detta betyder inte bara att elever eller grupper redovisar sina lösningar, utan att man under lärarens ledning drar övergripande slutsatser från arbetet. För att detta ska vara möjligt behöver alla i klassen i någon mening arbete med problem som handlar om samma sak. Även om olika elever har olika kunskaper och arbetar med problem på olika nivåer, så ska det alltså finnas några gemensamma principer i spel som kan bilda grund för gemensamma slutsatser. Den avslutande formuleringen om att matematiken för eleverna ska uppfattas som sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser får här en ny twist. I tidigare årskurser och när formuleringen dök upp tidigare i dessa undervisningsstrategier handlade det i hög grad om att de tankemodeller som har använts i undervisningen av viktiga begrepp ska fungera i framtiden och inte behöva bytas eller skapa onödiga missuppfattningar. Här kopplas också formuleringen i fråga till relationer mellan problemlösning och metod. Även om problem naturligtvis kan vara olika svåra och kräva olika grad av kreativitet, ska det vara klart för eleverna att det i huvudsak är kombinationer eller modifikationer av etablerade metoder som ska användas.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig. Att använda kända metoder i nya kontexter på ett kreativt sätt eller i kombination med varandra kan också vara en del i att befästa metoderna i minnet.

Detta stycke är identiskt med motsvarande stycke för åk 5–7. Det handlar om att skapa en slags repetitionsstruktur. Det är känt från kognitionsvetenskaplig forskning att i princip alla slags kunskaper och färdigheter befästs bättre om de tillämpas i varierande sammanhang. Vi glömmer också det vi lärt oss om vi inte får påminnelser. Det är alltså inte bra att lära ut något och låta elever öva på det länge, och sedan vänta länge, kanske ett helt år, innan man återkommer till det. Istället är det bra att arbete med en viss sak en kortare period och sedan återvända när glömskan börjar att sätta in. Att återkalla minnen under ansträngning, möjligen med minimal hjälp från andra, är ett mycket bra sätt att befästa minnen[59].

[59] (Cepeda m.fl., 2008; Dunlosky m.fl., 2013; Roediger & Butler, 2011)

Ämnets mål och innehåll

Principer för urval och prioriteringar

Analyser av kursplaner och läromedel i länder som är särskilt framgångsrika i storskaliga internationella mätningar har visat att deras kursplanestrukturer är mer sammanhängande än länder som presterar mindre bra. Man kan säga att de mest framgångsrika länderna inte duttar ut matematik från olika innehållsområden över hela skoltiden utan skapar tydliga stråk. För de mest centrala områdena är dessa stråk långa. För andra områden kan det finnas goda skäl till att fokusera undervisningen till senare i skolan när eleverna redan kan mycket mer[60]. Det bör alltså vara färre fokuserade områden tidigt i skolan och fler senare. Motsvarande hållning präglar den kursplan som presenteras här. Det betyder att det är betydligt högre fokus på algebra och aritmetik i de tidigare skolåren med avsikten att den absoluta huvuddelen av aritmetiken ska ha behandlats innan mellanstadiet slut för att sedan huvudsakligen konsolideras på högstadiet.

Det är svårt att säga om det som föreslås här innebär en förändrad prioritering av mål och innehåll än i nuvarande kursplan, eftersom specifikationsgraden i nuvarande kursplan är så låg att det är svårt att jämföra. Om man jämför med läromedel och nationella prov kan man nog säga att det inte är några förändringar i vad som prioriteras räknat i önskvärda kunskaper. Men avsikten med den kursplan som föreslås är ju att flera elever ska lära sig mer matematik.

På ett övergripande plan har inga förändrade prioriteringar av mål och innehåll gjorts jämfört med tidigare kursplaner. Den stora förändringen är istället att särskilt vissa delar av innehållet anges med en betydligt högre specifikation. Det har också gjorts ett övervägande om när det är lämpligt att lägga fokus på olika matematiskt innehåll. Detta har gjort att det nu är ett tydligt aritmetiskt och algebraiskt fokus i de tidiga åren.

I övrigt har de prioriteringar som har gjorts handlat om att skapa ett system av mål och innehåll som i mycket högre grad än nu ger förutsättningar för att skapa en sammanhängande matematikundervisning i ett 1–10-perspektiv.

Problemlösning var tidigare ett centralt innehåll, men är nu inte en egen rubrik inom Mål och innehåll. Däremot är problemlösning liksom resonemang och kommunikation tydligt framskrivna i Undervisningsstrategier, där det också finns en progressionsidé för dessa förmågor som gör att de inte rimligen behöver bli mindre prioriterade i undervisningen. Det går dessutom att argumentera för att det historiska ursprunget till uppkomsten av dessa processmål har att göra med önskningar om en förändrad undervisning[61]. Så när läroplansutredningen nu öppnar för att ha skrivningar i kursplaner om önskvärd undervisning kan man argumentera för att det som tidigare var beskrivet som förmågor man vill att eleverna ska uppnå egentligen passar bättre

[60] (Houang & Schmidt, 2008; Valverde & Schmidt, 2000)

[61] Se Boesen m fl. (2014) för en diskussion.

som råd om hur undervisningen bör organiseras. Se diskussionen i avsnittet Undervisningsstrategier.

Ämnets centrala kunskapsområden

Matematiken som vetenskap delas in i ett stort antal områden och delområden där några centrala övergripande områden är aritmetik, algebra, geometri, topologi, analys, statistik och sannolikhet. Alla dessa områden är inte relevanta för grundskolan, i alla fall inte i samma utsträckning. En del saker som strikt taget inte är matematiska ingår av tradition också i matematikundervisningen. Tid är till exempel inte ett matematiskt fenomen, men att kunna mäta tid är oerhört centralt i både samhället och i andra vetenskaper och tidmätning bygger i sig på olika matematiska representationer och principer. Därför ingår tid, tidmätning och klockan typiskt i matematikundervisningen och behöver därför ingå i något delområde[62].

I olika skolsystem och i olika historiska perioder har olika typer av indelningar används. I LGR 80 angavs till exempel huvudmomenten Problemlösning, Grundläggande aritmetik, Mätningar och enheter, Geometri, Algebra och funktionslära, Beskrivande statistik och sannolikhetslära samt Datalära. I LGR 94 är indelningen tämligen otydlig men områdena Taluppfattning, Rumsuppfattning, Mätning och geometri, Statistik samt Algebra, Ekvationer och Funktioner förekommer. I LGR 22 hette områdena Taluppfattning och tals användning, Algebra, Geometri, Statistik och sannolikhet, Samband och förändring samt Problemlösning. Att notera om den senare uppdelningen är att Taluppfattning och tals användning inte beskriver ett matematiskt område utan en kombination av en mental förmåga och ett slags tillämpningsområde för tal. Om ett område i kursplanen benämns taluppfattning och tals användning, varför ska inte området som behandlar geometri omfatta geometriuppfattning och geometrins användning? I stället för att gå åt det hållet används mer klassiska rubriker som beskriver det matematiska innehållet. Även området Problemlösning är av ett annat slag än de områden som beskriver olika slags matematiskt innehåll. Problemlösning är dessutom både en förmåga eller kompetens, och en undervisningsaktivitet och därför har bedömningen gjorts att beskriva rollen av problemlösning, både som undervisningsaktivitet och som ett mål för kunnande, i avsnitten Undervisningsstrategier, i stället för att ha separata mål om problemlösning under Mål och Innehåll. För att ligga närmare klassiska matematiska uppdelningar av innehållet har även området Samband och förändring bytt namn till Funktioner och samband.

Matematiken i detta förslag till kursplan delas alltså in i områdena **Algebra, Aritmetik, Funktioner och samband, Geometri och mätning** samt **Statistik och sannolikhet**. Områdena beskrivs ytterligare under sina respektive rubriker nedan i kapitlet Mål och innehåll. I detta dokument finns också ett särskilt avsnitt **Tekniska hjälpmedel och programmering** under mål och innehåll. Det är inte givet att detta ska vara ett särskilt innehållsområde i en färdig kursplan. Men bedömningen har varit att det är enklare att diskutera rollen av tekniska hjälpmedel och programmering i skolmatematiken om det kan göras i särskild ordning och på ett övergripande sätt.

[62] I Singapores kursplan för årskurs 1 är tid ett särskilt delområde (under mätning och geometri) och även pengar (under Tal och Algebra)

De övervägande som har gjorts om tekniska hjälpmedel och programmering finns i motsvarande avsnitt under Mål och innehåll.

Den innehållsmässiga progressionen

En följd av att matematiken har den generella karaktären som har beskrivits i avsnittet om ämnets syfte är att samma begrepp, principer, metoder och tekniker kommer att förekomma inom flera områden, så snart man delar upp matematiken i områden. Idealt skulle man kanske vilja att ett visst mål eller ett visst innehåll endast skulle förekomma under en viss rubrik. Annars riskerar man en slags dubbelreglering. Ju finare man gör indelningen av matematiken i områden och ju mer specificerade mål man har, desto större är risken för sådan dubbelreglering. Dubbelreglering kan göra det svårare för en lärare att veta om man har behandlat allt innehåll som kursplanen specificerar. Å andra sidan, om det finns en innehållsmässig överlapp mellan områden, så kanske det bidrar till att göra matematiken mer sammanhängande, även om lärare eller läromedel försöker beta av olika områden på ett sekvenserat sätt.

I vad som följer presenteras mål och innehåll tillsammans med argument och exemplifieras för de sex beskriva innehållsområdena var för sig. Avsikten med texten är dels att presentera de specifika mål- och innehållspunkterna, dels att sätta dem i ett progressionssammanhang. Detta görs genom att det för varje innehållsområde och i förekommande fall delområde ges en narrativ beskrivning av innehållet i ett 1–10-perspektiv. Eftersom det är tänkbart att personer som läser denna text inte läser den från pärm till pärm utan går direkt in och tittar i särskilda områden upprepas en del övergripande resonemang, t. ex. om själva framställningen, på många ställen. Särskilt för vissa områden har det i arbetet med dessa ämnesspecifika instruktioner lagt väldigt mycket arbete med att skapa funktionella progressioner. Det betyder att det inte har lags lika mycket arbete på att skapa listor på exakt vilka begrepp som ska finnas med. Det kan därför behövas mer kontrollarbete för att se till att vissa begrepp som rimligen bör ingå inte har glömts bort.

Aritmetik

Som det har beskrivits i avsnittet Undervisningsstrategier ska aritmetiken behandlas på ett strukturerat algebraiskt sätt. För att stödja en sådan behandling är det bra om även mål och innehåll formuleras så att en strukturell progression och en övergång till algebraiskt tänkande premieras. En del i det är också att traditionellt algebraiska sätt att uttrycka generella aritmetiska samband används för att göra aritmetiska samband enklare att identifiera och använda. Undersökningar av existerande läromedel har visat att stora delar av aritmetiken inte beskrivs på ett sammanhängande och strukturerat sätt, vilket riskerar att i onödan skapa missuppfattningar och osäkerhet hos eleverna i deras fortsatta matematikutveckling[63]. I ett försök att stödja förlag och läromedelsförfattare ges därför för aritmetiken (och algebran) en mer utvecklad beskrivning än vad som ges för de andra ämnesområdena. Ur ett psykologiskt inlärningsperspektiv är aritmetiken ihop med algebran ett mycket speciellt område. Med utvecklad algebraisk formalism går det nämligen att sammanfatta hela det regelsystem som styr aritmetiken på

[63] (Helenius & Ahl, 2024b)

någon sida eller två. I den här meningen verkar alltså inte aritmetiken innehålla så mycket information. Men denna formalism kan inte läras ut direkt till barn utan måste förankras i elevernas upplevelsebara värld för att få mening. Den inledande aritmetikundervisningen ska inte bara lära eleverna att utföra beräkningar med de fyra räknesätten utan ska ses som formerande för elevernas hela framtida matematiska förmåga. Därför måste den vara mycket noga genomtänkt. Det mål och innehåll som har valts ut är därför inte bara exempel på viktiga saker att kunna, utan är valda så att hela samlingen av mål och innehåll tillsammans kan bilda en fungerande 1–10-progression. I den beskrivning som följer är därför avsikten väva in punkterna från Mål och innehåll inom området aritmetik till en narrativ progressionsberättelse. De specifika målen anges med blått för årskurserna 1–2, grönt för 3–4, orange för 5–7 och rött för 8–10. Av formuleringsmässiga skäl är inte textsnuttarna i färg exakta kopior av motsvarande kursplanetextutdrag, men det är vid en jämförelse uppenbart vad som avses.

Det mål och innehåll som har valts ut är i de flesta fall formulerat på ett relativt öppet sätt. De exempel som ges i texten nedan är däremot valda för att kunna bilda en sammanhängande progression och är beskrivna på en finare detaljnivå. Det finns naturligtvis andra sätt än det som indikeras här att bygga bra aritmetikundervisning på, men den bedömning som har gjorts är att det särskilt för den tidiga aritmetikundervisningen är bra att beskriva några särskilt viktiga representationer och hur de kan användas tydligt. Därför är detta avsnitt om aritmetik tillsammans med avsnittet om algebra mer omfångsrikt än övriga avsnitt.

Området aritmetik är indelat i tre delar: Tal, Additiva strukturer och Multiplikativa strukturer. Det finns stora överlapp mellan dessa tre och det är inte meningen att de ska kunna separeras i olika undervisningsavsnitt. Det finns dock tillräckligt stora skillnader mellan additivt och multiplikativt tänkande för att det ska vara meningsfullt att prata om det som två områden. Det är svårare att avgränsa vad som ska höra till området Tal (se nedan). Att ändå dela upp aritmetiken i dessa tre områden har dock fördelen att det är enklare att få en överblick över vad som förväntas behandlas i undervisningen. Hela aritmetikområdet har också en mycket tät koppling till området algebra.

När avsnittet nedan läses är det värt att komma ihåg att beskrivningen av hur detta kan undervisas, dvs alla de konkreta bilderna och modellerna, bara är en schematisk beskrivning. Även om texten i detta avsnitt är relativt omfattande, så är det samtidigt. ex.tremt komprimerad och informationstät. Den är skriven för att förklara och exemplifiera, inte för att vara en undervisningssekvens. Man måste ha i åtanke att det som beskrivs här på några sidor, handlar om undervisning som ska pågå i hundratals lektioner sett över grundskolan som helhet.

Tal

Målen och innehåll inom området Tal listar främst olika talområden (som formellt kallas talringar eller talkroppar) som till exempel heltal, negativa tal, rationella tal; olika symbolsystem (notationssystem) och andra representationer av tal. Dessutom anges vissa särskilda samband eller kunskaper om tal som är mer relaterade till talen i sig än till operationer som addition eller multiplikation. Det är inte helt självklart vad som ska höra till området tal och vad som bör höra till additiva strukturer eller

multiplikativa strukturer. I det positionssystem med basen 10 som dagligen används för att representera positiva heltal betyder t. ex. 37 tre tior och en sjua. Det finns alltså både en additiv komponent (tänkt 30+7) och en multiplikativ komponent (tänk 3·10) inbyggd i själva notationen. Ändå har det mesta som har med notationer och symbolsystem[64] för tal placerats här.

En traditionell beskrivning av heltal och en didaktisk startpunkt för undervisningen är att prata om att tal anger antal (som fem kulor i en burk) och ordning (som att komma på tredjeplats i en tävling). Tals så kallade kardinalegenskaper (antal) och ordinalegenskaper (ordning) är också matematiskt fundamentala. Men i själva verket är inte ordningsegenskapen så fundamental för resten av grundskolans matematik. Vad som däremot är fundamentalt är att veta att alla positiva heltal har en unik efterföljare och alla positiva heltal utom 0 en unik föregångare samt att med hjälp av detta kunna räkna uppåt och nedåt. En absolut bas för aritmetiken och för matematik över lag är därför talramsan, dvs den sekvens av ord som vi använder för att verbalt representera heltalen. Det specificeras eleverna ska kunna talramsan upp till 100, *och från 100 och vidare*, med betoning på den repetitiva formen från 20 och uppåt. Kursiveringen av *från 100 och vidare* anger att undervisningen ska behandla hur man säger tal större än hundra men att det inte prioriterat att alla i en klass kan det när de slutar årskurs 2. Associerat till hur vi verbalt säger talen är också hur vi vanligen skriver dem och redan i årskurs 1 och 2 ska eleverna introduceras för positionssystemet i enkla fall och begreppen ental, tiotal och hundratal men det rekommenderas snarare att elever i olika uppgifter får arbeta med större tal, än att tid ägnas åt formella undervisning om saken. I årskurserna 3–4 kan sedan behandlingen av positionssystemet formaliseras något, genom ett tydligare fokus på tio-gruppering och 10:ans roll, inklusive exempel på tiondelar. Redan från årskurs 1 kan man dock introducera och öva 30... med tiotal, dvs 10, 20 30... *och till exempel 23, 33, 43…* vilket när tallinjen har introducerats (se nedan) kan kopplas till tio-hopp på tallinjen

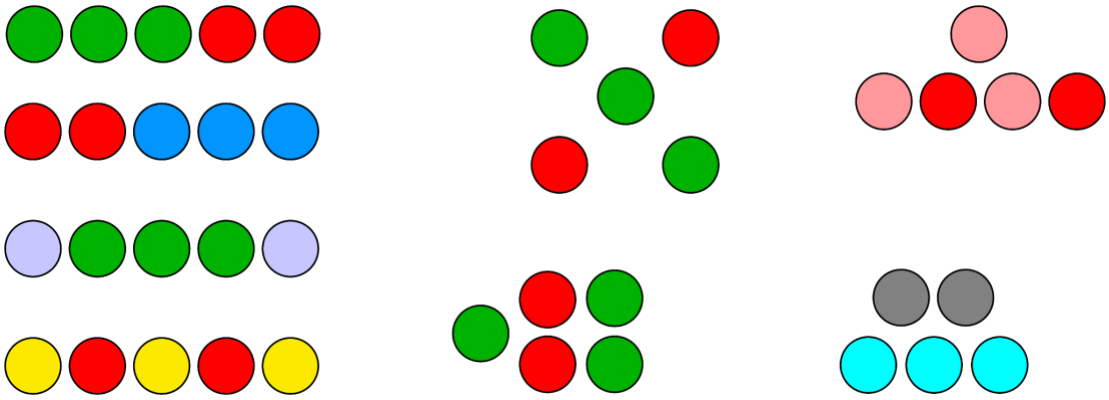
En mycket viktig egenskap hos tal är att de kan delas upp i delar och sättas ihop från delar till helheter, den så kallade helhet-del-delrelationen[65]. Sådana grupperingar av tal ligger till grund för de flesta beräkningsstrategier som eleverna ska lära sig. 5=2+3, men redan innan addition, additionstecknet, likhet och likhetstecknet har

---

[64] En symbol är ett tecken som representerar något men där tecknets form inte avslöjar dess betydelse. Siffror är typiska exempel på symboler. 5 skiljer sig från IIIII som representationer av talet eller antalet fem. Symbolen 5 kan inte i sig manipuleras för att avslöja några egenskaper hos talet, men IIIII kan delas upp som II och III och därmed som i Figur 1 avslöja en möjlig uppdelning av talet fem. Representationer som IIIII kallas ikoniska. Ett symbolsystem består av en begränsad lista symboler som med hjälp av ett regelsystem kan sättas samman och manipuleras för att få olika betydelser. Vårt vanliga positionssystem med bas tio är ett typiskt symbolsystem, men vi kommer även att säga att sättet att skriva bråk och division som a/b är ett symbolsystem.

[65] En viktig aspekt av den grundläggande taluppfattningen är subitisering, dvs att kunna uppfatta små antal upp till 3 eller 4 med ett ögonkast, utan att räkna varje objekt. En associerad förmåga är konceptuell subitisering som handlar om att till exempel kunna se 5 saker som en grupp av 3 och en av 2 och därmed kunna konstatera att det är fem, även här utan att räkna alla. Det finns goda argument för att undervisa subitisering, se till exempel Clements (1999). Valet här är dock att fokusera på helhet-del-delrelationer och talkamrater och (se avsnittet om additiva strukturer) hur dessa explicit kan användas i additioner och subtraktioner. Det är troligen bättre att hjälpa elever med svag antalsuppfattning att hitta generella strategier som fungerar i alla talområden och särskilt strategier som även kan förstås spatialt (dvs på tallinjen) än att lägga tid på att arbeta med små antal.

introducerats kan man genom konkreta och ikoniska modeller[66] arbeta med uppdelning av tal, gärna med särskilt fokus på talkamrater och då speciellt femkamrater och tiokamrater[67]. Genom att prata om uppdelning av tal kan man även få en bra bas för att senare arbete med likhet på formen 5=2+3 eller 2+3=4+1 där likhet används i andra sammanhang än för att indikera en genomförd beräkning (se avsnittet om Algebra).



Figur 1. Mönster med femmor i olika geometriska konfigurationer och olika färger. Dessa mönster är alltså olika med avseende på färg och form, men samtidigt lika i den specifika betydelsen att alla kan benämnas som “två och tre”, två av en färg och tre av en annan färg. Att uppfatta denna likhet och undertrycka andra olikheter ger en försmak om hur matematisk likhet fungerar. Likhet används nämligen typiskt för att beteckna att saker som ser olika ut kan betraktas som lika om någon särskild likhetsegenskap är uppfylld.

I årskurserna 3–4 fortsätter sedan arbetet med talkamrater för talen 1–20, dvs vilka par av tal som summerar till ett visst givet tal samt med hundrakamrater med tiotal (20 och 80) och ental (21 och 79). Även om arbetet med talkamrater initialt kan hanteras utan referens till addition och likhet, och utan användning av dessa symboler, är det lämpligt att relativt tidigt i undervisningen införa dessa symboler. Det är t. ex. redan i årskurs 1 en bra idé att introducera likhet med hjälp av femkamrater, se Figur 30 i avsnittet Algebra. Ett skäl till att helhet-del-delrelationer och talkamratsbegreppet är så viktigt är att det bildar en utvecklingsbar bas för additiva

[66] När konkret nämns i den här meningen betyder det fysiska objekt som kan manipuleras med händerna. Bilder på samma objekt är inte konkret i den här meningen utan kallas en ikonisk representation. Det är inte alltid möjligt att upprätthålla skillnaden mellan det konkreta och ikoniska representationer. En rektangel byggd av multilinkklossar är till exempel konkret. Om man ritar av rektangeln på rutpapper är det en ikonisk representation. Denna är dock samtidigt konkret, eftersom den kan manipuleras direkt med händerna och till exempel klippas i delar och så vidare. Motsvarande rektangel i en lärobok är dock inte längre konkret i den här meningen eftersom man typiskt inte får klippa ut den så att den blir manipulerbar.

[67] Skälet till att femkamrater är särskilt viktiga bland alla talkamrater är att fem ligger inom eller precis utanför vad som kan uppfattas med ett ögonkast, så kallad subitisering. Det är alltså av utvecklingspsykologiska skäl bra att arbeta mycket med femman, så att eleverna kan uppfatta viktiga aspekter av talens struktur i detta överblickbara område. Skälet till att tiokamrater är särskilt viktiga är 10:ans roll i vårt positionssystem

beräkningar. Därför finns beskrivningen av hur man kan arbeta med begreppen under avsnittet Additiva strukturer.

I det som följer kommer det att refereras till två metaforer[68] för tal, en baserad på vår kognition för antal och en baserad på vår spatiala kognition, dvs sådant som har med rum, rörelser, positioner och avstånd att göra. Inom forskningen om dyskalkuli eller matematiksvårigheter finns det mycket som tyder på att en del personer kan ha svagheter i sin grundläggande antalsuppfattning[69]. På samma sätt kan man tänka sig att en del personer har svagheter i sin grundläggande spatiala uppfattning. Genom att parallellt arbeta med både en antalsmetafor för tal och en spatial metafor, dvs tallinjen, kan man ge fler elever chanser att använda sina kognitiva styrkor för att stärka sin grundläggande taluppfattning. Ett ytterligare argument för att tidigt introducera tallinjen är att den bildar en överlägsen bas för att senare introducera bråk på ett sätt som undviker att eleverna formar några de i forskning dokumenterade vanliga missuppfattningar som annars många råkar ut för (se avsnittet om bråk). Tallinjen ger dessutom en bas för att förstå tal som kontinuerliga kvantiteter.

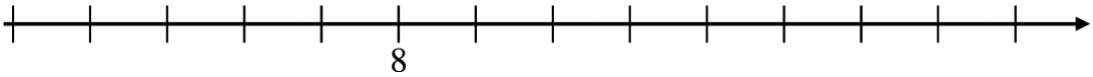
Att utgå från en antalsmetafor i den grundläggande undervisningen om tal är helt okontroversiellt och i linje med hur den mesta undervisningen redan ser ut. Det går dock att göra det bättre eller sämre och i avsnittet om Additiva strukturer beskrivs hur vissa systematiska representera antal kan understödja elevers utveckling av aritmetikkunskaper. Att använda tallinjen i den tidiga aritmetikundervisningen är mer kontroversiellt. Det finns det som menar att tallinjen är en allt för abstrakt konstruktion som kräver mer avancerad kognition än vad sex- eller sjuåringar vanligen besitter. Det finns också de som menar att tallinjen vid addition och subtraktion kan stimulera elever att hålla kvar vid improduktiva räkna upp- och räkna ned-strategier (enstegsräkning) i stället för mer effektiva och utvecklingsbara strategier som bygger på uppdelning av del i helhet-del-delmodeller. När man ska introducera tallinjen behöver det därför göras på ett sätt som på ett direkt sätt anknyter till elevernas upplevelser av världen, dvs till deras grundläggande rumsuppfattning, och stimulera till andra sätt att arbete med tallinjen än att bara röra sig steg för steg. De sätt att introducera tallinjen som brukar rekommenderas bygger i allmänhet på att man med eleverna startar med en tallinje utan tal (siffror). I den variant som kort beskrivs här har denna tallinje streck på sig, men initialt alltså inga siffror eller andra tecken som markerar särskilda tal. När tallinjen introduceras kan man exempelvis arbeta med en tallinje med endast ett tal utsatt och fråga var andra tal ska sättas ut som i Figur 2. Inledningsvis är det viktigt att jobba med att talen är positioner och längder på tallinjen och särskilt med att kunna använda 5 och 10 som referenspunkter att utgå från när man vill hitta andra tal[70].

---

[68] Termen metaforer är i sig inte så central men refererar till så kallad embodied cognition och mer specifikt till begreppet konceptuell metafor. Man skulle kunna säga två ursprung till talbegreppet, två tolkningar av tal, eller två aspekter av tal.

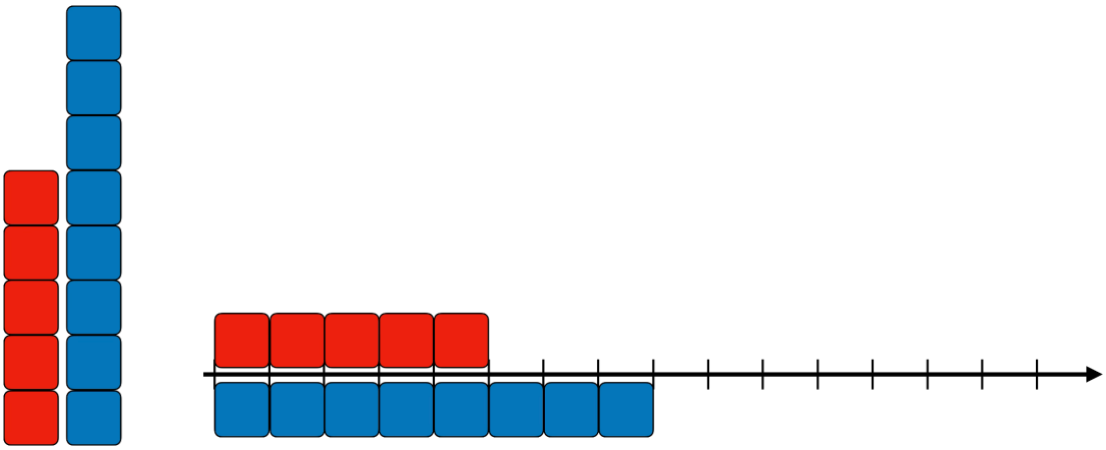
[69] (Hellstrand m.fl., 2024)

[70] Det finns andra dokumenterat funktionella sätt att introducera tallinjen än de som beskrivs här, t. ex. via kvantiteter i enlighet med Davodyv (1990) där utgångspunkten är jämförelser mellan kontinuerliga kvantiteter (längd, area, massa etcetera) eller i enlighet med RME (Realistic mathematics education)



Figur 2. En möjlig uppgift för att introducera tallinjen, gärna med en stor tallinje som man kan gå på eller med en stor tallinje på tavlan: Om 8 är här, var ska vi sätta ut 10? Var ska vi sätta ut 5? Sätt tillsammans ut flera tal. I teorin kan 10 vara var som helst på denna tallinje eftersom endast ett tal 8, är utsatt. Men i praktiken tar elever utan tidigare erfarenhet av tallinjen för givet att ett steg betyder 1.

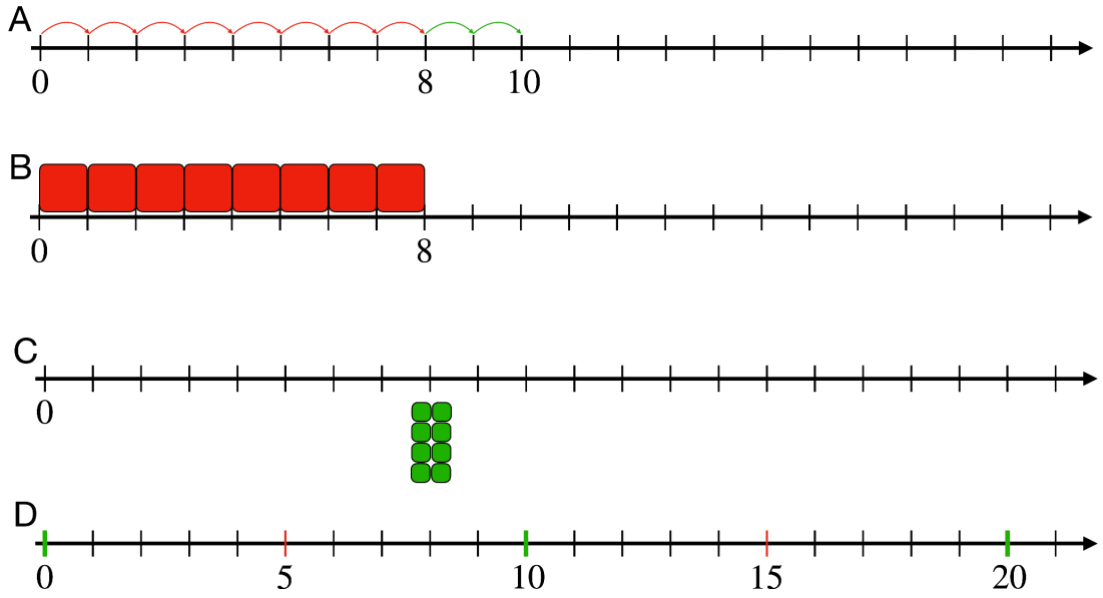
Att talen på tallinjen i första hand är positioner och längder betyder att talet 8 i Figur 2 inte (i första hand) står för antalet 8, som i Figur 4 C, utan snarare är en slags adress för var 8 hör hemma på tallinjen. Kopplingen till antal handlar i stället om att 8 är just 8 steg från positionen 0, de röda markeringarna i Figur 4 A eller att 10 är två steg efter 8, gröna markeringar i Figur 4 A. En konkret tallinje behöver inte innehålla 0, utan kan som i Figur 4 D visa ett annat utsnitt av tallinjen. Denna tallinje har också en markerad 5- och 10-struktur. Det är mycket användbart att lära sig att använda 5 (15, 25 etc.) och 10 (20, 30 etc.) som referenspunkter för att hitta andra tal eftersom det senare är en användbar strategi vid additiva beräkningar. Som en inledning till additiva resonemang är det också viktigt att hantera begreppen fler och färre och kopplingen till mer och mindre samt till talramsan och tallinjen. Klossarna i Figur 3 kan representera en konkret situation där två personer eller andra figurer har olika mycket av något. I denna stapelform är de blå samtidigt fler och mer (i betydelsen längre, eller högre) och omvänt är det röda färre (mindre, lägre, kortare). Om de blå räknas kommer man längre i talramsan än om de röda räknas. Om staplarna ställs bredvid varandra går det att se hur mycket fler eller mer de blå är. På en matchad tallinje motsvarar fler, mer, längre, att komma längre bort från 0 osv.



Figur 3. Fler blå än röda. Den blå stapeln är också mer och längre och når längre på tallinjen.

---

där utgångspunkten är vardagslivskontexter (Freudenthal, 1983). Se även Klein, Beishuizen och Treffers (1998)



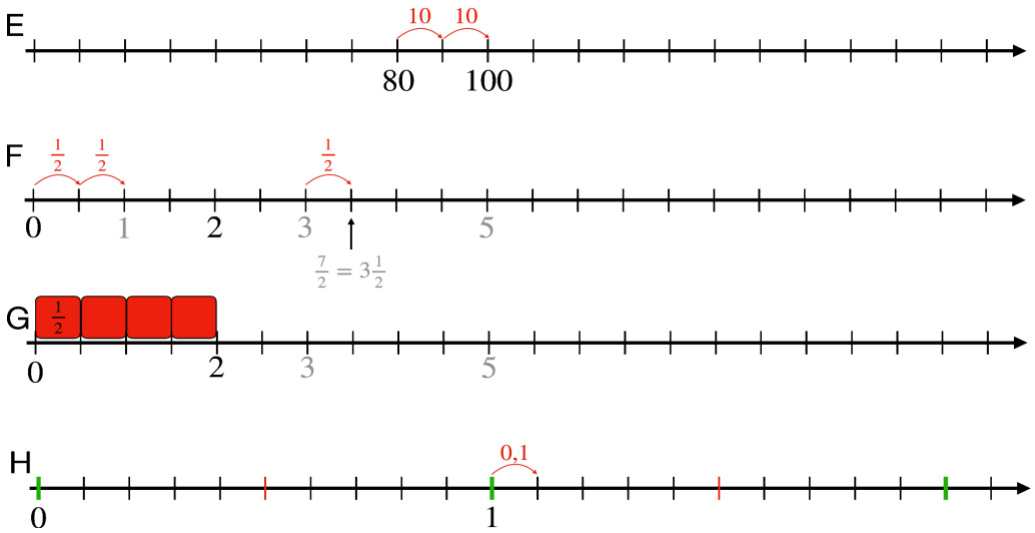
Figur 4. A. Kopplingen mellan antal och tallinjen går via antal steg, eller hopp mellan olika positioner. Positionen för 8 är bestämd som 8 steg från 0. 10 är två steg efter 8. B. Det går, och är användbart, att även koppla antal till tallinjen med objekt, som de röda klossarna här. 8 kan då ses som ett slags mått på antalet 8. C. Att tänka sig att positionen 8 i sig betyder antalet 8, som de 8 gröna klossarna här, är inte en lika utvecklingsbar representation eller tolkning av tallinjens koppling till antal. D visar en tallinje med 5- och 10-strukturen särskilt markerad som kan användas i övningar.

En tallinjeförståelse av detta slag kan sedan enkelt utvidgas till andra talområden med hjälp av en enda princip, nämligen att låta ett hopp eller steg, dvs en förflyttning mellan två närliggande tallinjemarkeringar betyda något annat än 1. Genom att låta varje steg betyda 10 får man t. ex. en tallinje med tiotal. En sådan kan introduceras på liknande sätt som föreslogs ovan, t. ex. genom att sätta ut två tiotal och fråga var andra tiotal ska placeras, gärna tillsammans med att systematiskt öva på talramsan med tiotal, se Figur 5 E.

På motsvarande sätt kan bråk på ett mycket fördelaktigt sätt introduceras via tallinjen. Till tallinje F (eller G) kan man (som tidigare) ställa frågan: Var är 3? Var är 5? Det kan man resonera sig fram till genom att upptäcka att 1 motsvarar 2 steg (eller klossar) och sedan använda det för att hitta 3:an och 5:an och vilket annat heltal man vill. Men på köpet har man även introducerat halvor, för ett steg på denna tallinje är ju just ½ (en halv, man introducerar ordet, som eleverna typiskt redan känner till, och symbolen ½). En bra fortsättning är sedan att fråga vad vi ska kalla talet vid pilen (tre och en halv, 3 ½, eller 7/2 eftersom det är sju steg, dvs 7 halvor, från 0). På samma sätt kan man jobba med tredjedelar eller andra bråk som positioner och avstånd på tallinjen, inklusive bråk större än 1 och bygga upp en mer allmän förståelse för *bråksystemet, med särskilt fokus på nämnare upp till 10, dvs bråk som 18/5, 3/7 och 6/3.* Det går också att använda tallinjen för att, via tiondelar

som bråk, introducera tal i decimalform på tallinjen med huvudsakligt fokus på tiondelar.

Efter att ha konstruerat och analyserat tallinjer för varierade tillämpningar på det här sättet i årskurs 2 och 3 kan man också prata om den allmänna principen för tallinjer: så snart två punkter är bestämda på en tallinje, dvs har specifika tal associerad till sig, är hela tallinjen bestämd. Det beror på att ett visst fysiskt avstånd på en given tallinje alltid motsvaras av ett visst avstånd mätt som ett (dimensionslöst) tal.



Figur 5. E. En tallinje med 80 och 100 utsatt. Avståndet mellan närliggande markeringar måste *vara* 10. F. En tallinje med 0 och 2 utsatt så att det är fyra steg mellan 0 och 2. De gråa och röda talen och pilarna ska inte vara med från början utan konstrueras fram tillsammans med eleverna. Genom att först hitta 1 kan man se att varje steg måste vara ½ (och introducera symbolen om man inte gjort det tidigare). Därefter kan man använda den informationen för att hitta andra heltal och även fråga vad vi ska kalla talet som pilen pekar på. G är en variant med klossar. Med H kan man på motsvarande sätt introducera tiondelar och notationen 0,1; 1,1 osv.

Att förstå att bråk är tal är en i forskning mycket tydligt dokumenterat att en central svårighet när det gäller bråkbegreppet. Det kommer sig av att bråk, dvs bråksymbolen, introduceras som en representation av ikoniska del-helhetsbilder. Det är då naturligt att få uppfattningen att bråk *är* andelar. Det är fel. Bråk är tal som dock enkelt kan användas för att ange andelar (och även kvoter, förhållanden och skalningsfaktorer se avsnittet Multiplikativa strukturer)[71]. Det huvudsakliga skälet till att ha ett explicit mål som handlar om bråk på tallinjen är att det bedöms som bättre att introducera bråk på det här sättet och först senare introducera att bråk kan användas för att ange andelar.

[71] Bråkbegreppets komplexitet och elevers svårigheter att förstå bråk är ett av de mest välundersökta fenomenen i den matematikdidaktiska forskningen (Siegler m.fl., 2011; Soni & Okamoto, 2020; Steffe & Olive, 2010; Tossavainen & Helenius, 2024; Zhang m.fl., 2015).

En ytterligare fördel med detta sätt att jobba är att eleverna i mycket högre utsträckning kan överföra sin additiva heltalsaritmetik på tallinjen till bråkaritmetik (se avsnittet Additiva strukturer).

Allt som har nämnts så här långt är alltså tänkt att introduceras på lågstadiet även om man inte kan räkna med att alla elever lär sig det lika bra. Poängen med att introducera detta tidigt är i stället att de som inte lär sig lika snabbt ska ha lång tid på sig. Allt som har nämns så här långt ska alltså även på mellanstadiet vara en central del av undervisningen, även om det inte står som explicita mål. Exempelvis ska tallinjen användas, även om den inte står nämnd bland målen, t.ex. för att arbeta med bråk och bråksystemet, dvs hur tal på formen *a*/*b* fungerar aritmetiskt. Viktiga aspekter av bråkbegreppet är lika bråk[72], förkortning och förlängning och rollen av 1 på formen a/a vid förkortning och förlängning. Detta nämns här, eftersom det har med själva representationen av bråk att göra. Samtidigt handlar det om strikt multiplikativa aspekter av bråk och därför återkommer vi till det i avsnittet Multiplikativa strukturer, där bråk har en mycket central roll, och där det till exempel beskrivs exakt hur *a/a=1* ska användas för att hantera förkortning och förlängning och för att visa att bråk är lika. Notera att bråksystemet i mål och innehåll för årskurserna 3-4 står i kursiv stil, dvs ska behandlas men inte nödvändigtvis behärskas. På mellanstadiet är det dock tänkt att undervisningen ska fokusera på att eleverna lär sig att behärska bråksystemet.

På mellanstadiet introduceras även procent, dels som procentform av tal genom sambandet med hundradelar, dels likheten %=1/100=0,01 och hur procentformen kan användas i beräkningar. De mål som handlar om procentform för att ange andelar behandlas under Multiplikativa strukturer samt i Proportionella samband under Funktioner och samband, tillsammans med hur bråkformen kan användas för att ange andelar (och förhållanden, skalfaktorer mm). Det är en uttalad avsikt att både bråk och procent ska ges en tätare koppling till multiplikativa relationer i allmänhet.

På mellanstadiet ska också positionssystemet behandlas mer ingående, inklusive med decimaler. Det betyder att eleverna i praktiken ska kunna hantera hur stora och hur små tal som helst. En ny term i den här kursplanen är positionssystemets translativa egenskaper. Detta betecknar att 30 är 3 tiotal, 30 ental och 0,3 hundratal. Det är alltså inte bara viktigt att veta vad varje position i ett tal angivet med positionssystemet är värt utan eleverna ska även flexibelt kunna “växla” mellan talsorter. Detta är särskilt viktigt för decimaler, eftersom det är ett praktiskt sätt att förklara varför 0,12 är mindre än 0,5. 1 och 2 och 0,12 står nämligen inte bara för 1 tiondel och 2 hundradelar utan också för 12 hundradelar. Och 5 och 0,5 står inte bara för 5 tiondelar utan också för 50 hundradelar. Ett ytterligare skäl att ha med dessa translationsegenskaper har är att det har bedömts vara en viktig förutsättning för att bättre förstå och kunna utföra enhetsomvandlingar. Att veta att 300 också är 0,3

[72] Ibland kallas bråk som är lika för ekvivalenta bråk. Med den syn på likhet som denna kursplan bygger på är det dock mycket bättre att säga att bråken är lika. Likhet används generellt för att säga att två saker som inte ser lika ut ska vara matematiskt lika. Likheten 1/2=2/4 och alla andra fall av lika bråk är perfekta exempel. Som symboler är ju inte 1/2 och 2/4 lika och det är ju inte exakt samma sak att dela ett äpple i två delar och ta en som att dela det i fyra delar och ta två. 1/2 och 2/4 är dock helt oavsett detta matematiskt lika och vi skriver därför 1/2=2/4.

tusen gör att man utan att utföra några multiplikationer eller divisioner direkt kan se att 300 gram är 0,3 tusen gram dvs 0,3 kg eftersom ett kg är tusen gram. En inledning till detta tankesätt finns redan i årskurs 1-2 via formuleringen att 10 är 1 tiotal och 10 ental. Att 100 är 1 hundratal, 10 tiotal och 100 ental och i årskurs 3-4 att t.ex *1 är 0,1 tior och 10 tiondelar.*

På mellanstadiet ska även negativa tal introduceras, inklusive på tallinjen. Tallinjeintroduktionen är relativt oproblematisk, men leder inte på ett oproblematiskt sätt till att elever kan hantera negativa tal aritmetiskt[73]. Det som händer när de negativa talen introduceras är nämligen inte bara att tallinjen får en utsträckning åt det negativa hållet, befolkad av de negativa talen, utan även att minustecknet får två nya betydelser, nämligen för att ange det negativa talet, som i -3, och för att ange de negerade talet som i -a. De negativa talens aritmetik behandlas vidare under områdena Additiva och Multiplikativa strukturer.

Upplägget i den här kursplanen betyder alltså att eleverna på det stora hela ha blivit introducerade till alla representationer av tal och till multiplikativ och additiv aritmetik med dessa representationer och på alla talmängder som grundskolan behandlar redan före mellanstadiets slut. Det betyder att högstadiets matematik kan ägnas åt att använda denna kunskap och naturligtvis även påminna om den. Två representationer (som också kan ses som symbolsystem) återstår dock, som var och en också hör till två närbesläktade multiplikativa begrepp. Där första är potenser, dvs uttryck på formen a^b och detta symbolsystems aritmetik. I a^b kan a kan vara ett tal på vilken form som helst eller en variabel eller bokstav och b till en början är ett positivt heltal, men senare kan vara ett negativt tal, ett bråk eller ett tal på decimalform. Det andra är begreppet roten ur och operationens aritmetik. Det finns också en *koppling mellan bråk som exponenter och n:te rötter, dvs generaliseringar av* $\sqrt{(a)} = a^{1/2.}$ som undervisningen ska behandla med som eleverna i grundskolan inte behöver behärska. Ett skäl att införa detta mål är att hela grundskolans målsystem nu både ger en mycket mer systematisk behandling av bråk och av multiplikativa fenomen i allmänhet. Därför ligger de den finess det innebär att kunna använda bråk som exponenter i uttryck i potensform inom nära räckhåll. Eftersom både potensnotationen och rotnotationen kan ses som sätt att representera tal, dvs symbolsystem för tal, står de nämnda under rubriken tal, men eftersom de båda är tätt kopplade till multiplikativ aritmetik, beskriver vi vad målen betyder och hur de kan behandlas i undervisningen under avsnittet Multiplikativa strukturer.

Mål och innehåll för området tal i en ordnad lista:

1–2:

- Talramsan upp till 100, *och från 100 och vidare*, med betoning på den repetitiva formen från 20 och uppåt.
- Räkna uppåt och nedåt, tals efterföljare och föregångare.
- Tio-hopp och talramsan med tiotal, dvs 10, 20, 30... *och till exempel 23, 33, 43*, ...

[73] Se Kilhamn (2011).

- Positionssystemet i enkla fall och begreppen ental, tiotal och hundratal. Att 10 är 1 tiotal och 10 ental. Att 100 är 1 hundratal, 10 tiotal och 100 ental.
- Tal för att ange antal och ordning
- Tal som antal och helhet-del-delrelationer inklusive med ikoniska representationer
- Talkamrater med särskilt fokus på femkamrater och tiokamrater.
- Tal som position och längder på tallinjen med särskilt fokus på 5 och 10 som referenspunkter,
- Fler och färre och kopplingen till mer och mindre samt till talramsan och tallinjen

3–4:

- Talkamrater för talen 1–20, dvs vilka par av tal som summerar till ett visst givet tal.
- Hundrakamrater med tiotal (20 och 80) och ental (21 och 79).
- Positionssystemet, inklusive exempel på tiondelar. Att 100 är 1 hundratal, 10 tiotal och 100 ental. *Att 1 är 0,1 tior och 10 tiondelar.*
- Bråksystemet, med särskilt fokus på nämnare upp till 10, dvs bråk som 18/5, 3/7 och 6/3.
- Bråk som positioner och avstånd på tallinjen, inklusive bråk större än 1.
- Tal i decimalform på tallinjen med huvudsakligt fokus på tiondelar.
- Konstruktion och analys av tallinjer för varierade tillämpningar.

5–7:

- Positionssystemet, inklusive med decimaler
- Positionssystemets translativa egenskaper, som att 30 är 3 tiotal, 30 ental och 0,3 hundratal
- Bråksystemet, lika bråk, förkortning och förlängning och rollen av 1 på formen a/a vid förkortning och förlängning
- Procentform och sambandet med hundradelar samt likheten %=1/100=0,01 och hur den kan användas i beräkningar.
- Negativa tal, inklusive på tallinjen

8–10:

- Potenser, exponenter, inklusive negativa, och symbolsystemets aritmetik
- Begreppet och beteckningen roten ur och operationens aritmetik.
- Grundpotensform, inklusive med negativa exponenter
- *Kopplingen mellan bråk som exponenter och n:te rötter, dvs generaliseringar av* $\sqrt{(a)} = a^{1/2}$.

Additiva strukturer

Additiva strukturer[74] handlar om allt som har med addition och subtraktion att göra. Skälet till att man inte bara skriver addition och subtraktion är att själva operationerna

[74] Termen additiva strukturer kommer från Vergnaud (1979, 2009, 2020). Additiva strukturer är ett. exempel på ett begreppsfält (conceptual field). Om man tänker på matematiken som ett stort vägnät

bara är en del av den begreppsliga struktur som man vill att eleverna ska skapa. Additiva strukturer är ett av de mer kompakta områdena inom matematiken, i betydelsen att det är relativt enkelt att beskriva vad som är viktigt att kunna. Trots att området additiva strukturer är förhållandevis okomplicerat både matematiskt och kognitivt ges detta område den mest detaljerade beskrivningen i av alla områden som detta dokument berör. Det beror på att det går att utnyttja den relativa inkomplexiteten i det additiva området till att systematiskt införa många viktiga representationer och ett matematiskt förhållningssätt som går ut på att enkla principer etablerade i heltalsområdet upp till 5 eller 20 kan generaliseras till mycket större tal och till andra talområden. Men kan säga att det inte är särskilt viktigt att kunna räkna ut 977+84 i huvudet, men det är viktigt att veta att det går att använda samma princip för att göra det som när man räknar ut 8+6. I avsnittet beskrivs många olika ikoniska representationer (för helhet-del-del) och schematiska[75] sätt att hantera symboliska additionsuttryck. Det är inte nödvändigtvis så att användning av exakt dessa representationer och sätt att resonera leder till att eleverna snabbare än annars kan utföra beräkningar. Representationerna och sätten att resonera med dem är snarare valda för att på ett effektivt och sammanhängande sätt kunna skapa en bas för att eleverna långsiktigt ska kunna hantera aritmetiska och algebraiska frågor.

I avsnittet om tal har redan två huvudsakliga sätt att förstå tal beskrivits, tal som antal som också inkluderar en förståelse för att tal delas upp i delar och sättas ihop (helhet-del-del) samt tal som positioner, förflyttningar och längder på tallinjen, dvs en spatialt grundad tolkning. Båda dessa sätt att förstå tal är mycket enkla att utvidga så att additiva fenomen kan hanteras och så att man kan bygga upp långsiktigt hållbara sätt att hantera additiva operationer, dvs addition och subtraktion[76]. Det finns en viss poäng i att låta lite av den inledande aritmetikundervisningen i åk 1 och kanske lite av undervisningen i åk 2 handla om tal utan att man samtidigt behandlar addition och subtraktion, men ganska snart blir det helt enkelt enklare undervisa för en alltmer förfinad och praktiskt användbar taluppfattning genom att samtidigt hantera själva talbegreppet och additiva fenomen (och likhetsbegreppet, se avsnittet Algebra).

Mål och innehåll för den additiva aritmetiken under de första två skolåren har formulerats med en mycket tydlig bas i helhet-del-delbegreppet och med kompletterande stöd i tallinjen. De exempel på hur detta kan behandlas i undervisningen som kommer ges här bygger i hög grad på strukturerade ikoniska antalsmodeller som på ett konkret plan kan byggas av klossar, t.ex. av typen multilink. Det kan säkert finnas andra system av representationer att bygga den inledande aritmetikundervisningen på, så de exempel som används i den här texten

---

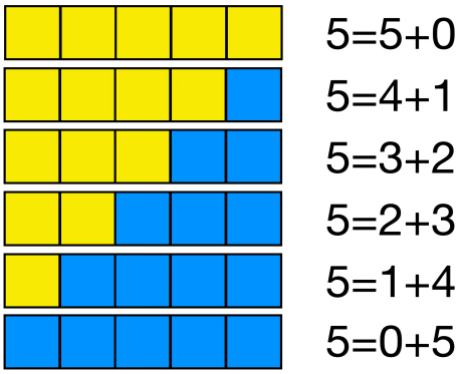
där alla begrepp, metoder, representationer mm hänger ihop med varandra, så kan man tänka på ett begreppsfält som en stad, där alla begrepp hänger extra tätt ihop via många alternativa vägar.

[75] Konkreta, ikoniska och symboliska representationer har tydliga teoretiska definitioner (Ahl & Helenius, 2021; Helenius & Ahl, accepted). Termen schematisk representation kommer att användas lite luddigare, men innefattar ofta olika pilsystem, tabeller eller annan geometrisk och grafisk information som ändå inte är ikonisk med avseende på det som representeras.

[76] Den helhet-del-delbaserade utgångspunkten som ligger till grund för denna kursplans behandling av tal och additiva strukturer har gott stöd i forskning och är en del av vad som ibland kallas en strukturell ansats i för aritmetiken (Cheng, 2012; Ekdahl m.fl., 2025; Resnick, 1984) men det finns många olika sätt att representera beräkningarna.

ska inte ses som tvingande, utan just som ett sammanhållet. exempel på hur en progression i den additiva aritmetiken *kan* byggas.

Efter att ha arbetat med vissa mönster (se avsnittet algebra) och vissa aspekter av antal och likhet utan likhetstecknet och additionstecknet kan det vara lämpligt att formellt införa likhet principer för hur man kan visa likhet med hjälp av talkamrater och klassar, som i Figur 30 i avsnittet algebra. När likhetsbegreppet väl är infört kan man arbeta vidare med femkamrater genom att eleverna med klossar i två färger får bygga olika femmor. Så småningom kan man även arbeta med sammanställningar av dessa, som i Figur 6 och efterhand under de två första åren även arbeta på liknande sätt med tiokamrater, tjugo-kamrater och talkamrater generellt, i enlighet med målen under avsnittet Tal.



Figur 6. De sex femkamraterna med klossar i två färger och motsvarande symboliska additionsuttryck. Notera att det är bättre att skriva 5=1+4 än 1+4=5 för att indikera att vi snarare arbetar med att dela upp 5 än att beräkna en summa. I den här bilden är hänsyn inte tagen till additionens kommutativitet, dvs både 1+4 och 4+1 finns med. En fördel med att initialt göra så är att man då, som här, kan bygga uppdelningen av 5 till detta trappstegsmönster. Genom att göra det även i några andra fall kan man inse att alla tal har ett förutsägbart antal additiva uppdelningar. Med hänsyn taget till kommutativitet finns det *(N+1)/2* uppdelningar av N om N är udda och *N/2+1* uppdelningar om N är jämnt. Eleverna behöver själva arbeta mycket med 5-kamrater innan denna bild sammanställs och även om bilden för oss är slående, så kan det ta lång tid innan elever uppfattar poängen, så detta är något man i undervisningen behöver återvända till då och då.

De konkreta (faktiska klossar) eller ikoniska (bilder av klossar) staplarna som exemplifieras i Figur 6 är exempel på en helhet-del-delrepresentationer där hela stapeln är helheten och de två färgerna delarna. Det finns skäl att även introducera en tredelad modell för att vissa additiva relationer ska vara enklare att visa. För att introducera en sådan modell kan det vara bra att gå via begreppen fler och färre (se avsnittet Tal, Figur 3). Fler och färre kopplar naturligt till skillnad och (additiv) jämförelse mellan antal som är en av de fyra additiva situationerna[77] som de första

[77] Begreppet situation, eller egentligen klass av situationer kommer från Vergnaud (2009). Situation är egentligen en kognitiv kategori, dvs något som individer uppfattar mentalt. För att göra situation till ett didaktiskt begrepp måste man dock analysera dem som om de existerar oberoende av individer. I själva verket behöver man som lärare inte veta något om den teoretiska basen för begreppet situation. Det räcker att förstå att problemsituationer som man kan hamna i som människa i världen ofta kan

årens aritmetikundervisning ska hantera (denna kvadrupel behandlas i sin helhet lite längre ned i denna text.

Genom att använda en konkret situation som:

Jag har 8 bullar och du har fem bullar

och ställa frågor som:

Hur många fler har jag?

Hur många färre har du?

Vad är skillnaden?

kan man arbeta med hur man kan se skillnaden. I bilden till vänster i Figur 7 finns ingen konkret representation av det antal som utgör skillnaden (förutom möjligen frågetecknet, som så fall kan ses som en symbolisk representation, och kan fungera som en obekant), men i bilden till höger har den sökta skillnaden fått en konkret representation i form av antal (gula) klossar.

Figur 7. Till vänster 8 blå över 5 röda och skillnaden representerad med symbolen ?. Till höger samma figur med skillnaden representerad som gula klossar.

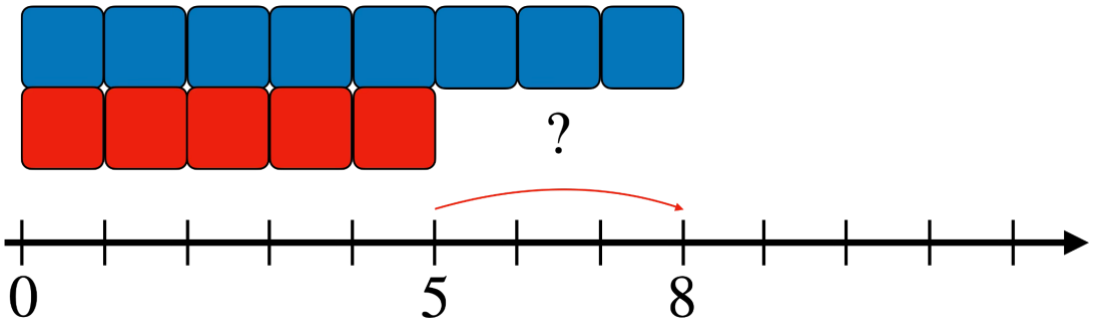
Vi kommer här att använda termen *stapelmodellen*[78] för bilden till höger i Figur 7 eller samma sak byggd av konkreta klossar. Stapelmodellen är ett exempel på en ikonisk helhet-del-delmodell. Skillnad-situationen med bullarna eller vilken som helst motsvarande situation kan också representeras på tallinjen. På tallinjen uppkommer inte behovet av att konkretisera skillnaden med egna klossar på samma sätt eftersom den redan representeras av en konkret förflyttning. Det man ska vara medveten om när tallinjen används så här är dock att vi ju har beskrivit 5 som en position på tallinjen som får sitt läge unikt bestämt genom att vara 5 steg (förflyttningar) från 0. Vi ville ju inte att 5 ska uppfattas som i tallinjen C Figur 4. Om man använder tallinjen för att representera en skillnadssituation av antalstyp (antal bullar) är det därför säkrast att samtidigt arbeta med ett mellansteg i form av klossar,

---

delas in i klasser. Det är till exempel lätt att tänka sig klassen l*ikadelningssituationer* (man har några saker som ska delas lika mellan några personer, och alla varianter av detta) eller klassen *lägga-ihop-situationer* (du har några objekt och några andra objekt och ska betrakta helheten, och alla varianter av detta). Poängen med detta är att man kan använda begreppet klasser av situationer för att kategorisera situationer som kan hanteras med en viss matematisk operation, eller en viss matematisk teknik.

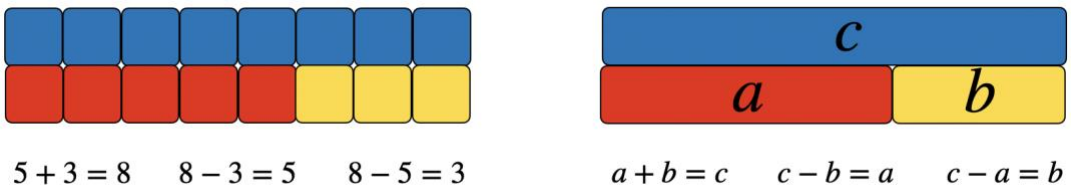
[78] Ibland kallas detta för blockmodellen. Blockmodellen brukar ibland utvidgas till att även hantera multiplikativa relationer, vilket inte görs i denna text. På engelska används oftast termen bar model.

som i Figur 8. Om man arbetar med en situation av typen *Jag åkt 8 kilometer och du 5 kilometer, vad är skillnaden?* uppkommer inte detta översättningsproblem, eftersom situationen i sig liksom tallinjen är av spatial typ. I förlängningen vill man dock att elever flexibelt ska kunna gå mellan att använda den spatialt baserade tallinjen och att använda den antalsbaserade stapelmodellen.



Figur 8. Överst 8 blå och 5 röda klossar som två matchade staplar. Under en tallinje där varje steg matchar en kloss. Skillnaden representeras i båda fallen av symbolen ? (frågetecken) som på tallinjen direkt kan uppfattas som en förflyttning från 8 till 5 (eller omvänt) eller som (det dimensionslösa) avståndet mellan 8 och 5.

I diskussionen så här långt har vi använt stapelmodellen för att representera skillnad. Som aritmetiskt uttryck kan skillnaden representeras som 8-5=_. En stor fördel med stapelmodellen är dock att den kan representera både sambandet mellan addition och subtraktion och operationernas samband med helhet-del-delrelationer. Det fungerar så att den blå helheten å ena sidan är summan av den röda och den gula, Den gula är skillnaden mellan den röda och den blå och den blå är skillnaden mellan den röda och den gula. I det konkreta exemplet har vi alltså att 8=5+3, 8-5=3 och 8-3=5. De tre likheterna bildar tillsammans en additiv talfamilj. Detta resonemang hänger dock inte på de tre specifika talen 3, 5 och 8. Genom att betrakta en generell version av stapelmodellen kan vi se att så snart vi för vilka tal som helst har ett giltigt additionsuttryck *a+b=c*, så har vi de två subtraktionsuttrycken *c-b=a* och *c-a=b*. Och om vi har ett subtraktionsuttryck *c-a=b* så har vi automatisk även ett additionsuttryck *c=a+b* och ett annat subtraktionuttryck *c-b=a*.



Figur 9. Stapelmodellen som representation av helhet-del-del och additiva talfamiljer i ett konkret fall och i generell mening. Även om man inte arbetar med den generella versionen med eleverna i lågstadiet är den en bra illustration av den algebraiska karaktären av sambandet mellan addition och subtraktion.

I årskurs 3 och 4 ska principerna om additiva talfamiljer utvidgas till sambandet mellan additiva beräkningsuttryck (5+3=_, 8–3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8). Termen beräkningsuttryck används här för en typisk beräkning, där det som står efter likhetstecknet uppfattas som svaret. Men i detta dokument symboliseras detta svar alltid med symbolen _ (understreck). Detta är en slags förberedelse för att senare lära sig att använda variabler och obekanta ekvationer och uttryck[79]. Sambandet mellan addition och subtraktion breddas här genom att allt som kan ses som en subtraktion, som t.ex. skillnaden mellan 8 och 5, 8–5=_ också kan ses som en öppen additionsutsaga 5+_=8. Att flexibelt kunna gå mellan sådana olika sätt att uppfatta samma additiva frågeställning är bra både när man arbetar hur vissa uttryck enklast kan beräknas och när man arbetar med hur vissa situationer enklast kan beskrivas som additiva uttryck.

Det sambandet mellan addition och subtraktion som har illustreras här, inklusive resonemangen om öppna additionsutsagor, fungerar tillsammans med det sätt som tidigare har beskrivits för hur bråk kan hanteras på tallinjen lika bra för tal i bråkform, se Figur 83 för fallet sjättedelar. Notera även om summan av en addition överstiger 1, så fungerar exakt samma representationer. Detta gäller inte om man använder klassiska del-helhetsrepresentationer[80] för bråk som t. ex. andelar av cirkeln.

Så här lång har vi nästan helt hanterat addition och subtraktion på ett strukturellt sätt (förutom kopplingen till skillnads-situationen), men en lika viktig del av det additiva fältet är systematiskt koppla den aritmetiska hanteringen av addition och subtraktion till additiva situationer. För att både hos eleverna och sig själv göra det additiva begreppsfältet överskådligt är det bra att identifiera de fyra klasserna av additiva situationerna: lägga till, lägga ihop, ta bort och skillnad. Två av dessa kallas ibland dynamiska, för att de handlar om situationer där något händer.

- Lägga till: du har 5 kulor och vinner 3 till, hur många har du nu? 5+3=_
- Ta bort: du har 8 kulor och förlorar 3, hur många har du nu? 8–3=_

De två andra kallas ibland statiska för att de representerar situationer där inget händer utan där den additiva relationen som eftersöks handlar om hur man vill betrakta relationen mellan två existerande mängder.

- Lägga ihop: du har 5 röda och 3 gula kulor, hur många har du tillsammans? 5+3=_
- Skillnad/jämförelse: Jag har 8 kulor och du har 5, hur många fler har jag? 8-5=_

Alla dessa situationer kan också formuleras så i stället hamnar nära en öppen utsaga. Man formulerar motsvarande situationer som ovan men låter “svaret” vara givet och en av de andra mängderna vara ett saknat värde. Betrakta:

[79] Diskussionen om detta återupptas i avsnittet Funktioner och samband.

[80] Genom hela detta dokument används termen helhet-del-del för representationer som illustrerar additiva uppdelningar av tal och termen del-helhet för multipliktiva relationer.

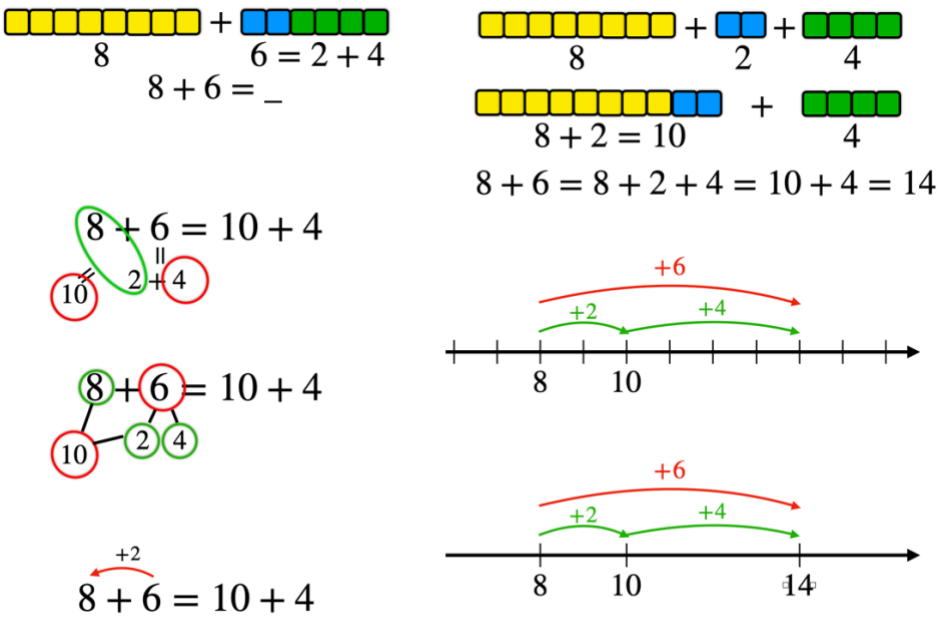
- Lägga till, saknat värde: du har 5 kulor och vinner några så att jag sen har 8, hur många vann jag? 5+_=8; 8-5=_
- Ta bort, saknat värde: du har 8 kulor och förlorar några, så att du sedan har 5, hur förlorade du? 8-_=5; 8-5=_

- Lägga ihop, saknat värde: du har 5 röda och några gula kulor, tillsammans har du 8, hur många gula har du? 5+_=8; 8-5=_
- Skillnad/jämförelse, saknat värde: Jag har 8 kulor och du har några kulor. Jag har 3 fler än du, hur många har du? 8-_=3; 8-3=_

Notera att det alltid är ett aritmetiskt uttryck av typen öppen utsaga som på det mest direkta sättet kan modellera dessa situationer, men att det alltid också går att modellera problemen som ett beräkningsuttryck. Det finns alltså ett samband mellan additiva beräkningsuttryck (3+5=_, 8-3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8) som man kan se redan direkt i situationerna av saknat-värde-typ, och alltså inte bara som tidigare beskrivits i de ikoniska stapelmodellerna eller på tallinjen.

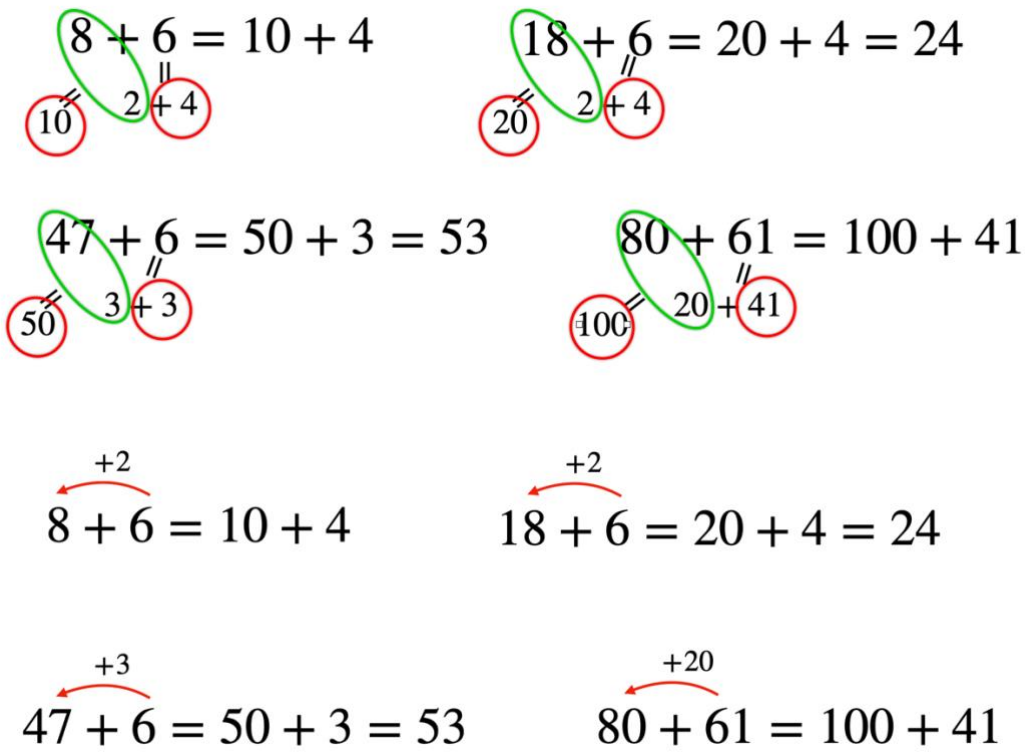
Alla situationerna i de åtta punkterna ovan kan på ett relativt uppenbart sätt representeras som en stapelmodell (eventuellt med ? i stället för tom rad för det tal som efterfrågas) eller på tallinjen. Denna lista kan naturligtvis inte undervisas som den är och för många elever kommer det att ta lång tid att upparbeta den flexibilitet som behövs. Det är därför det finns mål associerade till det här både i årskurserna 1–2 och 3–4.

Så här långt har vi alltså hanterat mål som ger mening åt operationerna addition och subtraktion och använt ikoniska representationer (stapelmodellen) och tallinjen för 3–4 hur operationerna strukturellt hänger ihop, och kompletterat detta med motsvarande representationer i symbolsystemet. Nästa steg handlar om beräkningskompetens. Den centrala nyckeln till detta, så som denna kursplan är skriven, handlar om att använda talkamrater, (additiva) uppdelningar av tal och helhet-del-del. Dessa termer är i den här tillämpningen olika namn på samma fenomen, vilket manifesteras i målet: hur talkamrater, uppdelning av tal och helhet-del-delrelationer kan användas vid beräkningar, med skriftliga metoder och i huvudet. Principerna varför uppdelning, talkamrater och del-del-hehetsrelationer är användbara i additions- och subtraktionsberäkningar kan illustreras redan med beräkning av 8+6. Om man inte har just den kombinationen memorerad, så kan man alltid för uppgifter av detta slag genom att först ta fram tiokamraten till 8, sedan dela upp 6 i det talet + resten. På ett schematiskt plan kan man säga att det handlar om att *bygga om* (jämför avsnittet om likhet under Algebra) 8+6 till 10+?, där frågan är vad ? ska vara. Skälet till att 10+? är enklare är att positionssystemet hjälper oss, för med en lite okonventionell notation är 1? svaret.



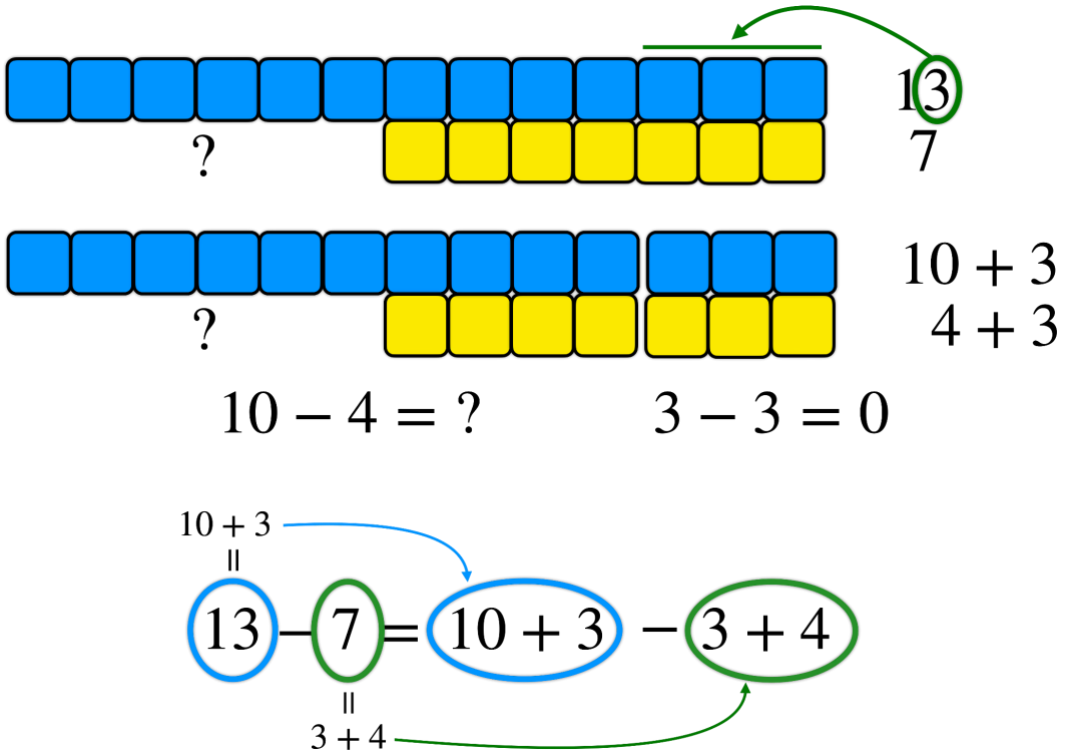
Figur 10. Det finns en stor mängd olika ikoniska, schematiska och symboliska representationer som kan användas för att illustrera additionen hur 8+6 är lika med additionen 10+4. Överst ikoniska versioner som bygger på uppdelning av tal, kombinerat med motsvarande symboluttryck. Till vänster, symboluttryck kombinerat med en schematisk helhet-del-del-representation, i mitten med så kallade triader. Nederst till vänster en så kallad omgruppering (se Figur 30). Nederst till höger tallinjerepresentationer. Den undre är en tom tallinje utan streck som bara indikerar att 6 delas upp och inte stimulerar till enstagsräkning. Oavsett hur saken representeras är principen att först söka 8:ans tiokamrat (2), därefter söka 6-kamraten till 2 (4). Det är inte uppenbart vilken eller vilka representationer som är bäst. Det är dock bra att jobba med principen för hur 10 används som ett slags referenstal, i ett relativt lågt talområde, som just additionen 8+6 representerar och koppla detta till konkreta och ikoniska representationer. Efterhand behöver dock eleverna kunna hantera denna princip symboliskt. Obs: principen i sig har inget med talen 8, 6 och 14 att göra utan handlar om att dela upp en av addenderna så att ett lämpligt referenstal kan användas. Sådana lämpliga referenstal är typiskt 10-tal, 100-tal. Se Figur 11.

Det principiella sätt att hantera addition som har beskrivits här går att generalisera till andra talområden. Liksom när likhet introduceras (se Figur 30 och Figur 31) är det bra att direkt låta klassen som helhet arbete med en stor variation i svårighetsgrad. En del elever kan behöva arbeta med klossar eller ikoniska modeller längre för att uppfatta principerna medan andra enkelt kan generalisera principerna vidare. Genom att skapa denna stora variation inom klassen kan lärare sedan ha en rik diskussion där generaliseringarna kan diskuteras med utgångspunkt i olika elevers arbete.



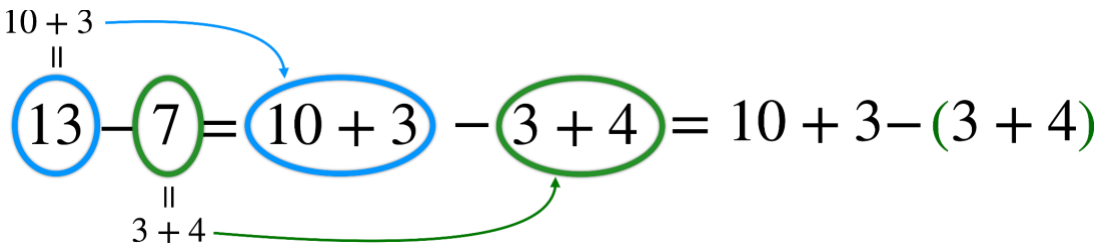
Figur 11. Additionuppgifter i olika talområden där samma princip används med olika referenstal, 10, 20, 50 och 100. I de fyra översta representationerna illustreras de två uppdelningarna som används explicit. I de fyra nedersta används samma pilnotation används för att hantera likheter i allmänhet, se Figur 30. Observera att de notationer man väljer att använda i undervisningen måste förankras noga med eleverna under lång tid. Här visar vi några olika varianter som illustration. Det går också att använda den schematiska triadnotationen.

Motsvarande tekniker och notationer kan användas även för subtraktion, men för att illustrera ikoniskt eller konkret av hur uppdelningar används i subtraktionsfallet behövs troligen en stapelmodell eller något motsvarande. Figur 12 beskriver översiktligt hur detta kan göras.



Figur 12. Subtraktion med 10 som referensvärde med stapelmodell (överst) och som symboliskt uttryck (underst). 7 delas upp i 3 + något (4) för att man identifierar 3:an i 13. När elever skriver det symboliska uttrycket skriver de oftast direkt 10-3-3-4, dvs de vet att eftersom det var hela 7:an som skulle subtraheras är det hela 3+4 som ska subtraheras dvs både 3 och 4 ska subtraheras. Denna situation kan vara ett tillfälle att introduceras parentesnotationen, eftersom man då kan göra det i en situation som eleverna själva har mental kontroll över. Se Figur 13. *Observera alltså att den gröna ellipsen här har samma betydelse som en parentes. Det finns även flera associerade strategier att hantera subtraktioner. För 42-17 kan det istället vara enklare att lägga till 3 till både subtrahenden och minuenden.*

En viktig detalj att observera är att det finns en notationsmässig komplexitet i att dela upp 7:an i 3+4 som i Figur 12. Det är ju nämligen hela 7:an som ska subtraheras, dvs både 3:an och 4:an. Det betyder att den gröna ellipsen är en väsentlig del av notationen för att indikera detta. När eleverna är bekväma med det här sättet att tänka kan man faktiskt använda exempel som det i Figur 12 för att införa parentesnotationen, se Figur 13.



Figur 13. Inringningen av 3+4, betyder att det är *hela* 3+4 som ska subtraheras, vilket betyder att *både* 3 och 4 ska subtraheras. Parentesen är ett sätt att indikera samma sak. Men kan tänka på parentesen som en inringning där taket och golvet har tagits bort för att notationen ska kunna få plats på en rad.

På det här sättet kan man alltså redan i årskurs 3 och 4 förbereda eleverna för parentesnotationen och vissa sätt att resonera om den som de behöver för att förstå varför till exempel -(5–7) i ett uttryck kan ses som en subtraktion av talet 5–7 eller som den additiva inversen till talet 5–7.

De notationer och representationer som har beskrivits här fungerar, om man har introducerat bråk som det föreslås i avsnittet tal, även utföra additioner och subtraktioner med bråk med samma nämnare, även om det oftast är enklast att hantera dem direkt på tallinjen. Detta utvidgas sedan på mellanstadiet till att kunna utföra additioner och subtraktioner med bråk även med olika nämnare. Som bekant är ju principen för detta att göra om de inblandade bråken så att de har gemensam nämnare. Eftersom tekniken för detta är strikt multiplikativ återkommer vi till den i avsnittet om Multiplikativa strukturer. Observera dock att en ny princip i denna kursplan är att arbeta med bråk multiplikativt innan man arbetar additivt med bråk med olika nämnare. Det beror på att det inte är förrän det går att ge en multiplikativ beskrivning av när bråk är lika, som inte är beroende av ikoniska bilder, som det går att de en riktigt bra förklaring till principen bakom förkortning och förlängning (se avsnittet Multiplikativa strukturer).

Så här långt har allt som beskrivits haft en tydlig inriktning mot en strukturell förståelse för aritmetiken i allmänhet och hur notationssystemet fungerar, inklusive att systematiskt använda likheter. Dessa sätt att *utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med positiva heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal kan också utvidgas till att i högre utsträckning bli metoder som utnyttjar positionssystemet, till exempel formella additions- och subtraktionsalgoritmer.* Detta innehåll står i kursiv stil för att man i undervisningen på lågstadiet, kanske framför allt i åk 4 ska introducera eleverna till detta, men att eleverna inte förrän på mellanstadiet behöver kunna utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal och metoder som utnyttjar positionssystemet, till exempel formella additions- och subtraktionsalgoritmer.

Undervisning om addition och subtraktion behöver ta sin utgångspunkt i klasser av additiva situationer som kan användas till att ge mening till operationerna. Därefter behöver eleverna dock också tillägna sig tekniker för att inom matematiken hantera addition och subtraktion genom att använda lämpliga matematiska representationer. Efter detta kan man återvända till additiva situationer och lösa mer avancerade problem genom att översätta dem till matematikens värld och hantera dem där. Det är alltså två *olika* saker att använda konkreta situationer för att skapa mening åt de matematiska operationerna addition och subtraktion, och att använda sin matematiska kunskap om operationerna för att lösa konkreta additiva problem. Dessa två olika relationer mellan matematiken och den konkreta verkligheten behöver den som undervisar hålla isär. Målet att kunna sätta samman tolkning av en additiv situation (i ett steg) med representation som en ikonisk modell och som aritmetiskt uttryck och kunna beräkna uttrycket handlar alltså om att etablera ett sätt att hantera uppgifter (som någon av de fyra additiva situationerna eller de öppna varianterna) där man inte direkt försöker att se svaret i uppgiften utan i stället

representerar frågeställningen med en bild (ikoniskt) och med ett matematiskt uttryck (symboliskt). Detta är en mycket viktig rutin att etablera, för när uppgifterna sedan blir svårare måste man skriva ned den och sedan hantera dem i den formen, eftersom de annars överskrider våra arbetsminnebegränsningar. Att med konkret material eller på papper representera uppgiften och sedan dessa lösning är alltså inte i första hand för att man ska visa (läraren) hur man tänkte utan är en del av själva det matematiska arbetet. I åk 3 och 4 skärps detta mål genom att eleverna också ska hantera additiva situationer i flera steg genom att representera dem med ikoniska modeller och aritmetiska uttryck och beräkna dem. Många elever kan dock vara redo att arbete med flerstegsuppgifter redan i årskurs 2 eller 1. Flerstegsuppgifter kan till exempel se ut som i Figur 14. Om ett sådant arbetssätt etableras tidigt, ger man eleverna en stabil bas för att fortsätta göra på samma sätt inom andra talområden så att de på mellanstadiet sedan kan hantera additiva situationer som kan inkludera negativa tal och bråk i flera steg genom att representera dem med aritmetiska uttryck och därefter beräkna dem.

A

Ola springer 130 meter. Kim springer 70 meter längre än Ola. Hoda springer 50 meter längre än Kim. Hur långt springer Hoda?

$$O = 130$$
$$K = O + 70$$
$$H = K + 50$$

B

Kim springer några meter längre än Ola. Hoda springer 50 meter längre än Kim. Hoda springer 250 meter. Hur mycket längre än Ola sprang Kim?

$$K = O + ?$$
$$H = K + 50$$
$$H = 250$$

Figur 14. Två tvåstegsuppgifter av väsentligt olika svårighetsgrad. I uppgift A är informationen och de relationer som ska användas givna sekventiellt så att informationen direkt kan hanteras när det läses. Många elever i årskurs 3, 4 eller senare kan hantera en sådan uppgift i huvudet. I uppgift B är informationen inte given i en sådan ordning att den direkt kan användas i en beräkning. Inte många elever kan hantera en sådan uppgift i huvudet. Men genom att redan för enklare uppgifter av typen A etablera ett strategiskt sätt att skriva ned den informationen som levereras som aritmetiskta uttryck blir även uppgifter av typen B hanterbar för de flesta eleverna. Dessa tre uttryck kan nämligen skrivas ned direkt när informationen levereras, ungefär som i fallet A. När de tre uttrycken för uppgift B väl är nedskrivna kan de hanteras matematiskt. Den sista likheten (ekvationen, om man vill) säger att H=250, så vi kan byta ut H mot 250 i den andra likheten. Den blir då av en typ som eleverna kan hantera och se att K=200. Därefter kan K i den första likheten bytas ut mot 200, och så kan även den hanteras. O, K och H står här för antalet sprungna meter för de tre personerna i uppgifterna. Det är bra att tidigt etablera den här typen av variabelanvändning. Se vidare avsnittet Funktioner och samband. Det går naturligtvis även att rita bilder eller använda tallinjen för att förstå uppgiften, men att vara noga med hur informationen i uppgiften kodas om till aritmetiska uttryck och särskilt likheter.

Det som återstår att behandla har med negativa tal att göra. En ny term som införs är att prata om additiv invers. Det är för att det med den terminologin går att få ett mycket mer enhetligt sätt att förstå likheterna mellan additiva resonemang och multiplikativa resonemang, vilket kan lösa många problem som senare uppkommer i ekvationshantering. Talen *a* och *b* är varandras additiva inverser om de adderar till 0, dvs *a+b=0*. Redan tidigt kommer ju elever att vara bekanta med att till exempel 5–5=0 och i själva verket att *a-a=0* alltid gäller, oavsett vad *a* är. Men det vi vill ha är ju något som uppfyller likheten *a+_=0*, eller för att ta ett konkret fall, 5+_=0. Ett vanligt sätt att uppfinna de negativa talen är via termometern och sedan tallinjen (som vi har varit inne på). Det finns etablerade exempel på hur detta kan göras och vi beskriver det inte i detalj här. En alternativ eller kompletterande variant kan dock vara att gå tillbaka till en av de situationerna som användes för att motivera operationen addition, nämligen lägga till (den dynamiska additionssituationen). Vi har 5. Vi vill skapa ett tal som har egenskapen att om vi adderar det till 5 så får vi 0. Vi ger helt enkelt det talet namnet *minusfem*[81] och symbolen -5. Obs att det är viktigt att prata om att -5 är en symbol för ett tal (precis som 10 är en symbol byggd av två). Talet -5 har alltså egenskapen att om man lägger till det, dvs adderar det till något så blir det mindre. Addera -5 är samma sak som att subtrahera 5 och det nya talet med denna egenskap uppfyller vår önskan, dvs 5+-5=0. På samma sätt fungerar subtraktion av -5 precis som addition av 5, dvs -(-5) =5 (oavsett om det första minustecknet noterar en subtraktion eller negation. I praktiska sammanhang lägger man till en parentes när man skriver detta uttryck, dvs man skriver 5+(-5) men den parentesen har ingen som helst matematisk funktion. Man kan säga att parentesen bara är till för att det ska bli lite lättare att hitta de negativa talen och att det ska bli mindre risk för felskrivning när man vill skriva två minustecken efter varandra. Av detta resonemang kan man redan dra slutsatsen att addition av -5 fungerar exakt som subtraktion av 5, och omvänt gäller det alltid att subtraktion av ett tal fungerar som addition av den additiva inversen, inklusive med negativa tal.

En sista teknisk detalj när det gäller additiva aspekter av negativa tal är parentesnotationen i fallet -(3+4) eller i operationen a-(3+4) eller i -(5–7) eller a-(5–7). Oavsett om minustecknet betraktas som en operation eller som negation så spelar parentesen här en viktig roll för att indikera att det som stor inuti parentesen ska ses som en enhet som ska negeras eller subtraheras. Att det är hela 3+4 som ska subtraheras eller negeras betyder att både 3 och 4 ska subtraheras eller negeras, dvs -(3+4) =-3-4 och på samma sätt är -(5–7) =-5-(-7) dvs -5+7.

Oavsett om uttrycket -(5–7) ses som en subtraktion av talet 5–7 eller som den additiva inversen till talet 5–7 gäller alltså att (5–7) = -5+7.

Med en sådan här syn på negation (och additiv invers) händer egentligen inget nytt när det gäller sambandet mellan addition och subtraktion när man inför negativa tal. Additiva talfamiljer fortsätter att fungera likadant. Att *a+b=c* hänger ihop med *c-b=a*

[81] Det kan i början vara bra att uttala det som ett ord för att poängtera att det är ett tal och inte subtraktion av ett tal samtidigt som man pratar om att -5 är *en* symbol (byggd av två, som även 10 är byggd av två symboler).

och *c-a=b* fortsätter ju att gälla något av talen är negativt. till exempel är 10+(-4) =6, så därför är även 6-(4) =10 och 6–10= (-4). Även sambandet mellan additiva beräkningsuttryck och additiva öppna utsagor fortsätter av nästan samma skäl att gälla även för negativa tal

När vi kommer till högstadiet ska alltså ha fått med sig de kraftfulla representationer och strategier de behöver för att kunna hantera tal additivt inom alla talområdet som behandlas i grundskolan. Högstadiet undervisning inom området handlar alltså mer om att konsolidera genom att låta eleverna använda additioner och subtraktioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, inklusive med negativa tal och med variabler och ofta påminna om centrala samband och effektiva strategier.

Mål och innehåll för området additiva strukturer i en ordnad lista:

1–2:

- De fyra additiva situationerna, lägga till, lägga ihop, ta bort och skillnad.
- Representation av additiva situationer med ikoniska helhet-del-delmodeller, och på tallinjen samt med aritmetiska uttryck.
- Sambandet mellan addition och subtraktion och operationernas samband med helhet-del-delrelationer samt additionens kommutativitet
- Additiva talfamiljer
- Hur talkamrater, uppdelning av tal och helhet-del-delrelationer kan användas vid beräkningar, med skriftliga metoder och i huvudet.
- Sätta samman tolkning av en additiv situation (i ett steg) med representation som en ikonisk modell och som aritmetiskt uttryck och kunna beräkna uttrycket.
-

3–4:

- Sambandet mellan addition och subtraktion, inklusive för tal i bråkform.
- Additiva talfamiljer och sambandet mellan additiva beräkningsuttryck (3+5=_, 8–3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8).
- Utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med positiva heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal och metoder som utnyttjar positionssystemet, och även formella additions- och subtraktionsalgoritmer.
- Utföra additioner och subtraktioner med bråk med samma nämnare
- Hantera additiva situationer i flera steg genom att representera dem med ikoniska modeller och aritmetiska uttryck och beräkna dem.

5–7:

- Sambandet mellan addition och subtraktion, inklusive för negativa tal
- Subtraktion som addition av den additiva inversen, inklusive med negativa tal
- Additiva talfamiljer och sambandet mellan additiva beräkningsuttryck (3+5=_, 8–3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8) inklusive med negativa tal

- Parentesnotationen och hur till exempel -(5–7) i ett uttryck kan ses som en subtraktion av talet 5–7 eller som den additiva inversen till talet 5–7 och att -(5–7) =-5+7
- Utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal och metoder som utnyttjar positionssystemet, till exempel formella additions- och subtraktionsalgoritmer.
- Utföra additioner och subtraktioner med bråk även med samma nämnare
- Hantera additiva situationer som kan inkludera negativa tal och bråk i flera steg genom att representera dem med aritmetiska uttryck och därefter beräkna dem.

8–10:

- Additioner och subtraktioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, inklusive med negativa tal och med variabler.

Multiplikativa strukturer

Multiplikativa strukturer handlar om allt som har med multiplikation, division, bråk och flera relaterade begrepp att göra. Liksom för additiva strukturer är avsikt med den här kursplanen att skapa en sammanhängande behandling av området ur ett 1–10-perspektiv. Punkterna i Mål och innehåll är valda för att göra en sådan progression möjlig och förhoppningsvis göra det mindre troligt att området multiplikativa strukturer behandlas på ett osammanhängande sätt som skapar många missuppfattningar[82]. Liksom för additiva strukturer kommer den beskrivning som följer att betydligt mer detaljerad för de tidiga skolåren än för de sena skolåren. Det beror dels på att det helt enkelt är mycket svårare att fundera ut och beskriva en bra progression för de tidiga åren när alla viktiga begrepp introduceras. Det är väldigt lätt hänt att införa tankemodeller som verkar fungera fint först, men som ställer till det och skapar missuppfattningar senare. Men kan säga att forskningen om multiplikativa strukturer är väldigt imponerande när det gäller att identifiera och beskriva de missuppfattningar elever tenderar att få senare i skolan, men inte lika imponerande när det gäller att i stor skala testa alternativa undervisningsprogressioner. Många undervisningsexperiment handlar om korta försök med få elever[83]. Att konstruera en långsiktig progression som inte skapar de typiska fallgroparna är därför en utmaning[84].

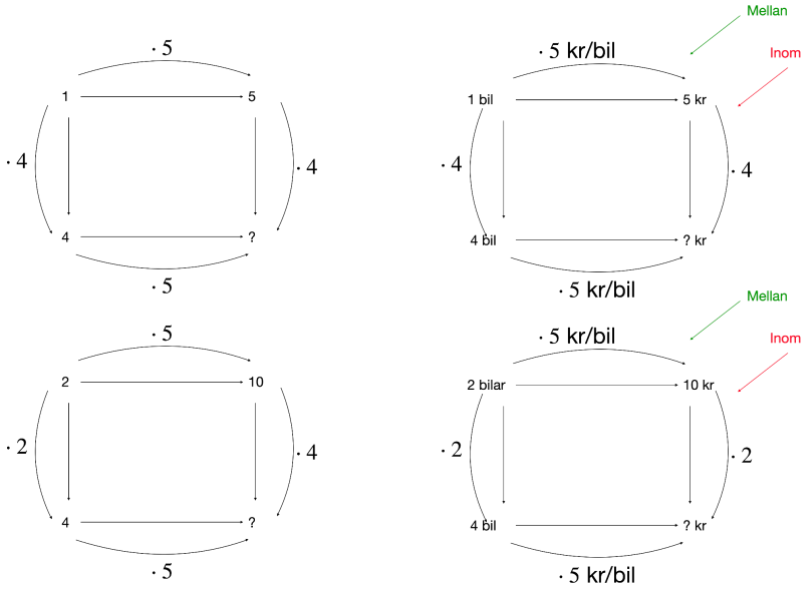
I årskurserna 1–2 ska det huvudsakliga fokuset för undervisningen vara tal och additiva strukturer. Ändå finns fem punkter i Mål och innehåll inom området

[82] (Helenius & Ahl, 2024b)

[83] Ett försök att beskriva kvaliteten och karaktären på denna forskning just med avseende på hur den kan stå modell för kursplanekonstruktion har gjorts av Helenius & Ahl (Helenius & Ahl, 2024a).

[84] Allt som föreslås här, inklusive de olika representationerna är dock testat med en stor mängd lärare i flera olika utvecklingsprojekt, så även om det inte går att uttala sig säkert om den långsiktiga effekten finns det gott om erfarenhet som visar att det går att skapa bra lektioner som fungerar för elever och lärare på de olika stadierna.

multiplikativa strukturer, som också kan se relativt avancerade ut. Dessa mål hänger dock ihop på ett mycket nära sätt och kan behandlas tillsammans i vissa enkla aktiviteter. Poängen med att ändå ha dessa mål är att ge eleverna en chans att kunna använda sin multiplikativa intuition[85] och vänja sig vid användbar multiplikativ terminologi. Det har nämligen visat sig att elever redan innan de börjar skolan och får formell undervisning har en god intuition för problem av typen *Om 1 bil kostar 5 kronor, vad kostar 4 bilar?* Ett sätt att teoretisera denna förståelse, som även är en bra tankemodell för lärare är att se det som en relation mellan fyra kvantiteter, snarare än tre, dvs i stället för att betrakta beräkningsuttrycket 4·5=_ använder vi alla fyra kvantiteterna som är i spel. Med tilde-tecknet för proportionalitet har vi nämligen att 1 bil ~ 5 kr, så 4 bilar ~ ? kronor för något förutsägbart men ännu okänt värde på ?. Typiskt, om barn hade haft tillgång till femkronor hade de kunnat resonera sig fram till att det behövs 4 sådana för 4 bilar. Barn har normalt en intuitiv förmåga att resonera proportionellt.



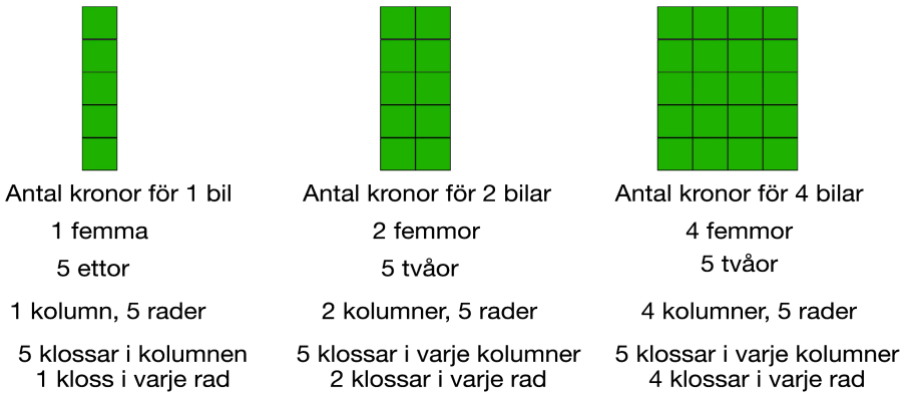
Figur 15. Överst, den proportionella situationen 1 bil kostar 5 kr, vad kostar 4 bilar? schematiska representerad. Till vänster med enheter, där man ser att skalningen från 1 bil till 4 bilar och från 5 kronor till det efterfrågade värdet ? kronor är en dimensionslös skalning inom en viss enhet. Denna är enklare för barnen att uppfatta. Barn har typiskt en intuitiv känsla för att om en sak kostar en summa så kostar *n* gånger så många saker *n* gånger så mycket, även om de inte kan räkna ut summan. Till höger en version med enheter som förklarar hur den initialt märkliga skalningen med 5 som går från bilar till kronor fungerar, nämligen via den sammansatta enheten kr/bil. I nedre raden finns motsvarande bilder för situationen 2 bilar kostar 10, vad kostar 4 bilar?

Till och med den här mycket enkla situationen har potential att bilda grund för många viktiga resonemang som man i undervisningen vill föra senare. Därför är det bra att då och då arbeta med situationen i fråga redan under de första skolåren, utan att göra det hela särskilt formellt.

[85] (Dooren m.fl., 2010; Lamon, 2007; Vanluydt m.fl., 2022)

Det här är alltså ett sätt att arbeta med enkla multiplikativa situationer med särskilt fokus på proportionella samband och man kan även som i den undre raden i Figur 15 använda situationen *Vad kostar 4 saker om 2 saker kostar 10?*. Även om man inte jobbar med de schematiska bilderna ovan med barnen så är de bra att känna till för läraren, för att de avslöjar flera saker om multiplikationens kommutativitet och att multiplikation är mer komplicerad en addition eftersom multiplikationer just ofta involverar flera olika enheter medan additioner alltid måste handla om endast en enhet, dvs samma enhet för alla termer.

På det praktiska planer kan man arbeta med situationer som denna och till exempel representera priset för en bil med 5 klossar. Kostnaden för en bil är då representerad av 5 klossar, och för flera bilar av *lika grupper av 5 klossar,* som till exempel 4 grupper av 5 klossar i vårt exempel. Med hjälp av rektangelkonstruktioner som i Figur 16 kan man då arbeta med likagruppering och uppdelning med rektangelrepresentationer och att sätta samman lika grupper av antal och dela isär antal i lika grupper. I rektangelrepresentationerna ser man även direkt multiplikationens kommutativitet. Man kan också med hjälp av rektangel-representationer prata om division som likadelning eller likagruppering och för eleverna få skapa en långsiktigt hållbar förståelse för sambandet mellan multiplikation och division genom att använda enkla fall som 20=4·5, 5=20/4, 4=20/5 med koppling till multiplikativa situationer. Man kan fråga sig, om det inte är bättre att arbeta med femkronor eller enkronor om man nu ändå använder ett problem som handlar om pengar. Det går att göra också, men det finns en poäng i att vänja sig vid sådana representationer som rektangelmodellerna redan direkt, eftersom dessa är mycket kraftfulla och kommer att användas senare. Särskilt för elever som kanske har svag visuell förmåga eller av andra skäl har svårare att uppfatta den typ av mönster som behöver uppfattas i rektangelmodellerna är det bra att ha tid att vänja sig vid dem.



Figur 16. En femma, två femmor och fyra femmor av klossar i rektangelform. Man kan skapa dessa som representationer av en proportionssituation, som den i Figur 15. Man kan sedan prata om själva rektangelformerna direkt, genom att införa terminologi för att kunna beskriva dem. I praktiska övningar kan olika grupper av elever jobba med olika situationer (dvs olika tal i de proportionella situationer man utgår från) för det i en sammanfattande diskussion ska gå att se att vissa fenomen i rektangelformerna förblir konstanta även när de ingående talen varierar.

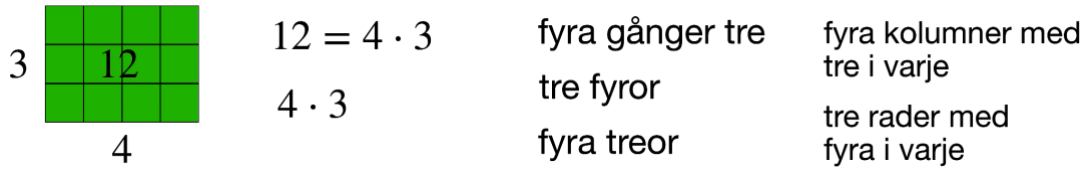
Den här typen av aktiviteter ska alltså ses som en försiktig inledning till multiplikation. Alla de fem målen inom multiplikationsområdet kan med fördel behandlas sammanhållet och med låg grad av formalitet. Däremot är det bra att återkomma till aktiviteter av denna typ regelbundet. Dvs det är bättre att göra det i kortare sessioner (en lektion eller två) då och då än att ägna längre tidsperioder åt multiplikation. Om man ändå redan i årskurs 2 vill arbeta mer med multiplikation finns det inget som hindrar att man sneglar mot målen i årskurs 3–4 och på ett mer systematiskt sätt arbetar med rektangelmodeller av multiplikation.

För årskurs 3 och 4 kan man säga att det är de centrala begreppen inom det multiplikativa fältet som är matematikundervisningens huvudfokus. Den centrala tolkningen är alltså multiplikation som lika grupper och rektangelrepresentationen av multiplikation och division. Ingenstans i mål och innehåll nämns multiplikation som upprepad addition, vilket normalt är det förhärskande sättet att introducera multiplikation. Det beror på att upprepad addition visserligen är lätt att förstå, men samtidigt leder flera vanliga missuppfattningar och till att det blir svårt att uppfatta och förstå några av de viktigaste multiplikativa fenomenen och svårt att utvidga multiplikation till andra talmängder på ett bra sätt[86].

Bland punkterna i Mål och innehåll nämns två specifika representationer, rektangelrepresentationen och tallinjen. Tallinjen är särskilt bra för att hantera bråk och gör att många tankeformer etablerade för additiv heltalsaritmetik kan tas vidare till andra talområden och, som vi ska se, till det multiplikativa området. Rektangelrepresentationen har det nosats på ovan, men i årskurserna 3 och 4 bildar den huvudsakliga representationen för att undervisa flera av de viktigaste multiplikativa fenomenen. För vissa av målen anges rektangelrepresentationen, eller som man också kan säga, rektangelmodellen för multiplikation, som ett möjligt sätt att behandla de i målet namngivna begreppen. För andra mål står det explicit att rektangelmodeller ska användas. Enskilda lärare eller läromedel kan dock välja att komplettera rektangelmodellen med andra, i det här dokumentet ej beskrivna, modeller eller representationer om de vill.

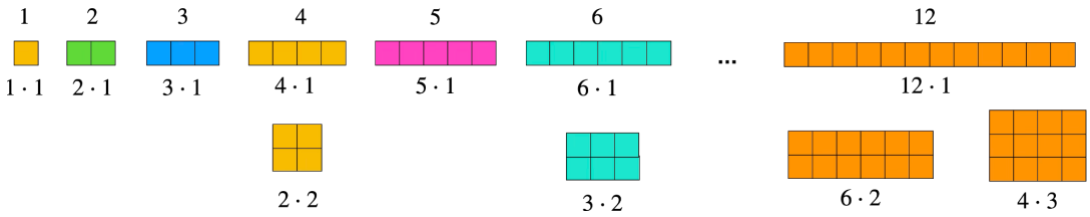
Rektangelmodellen går ut på att bygga fyllda rektanglar av klossar (kuber) eller använda ritade avbildningar av sådana byggen. Man inför sedan en namngivningsprincip för sådana rektanglar som går ut på att om bygget är 4 klossar bred och 3 klossar högt så heter den 4 gånger 3 och skriv symbolisk som 4·3. I figurtexten till Figur 17 diskuteras lite ytterligare terminologi, se även Figur 16.

[86] Det finns gott om forskning om problemen med upprepad addition, men tyvärr inte särskilt många storskaliga och i forskning rapporterade försök att systematiskt undervisa multiplikation på andra sätt. Se Helenius & Ahl (2024b, 2024a) för en översikt.



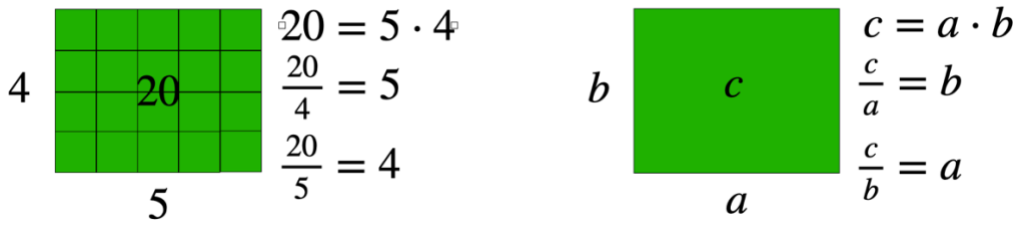
Figur 17. En rektangel med fyra kolumner och tre rader och dess namn och symbol, fyra gånger tre respektive 4·3. Det är typiskt bra att använda termen rad och påpeka att rektangeln karakteriseras av var och en av de 3 raderna har 4 klossar. Det är också bra att införa termen kolumn och säga att var och en av de 4 kolumnerna har 3 klossar. Den beskrivande terminologin tre fyror och fyra treor är också bra. Om man jobbar på papper och vet hur många klossar figuren som helhet innehåller kan man skriva det på. Ibland kan man vilja skriva 12=4·3 och ibland bara 4·3. I undervisning har det visat sig viktigt att förankra denna namngivningsmodell ordentligt och påminna om den ofta.

En lämplig fortsättning på multiplikationsundervisningen när själva namngivningsprinciperna har introducerats är att börja direkt med faktorisering och primtal, med hjälp av rektangelrepresentationer. Faktorisering han här ses som att *multiplicera isär* ett tal, dvs dela upp ett tal i två (eller fler) multiplikativa komponenter, vanligen kallade faktorer (därav termen faktorisering). Att starta med att på detta sätt dela upp tal multiplikativt, liknar hur additionsundervisningen och undervisningen om tal generellt började med additiva uppdelningar. En fördel med detta är att man kan arbeta mycket med uttryck att typen 12=3·4 i stället för beräkningsuttryck av typen 3·4=_ vilket är bra för att undertrycka tendensen att eleverna får en så kallad operationell syn på likhet (se avsnittet Algebra). Figur 18 visar schematisk hur det kan gå till. Observera att man i detta arbete även kan behandla multiplikationens kommutativitet.



Figur 18. Dela ut olika många klossar till olika elevgrupper. Be dem bygga så många olika rektanglar de kan av sina klossar, alla klossar måste vara med i varje bygge. Bygg en rektangel, skriv dess namn, bygg en annan om ni kan och skriv igen namnet. I en uppföljande helklassdiskussion kommer det att visa sig att antalet möjliga multiplikativa uppdelningar (faktoriseringar) inte alls ökar på ett förutsägbart sätt med talet storlek. Vid något tillfälle, kom överens som att samma rektangel vriden på två olika sätt bara behöver skrivas en gång och prata om kommutativitet och skriv upp några exempel, som till exempel 3·4=4·3. En del tal har bara en uppdelning, “den långa pinnen”. Inför termen primtal för dessa. I en hel klass kan man göra detta med många fler olika tal än i bilden.

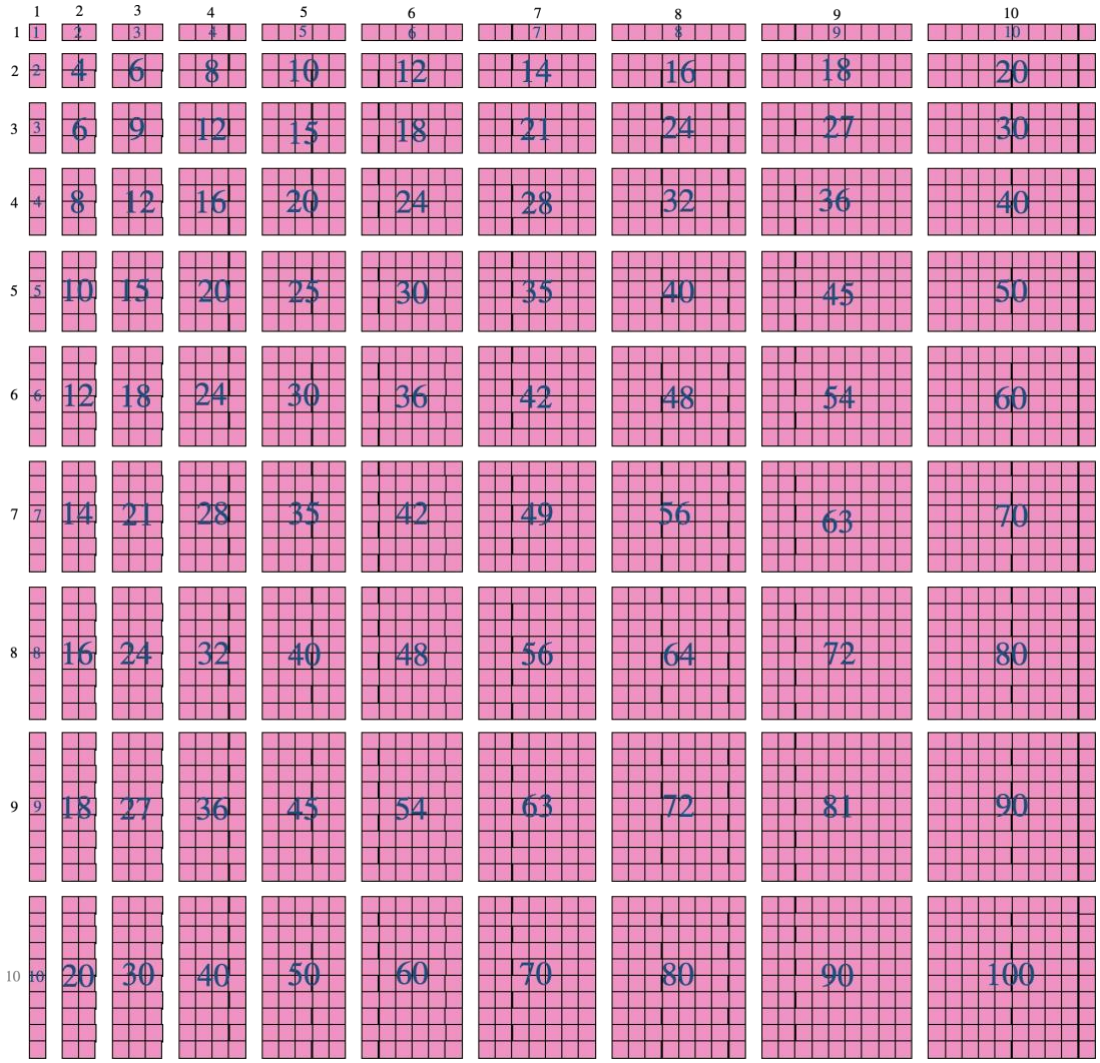
Precis som att vi för addition har additiva talfamiljer med en addition och två subtraktioner hänger varje multiplikations (och dess kommuterade version) ihop med två divisioner. Det är lätt att se i varje enskilt fall, och även i det generella fallet (Figur 18), att vi kan skapa en multiplikativ talfamilj och att vi rent generellt har ett samband mellan multiplikation och division. Särskilt gäller att divisionen a/b=_ alltid kan hanteras som en öppen multiplikationsutsaga a=_·b.



Figur 18. Multiplikativa talfamiljer. 20 som 4 rader och 5 kolumner, 20=5·4. Om man vill dela upp rektangeln i 4 lika delar är det 5 i varje. Om man vill dela i 5 lika delar är det 4 i varje (delningsdivision). Om man vill skapa 4-grupper får man 5 sådana. Om man vill skala 5-grupper får man 4 sådana (innehållsdivision). Multiplikationen 20=5·4 hänger alltså ihop med divisionerna 20/5=4 och 20/4=5. Sambandet gäller generellt: om *a* och *b* inte är noll är alla tre likheterna *a·b=c, c/b=a* och *c/a=b* sanna samtidigt.

Med rektangelmodellen som bas kan man sedan skapa en lång serie aktiviteter. Dessa behöver inte vara sammanhållna i en sekvens utan det är snarare en fördel att bryta arbetet med talrektanglar och göra något annat, för att senare återvända[87]. I vad som följer beskriver vi några särskilt centrala resonemang som man kan utveckla med rektangelmodellen i en följd. En sådan aktivitet är att låta olika elever eller par av elever bygga en viss tabell (som till exempel 3:ans tabell i form av alla rektanglar med 3 rader upp till 10 kolumner) och sätta ihop en hel multiplikationstabell. I en sådan multiplikationstabell upp till 10, kan man se viktiga strukturella relationer baserat på till exempel dubbling/halvering och distributiva lagen. I sjuans tabell kan man till exempel se att det går att bygga 8·7 som 2 stycken 4·7, dvs att 8·7=2·4·7, eller som 3·7+5·7.

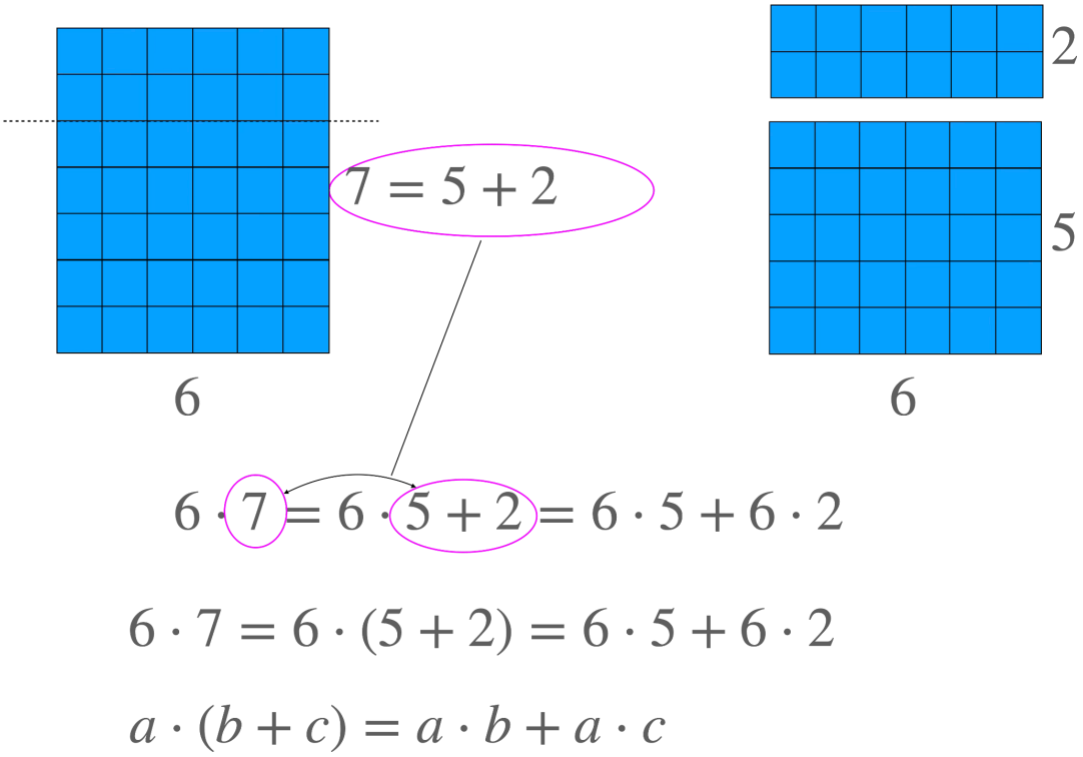
[87] Det är generellt en bra idé att separera undervisningen om något visst begrepp, representation eller metod i tid så att elever hinner glömma, men kan återkalla minnena med hård egen ansträngning eller lite påminnelse. Det huvudsakligen sådan återkallning som befäster minnen över tid.



Figur 19. Multiplikationstabellen upp till 10 med rektanglar. Strukturella relationer inom och mellan tabeller kan ses som komposition eller dekomposition av rektanglar. Genom att använda sambandet mellan division och multiplikation kan tabellen även assistera vid division. 56/8=_ är samma problem som 8·_=56. Vad ska multipliceras med 8 för att produkten ska bli 56. Gå till 8:ans rad (eller kolumn), hitta 56 och läs av vilken kolumn (eller rad) det är. Om man har en multiplikationstabell som denna på väggen, kan läraren hjälpa eleverna att vänja sig vid hur man hittar svar på divisioner genom att använda målmedvetna gester.

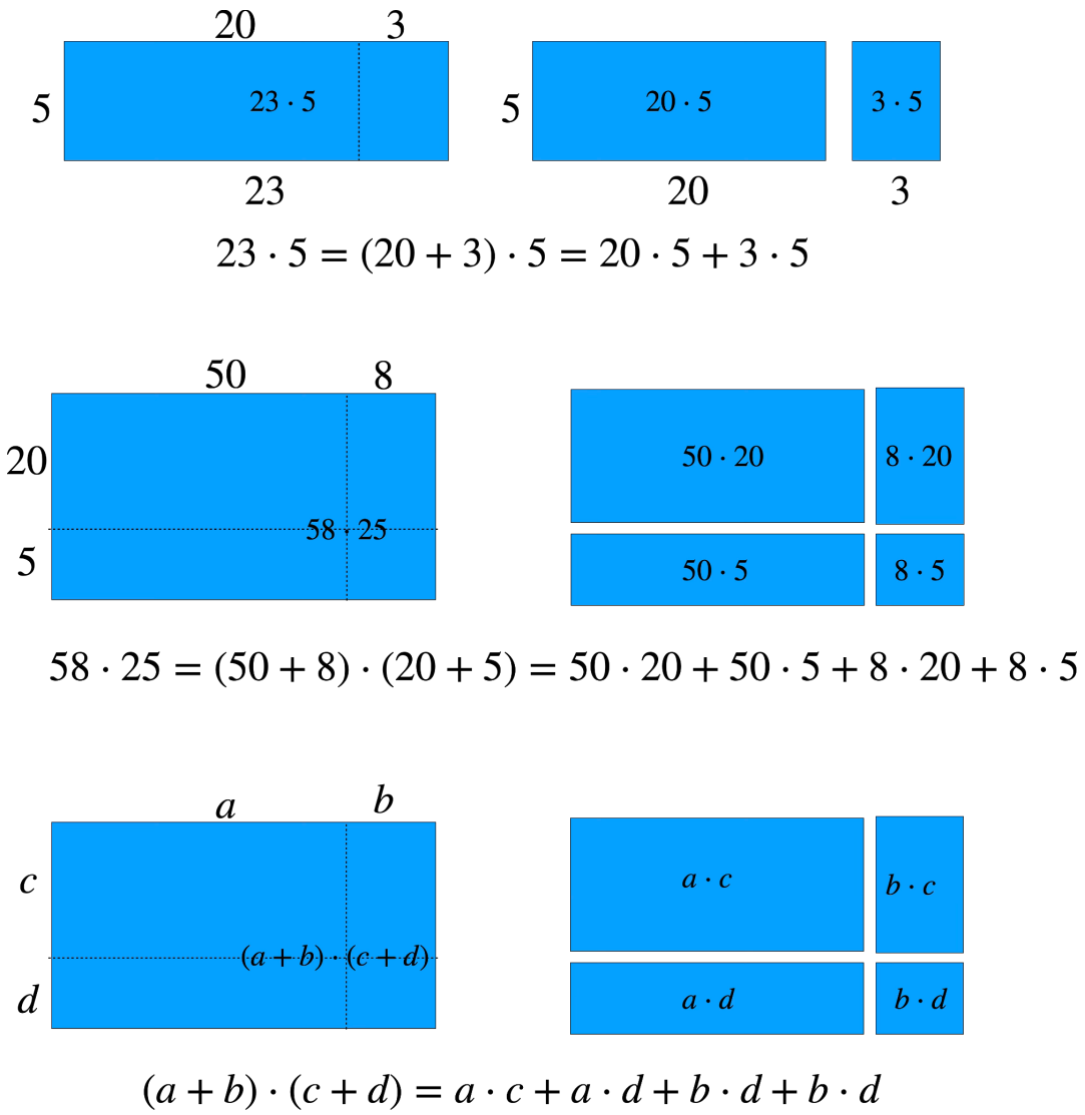
En stor fördel med rektangelmodellen är att dessa typer av samband dels kan byggas direkt med konkreta rektanglar (klossar eller pappersmodeller) och att resultaten kan beskrivas med symbolsystemet, men att man samtidigt på den symboliska nivån kan förklara multiplikativa relationer. Att 8·7=3·7+5·7 kan till exempel beskrivas som att den additiva uppdelningen av 8=5+3 leder till en additiv uppdelning av multiplikationen 8·7. I formell mening handlar detta om att använda distributiva lagen för beräkningar av multiplikationer. På ett liknande sätt som när parentesnotationen introducerades i fall som -(3+4) kan

kan man introducera parentesnotationen även här som en symbol för att indikera att i 6· (5+2) betyder parentesen att 6· ska verkar på *hela* parentesen, dvs på *både* 5 och 2. Observera att redan i denna tidiga tillämpning betyder parentesen inte att det som står inom den ska beräknas först. Det är ju det motsatta vi vill göra, dvs använda informationen om att vi kan dela upp 7 additivt i 5 och 2 till att dela isär multiplikationen 6· (5+2) i de två delarna 6·5 +6·2.



Figur 20. Distributiva lagen. Att 7 kan delas upp additivt i 5+3 gör att vi kan dela upp multiplikationen 6·7 i två additiva delar. Den rosa inringningen av 5+2 betyder att 5+2 ska ses som en enhet som 6· ska verka på. Att 6· ska verka på hela (5+2) betyder att 6· måste verka på både 5 och 2. Själva parentesnotationen kan förklaras som att det är en inringning men där taket och golvet inte får plats. Sambandet 6·7=6·5+6·2 kan naturligtvis användas för hantering av multiplikationer innan parentesnotationen införs, men det är också en notationsmässig finess att vänja sig vid parentesnotationen i den här typen av konkreta och ikoniska representationer.

Distributiva lagen är i själva verket mekanismen bakom all typ av hantering av mer komplicerade multiplikationer, till exempel multiplikationer med tal upp till 100 med hjälp av positionssystemet. Även detta bygger på additiva uppdelningar som de vi har beskrivit ovan.

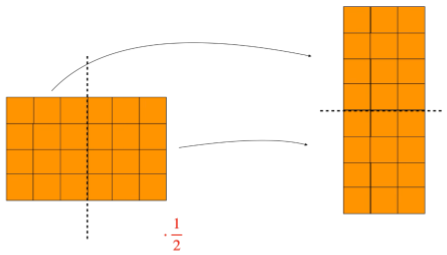


Figur 21. Användningar av distributiva lagen för multiplikationsberäkningar. Rektangelmodellen har här övergått till att endast illustrera uppdelningarna schematiskt, dvs utan att varje enskild ruta som tidigare representerade en kloss syns. De kvantiteter som ska multipliceras syns endast som de angivna talen. Överst ett tvåsiffrigt tal multiplicerat med ett ensiffrigt, där det tvåsiffriga delas upp i enlighet med positionssystemet, dvs i tiotal och ental. Mittenraden, en utvidgning av resonemanget till multiplikation av två tvåsiffriga tal. Underst, en algebraisk generalisering. Det går att utvidga resonemanget till tresiffriga tal, och så vidare, och senare även till tal med decimaler.

Även den klassiska multiplikationsalgoritmen bygger på distributiva lagen. Att kunna multiplikationsalgoritmen (uppställningen) är inte inskrivet bland Mål och innehåll. Bedömningen är att många ändå inte kommer ihåg den. Rent matematiskt är den en återvändsgränd och ingen annan matematik bygger på multiplikationsalgoritmen. Distributiva lagen å andra sidan, är helt fundamental för nästan all aritmetik och en viktigt grund även i algebra. Därför är användning av distributiva lagen prioriterad och introduktion och användning av distributiva lagen här är lika mycket en förberedelse

framåt, mot att kunna hantera algebraiska uttryck med parenteser, som det är ett sätt att utföra beräkningar.

Precis som med addition kan man också med rektangelmodeller arbeta med likhetsbegreppet för multiplikationer, till exempel 6·4=3·8, utan att använda argumentet att de två multiplikationerna är lika för att båda är lika med 24. Som synes i Figur 23 kan tekniken också utvidgas till bråk i form av halvor, dvs ge en första indikation på vad multiplikation med bråk kan betyda. Notera också hur ettans roll vid multiplikation och multiplikativ invers i enkla fall, som att 2 · 1/2 = 1, och 5 · ⅕ = 1 här dyker upp på ett mycket konkret sätt. Även när man på mellanstadiet sedan jobbar vidare med ettans roll vid multiplikation och division och vid förenkling av uttryck som innehåller multiplikation och division kan man återknyta till dessa schematiska bilder, även om bilderna i sig är begränsade till att bara fungera för halvor. När man diskuterar ettans roll vid multiplikation är det bra att samtidigt prata om att 1 inte heller påverkar en division, dvs att till exempel 5/1=5. Detta kan både göras genom att anknyta till exempel delningssituationer, om 5 saker ska delas på 1 person för denna person alla 5 sakerna, och till sambandet mellan division och multiplikation: eftersom 1·5=5 är 5/1=5 och 5/5=1. Den sista divisionen kan man också förstå direkt med en likadelningssituation. Om 5 personer delar på 5 saker för alla en var. Detta har inget med just 5 att göra utan själva symbolsystemet har egenskapen att *1·a=a, a/1=a* och *a/a=1*. Att tidigt och på ett konkret sätt introducera dessa idéer gör att eleverna har lång tid på sig att innan på mellanstadiet behöver kunna hantera ettans roll vid multiplikation och division och vid förenkling av uttryck som innehåller multiplikation och division rent symboliskt.



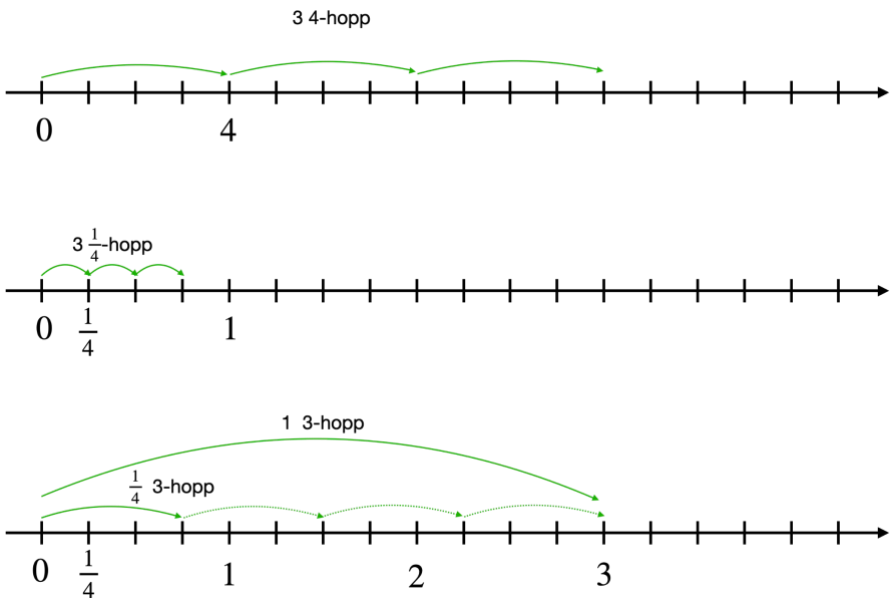
$$6 \cdot 4 = 3 \cdot 8$$

$$6 \cdot 4 = 6 \cdot \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2} \cdot 2}}_{=1} \cdot 4 = \underbrace{\boxed{6 \cdot \tfrac{1}{2}}}_{=3} \cdot \underbrace{\boxed{2 \cdot 4}}_{=8} = 3 \cdot 8$$

Figur 22. Tekniken dubbla-halva. En rektangel kan delas på mitten på ena ledden, och grupperas om till en annan, vilket visar likhet mellan två multiplikationer som till exempel 6·4=3·8. Den faktiska delningen och flyttningen av rektanglar kan indikeras med en schematisk pilnotation och senare även representeras helt i symbolsystemet och då bli et*t. exempel* på hur särskilda former av 1: or, nämligen ett tal gånger sin multiplikativa invers, kan användas i beräkningar. Eftersom man alltid kan sätta in 1 i en multiplikation utan att den påverkas (1 är neutralt i multiplikation) så kan detta generaliseras till tex multiplikation med en ⅕ · 5, vilket är svårt att göra med de fysiska rektangelmodellerna.

Med en sådan här start på multiplikationsundervisningen startar man alltså inte med enskilda multiplikationstabeller, vilket har varit mycket vanligt i läromedel. Det går naturligtvis att göra det, men genom att arbeta med alla multiplikationstabeller samtidigt så blir det mycket lättare att se de strukturella relationerna. Ett möjligt upplägg är dock att i årskurs 3 hålla sig till multiplikationer upp till 6 eller 7 och göra ungefär de saker som ha illustrerats ovan och sedan göra ungefär samma sak i årskurs 4, då öka formalitetsgraden något och jobba med högre tal där det blir mer och mer opraktiskt att arbete med klossar eller ikoniska rutmönster och mer och mer motiverat att gå över till att resonera direkt i symbolsystemet.

Även tallinjen går att använda för att förstå vissa aspekter av multiplikation. Dels kan man förstå till exempel 3·4 som 3 stycken förflyttningar (hopp) om 4, dels kan vi som i Figur 5 G introducera bråk på tallinjen och bråknotationen inklusive för bråk större än 1 och i blandad form. för att sedan kunna uppfatta multiplikation som hopp på tallinjen, även med enkla bråk.



Figur 23. Överst, hopp på tallinjen med heltal som representerar 3·4, tre fyra-hopp, eller tre fyror om man vill anknyta till terminologin som användes för rektangelmodellen. Detta utvidgas på mittenraden till multiplikationen 3·1/4, tre fjärdedels-hopp, eller tre fjärdedelar, något som när man väl infört bråk på tallinjen är relativt oproblematiskt. På nedersta raden har vi den något med komplicerade multiplikationen 1/4·3, en fjärdedels 3-hopp eller en fjärdedels trea. För att veta hur långt det är behöver man konstruera en hopplängd som i fyra kopior når till 3. Det går att utvidga detta till att hantera 1/3·1/4=1/12 och visa att 12 i 1/12 kommer från 4·3 och därmed bevisa hur multiplikation fungerar med stambråk. Det är ett relativt komplicerat resonemang som inte genomförs här[88].

[88] Principerna för hur tallinjen används för bråk anknyter delvis till Sieglers arbeten (Siegler m.fl., 2011), men i högre grad till rekommendationer från t. ex. Lamon (2007) och delvis även till den beskrivning av det multiplikativa begreppsfältet som ges av Izsák och Beckmann (Beckmann & Izsák, 2015; Izsák m.fl., 2021; Izsák & Beckmann, 2019). Se även (Helenius & Ahl, 2025).

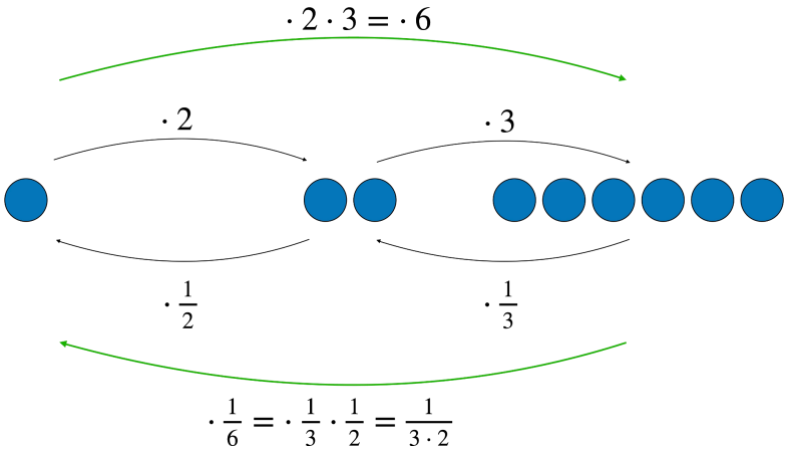
I Figur 23, notera att man alltså genom den terminologi man använder kan indikera att tre gånger en fjärdedel är tre fjärdedelar, dvs man kan tidigt introducera att 3·1/4 och 3/4 är samma sak och att man i förlängningen alltid kan dela isär ett bråk a/b som a·1/b. Detta är mycket praktiskt och gäller även om a/b betraktas som en division. Terminologin som används i Figur 23 undviker termen *av*, för att få ett sätt att prata om ett bråk gånger något (en fjärdedels trea) som är mer likt hur man uttrycker sig som heltal (fyra treor). Det är svårt att helt undvika ordet *av* i praktisk undervisning, men man ska vara medveten om att det är ett ord som används i många olika betydelser i skolmatematiken och därför kan vara förvirrande. 25 av 100 kan tolkas additivt, som 25 stycken utvalda. Men frågan *vad är 25 av 100* kan ibland också gälla andelen, dvs vara en division eller kvot 25/100. Frågan *vad är 25% av 100* ska i stället hanteras med en multiplikation 25%·100. Det är alltså inte lämpligt att på ett ensidigt sätt koppla bråkmultiplikation till ordet av.

En stor förändring i detta kursplaneförslag är att behandla bråk multiplikativt i betydligt högre grad och en konsekvens av det valet är att multiplikation av bråk måste införas tidigt. Eftersom bråksymbolen är konstruerad för att fungera smidigt med multiplikation med inte fungerar särskilt smidigt med addition är det naturligt att börja med multiplikation. Skälet till att det nästan aldrig görs är antagligen dels att det är nästan omöjligt att få till en bra förståelse för bråkmultiplikation via cirkelformade del-helhetsmodeller. Men också att det oavsett vilken modell man använder krävs ett ganska långt och komplicerat resonemang för att motivera hur multiplikation fungerar. Även om sådana resonemang kan bygga på intuitiva modeller och konkreta eller ikoniska representationer som eleverna har stora möjligheter att uppfatta, så är resonemangens komplexitet och omfattning ändå respektingivande eller i värsta fall avskräckande. Dessutom, även om resonemangen bygger på kraftfulla ikoniska modeller, så är de inte särskilt instruktiva, i betydelsen att det hjälper att ha kvar dem i huvudet som minnesstöd för att komma ihåg hur bråkmultiplikation fungerar. Bråkmultiplikation kanske därför är det första matematiska fenomen man stöter på i skolmatematiken där man bäst ger ett slags bevis som har till syfte att förklara att multiplikationen i symbolsystemet fungerar som den gör, men att man sedan lika gärna kan glömma det beviset eftersom regeln i sig är så enkel. Ett sådant resonemang kan man få genom att utvidga understa raden i Figur 23. Ett annat kan baseras på en version av rektangelmodellen.

Här ska dock en tredje variant beskrivas som bygger på att se multiplikation som skalning, något som praktiken redan introducerades i Figur 15 och som ligger mycket nära barns intuitiva förståelse för multiplikativa fenomen[89]. Vi har tidigare berört sambandet mellan multiplikation och division, och ofta säger man lite slarvigt att division är motsatsen till multiplikation. Det finns dock mycket stora fördelar att införa att “motsatsen” till multiplikation med 2 är multiplikation med 1/2. Det man menar med motsats i detta fall är att de två multiplikationerna tillsammans blir 1. Om man först multiplicerar med 2 och sedan med 1/2 så tar de två operationerna ut varandra. Det här har som vi har beskrivit med multiplikativ invers att göra, se Figur 22. 2 och

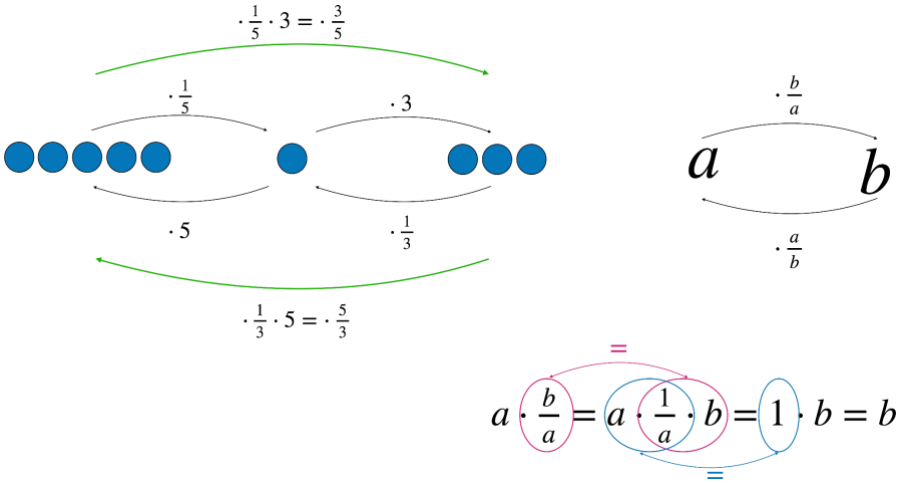
[89] Se Vergnaud (1983).

1/2 är varandras multiplikativa inverser. I Figur 24 används notationen med stambråk som skalningsoperatorer för att ge en indikation på hur bråkmultiplikation fungerar.



Figur 24. Det är lätt att se att en skalning med 2 följt av en skalning med 3 är en skalning med 6. Den omvända skalningen tillbaka måste då vara med 1/6, men också med 1/3 följt av 1/2. Det är alltså multiplikation. Resonemang av det här slaget kan göras lite på lågstadiet men passar antagligen bättre på mellanstadiet, som en väg mot att i allt högre grad kunna hantera bråk med bråksystemet.

Motsvarande sätt att resonera kan också användas för att visa att bråkformen för att ange andelar och som multiplikationsoperator, som att ⅔ multiplicerat med 3 ger talet 2. Skälet till att detta är en viktig fråga att kunna svara på har med flera viktiga användningsområden för bråkkonstruktionen att göra som vi återkommer till senare.



Figur 25. Vad ska vi multiplicera 5 med för att få 3? Till vänster, en ikonisk och schematisk representation. Eftersom vi nu vet hur man kan skala 5 till 1 och hur man kan skala 1 till 3 kan vi göra det i två steg. På ett symboliskt plan kan man, som vi har sett i andra fall, tänka på multiplikation med 3/5 som en division med 5 och en multiplikation med 3. Detta är en mycket praktisk koppling mellan bråk, division och multiplikation. Till höger samma sak generaliserat, som svar på frågan vad ska vi multiplicera a med för att få b och omvänt. Notera symmetrin (varken a eller b är noll). Nederst till höger resonemang i symbolsystemet där först använder att det vi redan har sett på tallinjen, att bråk kan delas isär som ett stambråk multiplicerad med originalbråkets täljare.

Vi är nu på god väg mot att ha avhandlat de aspekter av undervisningen som behövs för målet bråk, inklusive hur bråk multipliceras och divideras och att det för alla nollskilda *a* gäller att division med *a* är samma sak som multiplikation med *1/a*. Tre saker återstår: när är bråk lika, division av bråk, addition av bråk med olika nämnare. Redan när bråk introduceras på tallinjen kan man se att två bråk som ser olika ut måste vara lika, eftersom de hamnar på samma plats på tallinjen. På en tallinje som samtidigt är graderad i halvor och fjärdedelar kan till exempel punkten exakt mellan 0 och 1 vara benämnd både med 1/2 och 2/4[90]. Det vanligaste sättet att introducera likhet mellan bråk är via ikoniska del-helhetsbilder, som cirkeln som ofta introduceras tidigt. I enlighet med tidigare argumentation ser vi stora nackdelar med att tidigt introducera cirkelmodellen eller andra del-helhetsmodeller för bråk eftersom det verkar leda till att elever tror att bråk betyder andelar och sedan har svårt att komplettera eller byta ut denna uppfattning. Idén om lika bråk har också med förkortning och förlängning att göra, dvs olika sätt att skriva ett bråk till ett nytt bråk som är lika. Förklaringarna till varför förkortning av bråk fungerar är ofta bristfälliga och inte framåtsyftande och tar inte utgångspunkt i fundamentala matematiska argument. Därför rekommenderas att först introducera bråkmultiplikation och de bråkidentiteter som finns i Figur 26.

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad \frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Figur 26. Identiteterna i översta raden följer på flera olika sätt ut resonemang med de olika representationerna vi har introducerat. Elever bör kunna ge argument för dessa identiteters giltighet med egna ord. Identiteten för multiplikation på andra raden kräver som vi har beskrivit ett längre och mer komplicerat resonemang som det kanske är bra att eleverna har sett någon gång, men som inte i sig i särskilt hög grad stärker upp förståelsen. Det är i stället bra att tänka så att bråk och multiplikation hänger ihop och att multiplikativ hantering av bråk är lätt (medan additiv hantering är komplicerat).

Med hjälp av identiteterna i Figur 26 tillsammans med faktorisering (som var själva introduktionen till multiplikation, se Figur 15) kan man ge en perfekt förklaring till när

[90] En del kallar bråk som är lika i denna mening för ekvivalenta på samma sätt som uttryck som är lika ibland kallas ekvivalenta i stället för lika. Men poängen med likhetstecknet är just att det används för att beskriva att saker som inte ser lika ut ska betraktas som lika, om det finns ett giltigt argument för att de ska vara det. Det är förvånansvärt svårt att ge en heltäckande definition av likhet, men inom varje representationsform kan man typiskt ge sådana beskrivningar.

två bråk är lika, och till förkortning och förlängning. Två bråk är lika om de endast skiljer sig med en multiplicerad 1:a på formen *a/a*.

$$\frac{12}{8} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2} \cdot \overset{=1}{\frac{4}{4}} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{24}{36} = \frac{2 \cdot \overset{=1}{2} \cdot \overset{=1}{3} \cdot \overset{=1}{2}}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{3} \qquad \frac{23}{36} \qquad \frac{24}{37} \qquad \frac{25}{36}$$

Figur 27. Överst, ett typexempel på lika bråk och hur man visar att två bråk är lika. Första likheten med den orange schematiken. Likheten gäller för att den nya täljaren är lika med den gamla och den nya nämnaren lika med den gamla, var för sig. Likhet två gäller enligt identiteten för bråkmultiplikation, dvs att vi kan gå mellan två bråk och gemensamt bråkstreck när vi multiplicerar. Tredje likheten gäller för att 4/4=1 är därför utbytbart mot 1. Sista likheten gäller för att multiplikation med 1 inte påverkar och kan tas bort. I raden undre händer samma sak, men vissa steg är bortrationaliserade. Vi identifierar direkt *a/a*=1 i bråkuttrycket på gemensamt bråkstreck.

Addition av två bråk med olika nämnare går till så att man förkortar eller förlänger det ena eller det andra eller båda så att de nya lika bråken har gemensam nämnaren. En sådan nämnare som alltid fungerar är produkten av de båda nämnarna. Men särskilt om eleverna är relativt vana vid att använda faktorisering kan de faktorisera nämnarna lite och eventuellt hitta en mindre gemensam nämnare.

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 18 + 7 \cdot 12}{12 \cdot 18} = \frac{90 + 84}{216} = \frac{174}{216}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5}{6 \cdot 2} + \frac{7}{6 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}$$

Figur 28. En metod för addition av bråk som alltid fungerar och ett exempel på när den generella metoden leder till ett onödigt komplicerat förkortningsarbete, jämfört med att hitta en mindre gemensam nämnare direkt.

Slutligen ska vi behandla division av bråk som brukar anses som något av det mest komplicerade som görs i grundskolan men som är mycket mer tillgängligt med den bråkprogression som är beskriven här. Till skillnad från själva

multiplikationsidentiteten (att sätta på gemensamt bråkstreck) vars bevis är relativt krångligt och inte så instruktivt, är argumentet för hur bråk kan divideras både instruktivt och användbart och en bra träning på bråkhantering i allmänhet. Figur 29 visar hur det går till i det allmänna fallet, men man kan genomföra samma sak med siffror om man vill. Helst dock med till exempel 2, 3, 5 och 7 som täljare och nämnare i de två bråken, så att inga förkortningsmöjligheter uppkommer.

$$= 1$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

$$= 1$$

Figur 29. Bråkdivision. Vi vet att bråk kan skrivas om till ett nytt bråk som är lika genom multiplikation med en 1:a på formen *m/m*. Eftersom vi besväras av nämnaren *c/d*, väljer vi *m=d/c*, nämnarens multiplikativa invers. Likhet ett är alltså sann för vi bara har förlängt bråket (med *d/c*). Nämnaren i det förlängda bråket blir då 1, dvs behöver inte skrivas ut (likhet två). Nu har vi byggt om vårt divisionsproblem till ett multiplikationsproblem.

I nästan hela denna text har multiplikation, division och bråk beskrivits strukturellt, dvs hur hanteras bråk, division och multiplikation rent matematisk och med lämpliga representationer. För mellanstadiet finns målet att hantera multiplikation, division och hantering av bråkuttryck som inkluderar negativa tal och tal i decimalform. Om man har behandlat bråk på ett strukturellt sätt, så erbjuder dock vare sig negativa tal eller decimalform någon särskilt stor ny utmaning.

Det är naturligtvis också viktigt att kunna hantera multiplikativa situationer i ett steg och kunna särskilja multiplikativa från additiva situationer. Till skillnad från i det additiva fältet är det inte meningsfullt att klassificera alla multiplikativa situationer som finns. Det finns nämligen väldigt många. Vissa är dock särskilt viktiga. Vi har nämnt klassen av likadelningssituationer och klassen av likagrupperingssituationer, som båda motiverar divisionsoperationen och även den proportionella situationer, se Figur 15. På lågstadiet kommer man långt med en god förståelse för dessa klasser av situationer och hur de kan hanteras multiplikativt. Vi har också på flera sätt nosat på

situationen *hur gör man något en viss faktor större?* Redan i det inledande exemplet om proportionella situationer såg vi exempel på situationen 1 bil för 5 kronor skalades till situationen 4 bilar för 4·5 kronor och vi har också använt skalning i Figur 24 och Figur 25. Men hjälp av resonemanget i Figur 25 har vi fått en metod för att hitta en operator (multiplikationsfaktor) som skalar ett visst tal till ett annat.

En av punkterna under mål och innehåll är hur procentuella förändringar kan hanteras multiplikativt. Med multiplikativ hantering av procentuella förändringar är det som ofta kallas förändringsfaktor. I det här kursplaneförslaget är det tänkt att procentuella förändringar ska behandlas under ett vidare paraply av skalningsoperatorer. Det betyder att det är önskvärt att så snart som möjligt hantera en ökning av ett pris från 80 till 120 kronor genom att betrakta kvoten 120/80=3/2 och sedan uttrycka den på lämplig form. Priset har förändrats med en faktor 3/2=1.5=150%. Om frågan är hur mycket procent har ökat i procent är det skillnaden mellan 150% och originalpriset som ju alltid är 100%. Detta är en annan och mer multiplikativt inriktad teknik än att först räkna ut skillnaden i kronor, sedan dela med originalpriset och därefter omvandla resultatet till procentform. Alla lärare på högstadiet vet att det är svårt för elever att lära om till att använda förändringsfaktor, men det verkar inte finnas några argument för varför det skulle vara svårare att direkt arbeta med förändringsfaktor, som ju är en variant av den slags skalförändring som inledde hela presentationen om multiplikativa strukturer.

I typisk skolundervisning i matematik förekommer ganska många olika situationer som alla har att göra med kvoten *a/b.* Ofta behandlas dessa inom olika avsnitt och det ges ingen samlad behandling. I denna kursplan finns därför ett mål som försöker samla en uppsättning situationer som alla kan behandlas på ett likartat sätt med bråknotationen. Dessa är:

Vad ska man multiplicera b med för att få a? Den här frågan har vi redan behandlat, men den kommer i lätt förtäckt form i uppgifter som *Bollen kostade 120 kronor och såldes med rabatt för 80 kronor. Hur mycket var rabatten i procent?* Ett sätt att tänka på den här uppgiften multiplikativt är att fundera på vad vi ska multiplicera 120 med för att få 80. I en klassisk hantering brukar man säga *ta det nya priset dividerat med det gamla*, eller eventuellt, *skillnaden delat med det gamla*. Men hur ska man hålla ordning på att det är det gamla priset man ska dela med? Om man i stället tänker på problemet som en skalning från ett äldre pris till ett nytt, så uppkommer inte problemet med vad man ska dela med. Man kan direkt använda den generella principen att skalningsfaktorn från *a* till *b* är *b/a*, så i vårt exempel är den 80/120. Frågorna Hur mycket mer/mindre (multiplikativt) är *b* än *a*? och Vad är skalningsfaktorn som skalar *b* till *a*? och Vilken är förändringsfaktorn som tar *b* till *a*? är egentligen samma fråga som vad ska man multiplicera b med för att få a, men det är bra att eleverna känner igen olika formuleringar som denna fråga kan komma i.

Följande fyra sätt att formulera frågor är av ett lite annat slag: Vad är förhållandet mellan *a* och *b*? Vad är kvoten mellan *a* och *b*? Vad är andelen *a* av *b*? Hur mycket *b* ryms i *a* (multiplikativt)? Alla dessa frågor har ju samma svar, *a/b*. Men till skillnad från den tidigare kategorin frågor som gärna kunde tolkas som en multiplikativ förändring så handlar den senaste kategorin frågor om ett statiskt förhållande.

Liksom för additiva strukturer är ett mål att eleverna när de arbetar med uppgifter i textform som multiplikativa och proportionella situationer och hur de kan kännas igen och representeras som aritmetiska uttryck och likheter

Precis som för additiva strukturer är det på högstadiet inte särskilt mycket ny aritmetik kvar att behandla utan det viktigaste är att eleverna får använda det de lärt sig för på så sätt repetera och bli alltmer säkra på hantering av uttryck med blandningar av alla fyra räknesätten, inklusive rollen av faktorisering för att hantera uttryck multiplikativt.

Läraren behöver ta många chanser att påminna om bakomliggande principer och även vara noga med att eleverna kan förklara de aritmetiska uttryck som de producerar när de räknar. Lärare på högstadiet behöver alltså känna till vilka modeller som har använts för att bygga upp den multipliktiva aritmetiken på låg- och mellanstadiet, för att på ett för eleverna konsistent sätt kunna påminna om förklaringar och principer.

Som det har beskrivits inom området tal är två nya saker på högstadiet potenser och rotuttryck och ett mål på högstadiet är att eleverna ska kunna. Hela konstruktionen a^b kallas potensform och a kallas exponent (b kallas bas). Symbolsystemets aritmetik introduceras genom att a^n, för positiva heltal n genom definitionen

$$a^n=a\cdot a\cdot \ldots \cdot a \text{ (}n\text{ stycken)},$$

Dvs upprepad multiplikation, vilket i själva verket är enkelt att göra redan på lågstadiet om man vill. Att $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ följer i praktiken direkt från definitionen. Det finns också några fler regler som också följer direkt från att man återkopplar till definitionen. Dvs det är ett betydligt mindre konceptuellt språng att lära sig potenser en att lära sig nästan alla annan aritmetik. För a skilt från 0 kan man sedan undersöka kvoter a^m/a^n. Om man igen använde definitionen samt att $a/a=1$ följer att $a^m/a^n=a^{m-n}$. Övriga räkneregler för potenser följer på motsvarande sätt. En viktig sak är dock att till skillnad från hur parenteser har uppfört sig på ett förutsägbart sätt i fallen -(3+4) och 6·(5+7) finns det inget generellt sätt att hantera $(a+b)^c$.

Även rotsymbolen kan introduceras med en formell definition, nämligen att för ickenegativa tal a är $\sqrt{a}$ det positiva tal som har egenskapen att $\sqrt{a^2}=a$. Rotsymbolen fungerar sedan ungefär som divisionssymbolen, där det som står under rottecknet ska ses som att det är grupperat med en osynlig parentes och att roten alltså ska verka på hela detta uttryck. Liksom för potensnotationen finns ingen generell metod för att skriva om $\sqrt{a+b}$ utan roten måste verka på hela $a+b$. Att $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}$ följer dock från potensreglerna. Skälet till att vi så här pass summariskt kan beskriva dessa nya notationer och begrepp är att vi vid det här laget förväntar oss att elever i allmänhet har relativt god förmåga att resonera i symbolsystemet snarare än med hjälp av olika konkret material eller med stöd av ikoniska representationer. Det är exakt den förmågan som gör ny matematik mycket enklare att introducera. Så det slutgiltiga målet för den multiplikativa delen av aritmetikundervisningen är alltså att eleverna ska kunna hantera multiplikationer och divisioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, potensform och med rotuttryck, inklusive med variabler.

Mål och innehåll för området multiplikativa strukturer i en ordnad lista:

1–2:

- Enkla multiplikativa situationer med särskilt fokus på proportionella samband av typen *Vad kostar 4 saker om 2 saker kostar 10?*
- Sätta samman lika grupper av antal och dela isär antal i lika grupper.
- Likagruppering och uppdelning med rektangelrepresentationer
- Multiplikationens kommutativitet i enkla fall med rektangelrepresentationer
- Sambandet mellan multiplikation och division i några enkla fall som $10=2\cdot5$, $5=10/2$, $2=10/5$ med koppling till multiplikativa situationer.

3–4:

- Multiplikation som lika grupper
- Rektangelrepresentationen av multiplikation och division
- Faktorisering och primtal, till exempel med hjälp av rektangelrepresentationer
- Multiplikationens kommutativitet
- Distributiva lagen med hjälp av rektangelrepresentationer och dess användning för beräkningar av multiplikationer
- Ettans roll vid multiplikation och division.
- Multiplikativa talfamiljer
- Sambandet mellan multiplikation och division.
- Multiplikationstabellerna upp till 10, med särskilt fokus på strukturella relationer baserat på till exempel dubbling/halvering och distributiva lagen.
- Sambandet mellan multiplikationstabeller och division
- Multiplikation upp till 100 med hjälp av positionssystemet och distributiva lagen.
- Multiplikation som hopp på tallinjen.
- Bråk på tallinjen och bråknotationen inklusive bråk större än 1 och blandad form.
- Multiplikativ invers i enkla fall, som att $2 \cdot 1/2 = 1$, och $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.
- Bråkformen för att ange andelar och som multiplikationsoperator, som att $\frac{2}{3}$ multiplicerat med 3 ger talet 2.
- Hantera multiplikativa situationer i ett steg och kunna särskilja multiplikativa från additiva situationer.

5–7:

- Ettans roll vid multiplikation och division och vid förenkling av uttryck som innehåller multiplikation och division.
- Bråk, inklusive hur bråk multipliceras och divideras och att det för alla nollskilda a gäller att division med a är samma sak som multiplikation med 1/a
- Multiplikation, division och hantering av bråkuttryck som inkluderar negativa tal och tal i decimalform
- Multiplikativa och proportionella situationer och hur de kan kännas igen och representeras som aritmetiska uttryck och likheter
- Bråknotationen som representation av klasser av situationer som involverar:

Vad ska man multiplicera b med för att få a?
Hur mycket mer (multiplikativt) är b än a?
Vad är skalningsfaktorn som skalar b till a?
Vad är förhållandet mellan a och b?
Vilken är förändringsfaktorn som tar b till a?
Vad är kvoten mellan a och b?
Hur mycket b ryms i a (multiplikativt)?
Vad är andelen a av b?

- Hur procentuella förändringar kan hanteras multiplikativt.
- Hantera multiplikativa situationer i flera steg och situationer som mixar additiva och multiplikativa aspekter

8–10:

- Hantera multiplikationer och divisioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, potensform och med rotuttryck, inklusive med variabler.
- Hantering av uttryck med blandningar av alla fyra räknesätten, inklusive rollen av faktorisering för att hantera uttryck multiplikativt.

Algebra
Att stärka algebrans position i skolmatematiken är en viktig del av den kursplan som beskrivs här. Algebra är ett område som i traditionell skolmatematisk mening kan beskrivas som räkning med bokstäver, men algebrans roll är mycket vidare än så. Algebra har traditionellt haft en svag ställning i svensk skolmatematik, om man jämför med algebrans roll i t. ex. östeuropeisk undervisning[91]. Studier av innehåll i kursplaner och läromedel visar att de mest framgångsrika länderna i internationella undersökningar av elevers matematikkunskaper typiskt har en tydligare algebraisk inriktning på sin undervisning[92]. Även om det är ont om storskaliga studier som beskriver hur en systematisk algebraorienterad undervisning över hela grundskolan bör se ut, finns en mycket tydlig samstämmig bild från forskningen att algebra, och det som kallas tidig algebra, eller algebraiskt tänkande, bör har en tydlig roll i skolmatematiken[93].

Valet att stärka skolmatematiken algebraiska prägel resulterar inte nödvändigtvis i att mål och innehåll under rubriken algebra sväller ut i relation till andra områden. Det finns flera skäl. Delar av det som inom forskning och av tradition kallas algebra handlar om funktioner och samband och beskrivs därför under avsnittet med den rubriken. Dessutom, ett av de viktigaste skälen att förstärka algebra handlar om att stärka det som ibland kallas en strukturell ansats inom aritmetikundervisningen, dvs att fokusera på samband mellan operationer och hur sådana samband kan representeras på generaliserbara sätt och användas i många sammanhang. En strukturell ansats kan sägas sammanfalla med att använda algebraiska tankeformer för att förklara och hantera aritmetiken. Ett ytterligare skäl att inte algebraavsnittet sväller ut är alltså att mycket av denna strukturella aspekt av algebran beskrivs under avsnittet Aritmetik. Även de delar av algebran som blir kvar efter en sådan utlokalisering har dock stora överlapp med aritmetiken. Man kan säga att om man tillämpar en strukturerad och algebraisk ansats på aritmetiken, blir avståndet mellan aritmetik och algebra mycket litet. Vissa länder skriver ihop algebra och aritmetik under en rubrik i sina kursplaner. Ett skäl att inte göra det är att det trots allt finns vissa specifika begrepp som till exempel likhet som är värd en egen behandling under ett algebraavsnitt, även om likhet naturligtvis är centralt även inom alla andra matematikområden, särskilt aritmetik.

I vad som följer beskriv mål och innehåll i kursplanerna ur ett progressionsperspektiv. Som tidigare är det som står med blått mål och innehåll från årskurserna 1–2, grönt motsvarar 3–4, orange är för 5–7 och rött är mål och innehåll från högstadiet, dvs 8–10. Av formuleringsmässiga skäl är inte textsnuttarna i färg exakta kopior av motsvarande kursplanetextutdrag, men det är vid en jämförelse uppenbart vad som avses.

[91] (Grønmo, 2018)

[92] (Houang & Schmidt, 2008)

[93] Se Helenius & Ahl (2024b) för en översikt.

Likhet, ekvationer och uttryck

Det mest centrala begreppet i algebran är likhet[94]. En mycket stor del av den ansats för aritmetikundervisning, och valet av mål och innehåll för aritmetiken har handlat om att konstruera en sammanhängande behandling av likhet från åk 1 till 10. I detta avsnitt ger vi dock likhetsbegreppet en mer övergripande behandling.

Ett centralt problem med likhetsbegreppet är att elever efter att i många år huvudsakligen ha arbetat med likhet i uppgifter som 3+5= tror att likhet betyder att ett svar ska räknas ut. De får senare problem att förstå likhet som en relation som i 3+5=_+4 och därför även senare med att förstå ekvationer[95]. Ett annat problem är att det är mycket svårt eller rent av omöjligt att ge en övergripande definition av likhet utan cirkelreferenser eller genom att något annat som inte heller definieras[96] [97]. Ett sätt att samtidigt hantera båda dessa problem låta den absolut första och under de första åren helt dominerande sätten att använda likhet och likhetstecknets användning vara att arbeta med uppdelning av tal (5=2+3) och likhet mellan uttryck (2+3=4+1), det vill säga, arbeta med likhet i relationell mening. Detta kan göras med konkreta och ikoniska antalsmodeller som kopplas till symboliska uttryck som involverar likhetstecknet gärna med stöd av schematiska representationer som pilar, se Figur 30.

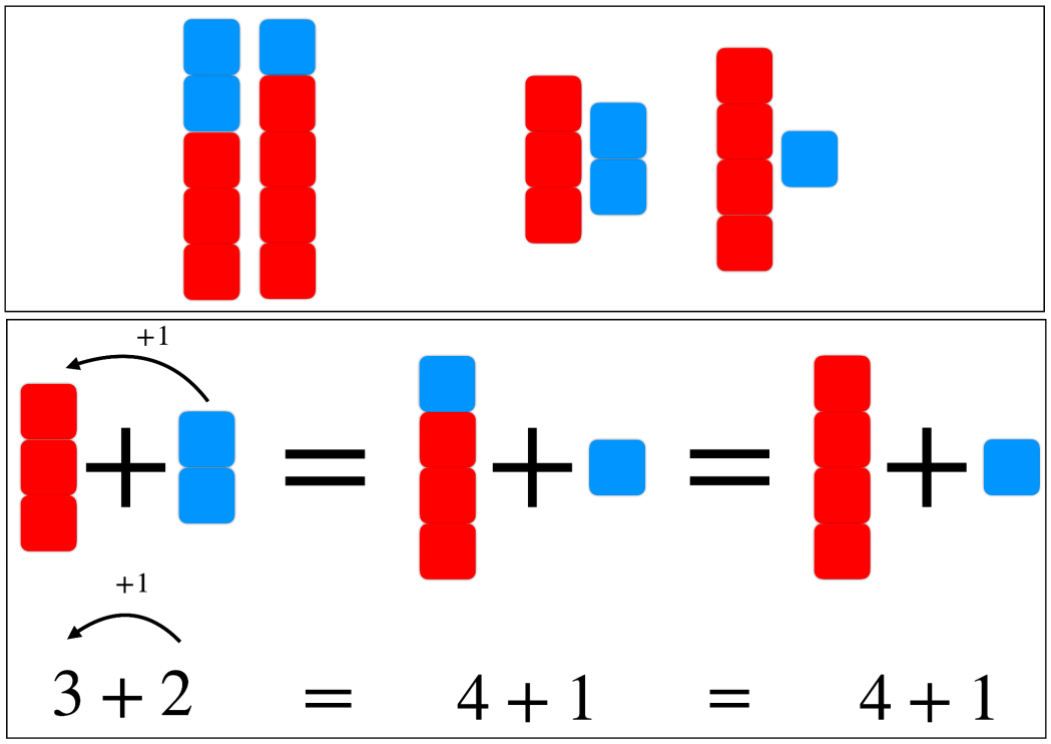
---

[94] Ibland används termen ekvivalent eller ekvivalens för att beteckna det som egentligen är likhet. Det är särskilt vanligt i anglosaxisk litteratur och även i matematikdidaktisk forskning. Det kan exempelvis sägas att 1/2 och 2/4 är ekvivalenta bråk eller att 2x+3x och 5x är ekvivalenta uttryck. Detta är dock olyckligt eftersom det som egentligen avses är (matematisk) likhet. En gissning är att termen ekvivalent har börjat att användas för att det verkar konstigt att kalla sådant som uppenbarligen ser olika ut för lika. Men just detta är själva poängen med likhet - att beteckna sådant som ser olika ut som lika, som i 1/2=2/4 och 2x+3x=5x. Man skriver likhetstecken och säger att de är lika.

[95] Bristen på relationell förståelse av likhet är så stor att det är vanligt att ekvationer introduceras med återintroduktion av likhet med en balansvågsmetafor, dvs en helt ny beskrivning av vad likhet ska betyda som i sig skapar en mängd i forskning dokumenterade problem. Ett väletablerat resultat från den didaktiska forskningen är att det är ett komplicerat kognitivt steg att gå från en operationell förståelse av likhet som när man skriver 8 som svar på uppgiften 3+5= eller 2·4= till att förstå att det är 2 (och inte t. ex. 8 eller 14, som är vanliga elevsvar) som löser uppgiften 3+5=_+6, se t. ex. Opsahl och Topphol (2023) och även Sumpter m.fl. (2025). Det finns dock ingen forskning som visar att det är svårt att direkt när likhetstecknet introduceras på lågstadiet göra det via det relationella perspektivet, eller som här via utbytbarhetsprincipen för likhet. Småskaliga experiment har visat att den utbytbarhetstolkning av likhet som det argumenteras för i denna text är en lovande approach (Jones m.fl., 2013). Den sammanfattning av tidigare forskning som finns i Jones m.fl. (2013) ger också massivt stöd för att det är det ensidiga fokuset på likhet som en signal att utföra en beräkning som skapar elevernas svårigheter att anamma ett relationellt perspektiv på likhet, inte att det i sig skulle vara svårt. Se även

[96] Svårigheten är inte av didaktisk natur, som Mazur (2007) övertygande har argumenterat för.

[97] Om man t. ex. säger att två uttryck är lika om de representerar samma kvantitet, så har man ju kvar att förklara var samma kvantitet betyder. Vi kan säga per definition att *a/b=c/d* när *ad=bc* och har då överfört problemet på att säga när bråk är lika till en fråga om när produkter är lika, men har då kvar att förklara när sådana produkter är lika. I figur X ges förslag på en ingång till likhet som både kan användas i konkret arbete med likheter och som ger en rimligt intuitiv idé om vad likhet är.



Figur 30. Bilden summerar ett sätt att introducera likhet genom att direkt arbeta med det relationella perspektivet. Det som följer är ett sätt, baserat på en så kallad antalsmetafor för tal (se avsnittet Aritmetik). Det finns också andra sätt, som inte tas upp här. Det är inte avsikten att bilden ska vara utgångspunkt för en genomgång, snarare något som en lektion eller sekvens av lektioner kan landa i efter att eleverna experimentellt har fått arbeta med till exempel femkamrater utan explicit referens till likhetstecknet (eller plustecknet). De översta två staplarna till vänster kan sägas visa att 5=5, men ger inte en så bra introduktion till likhet. Grupperade i 3 och 2 respektive 4 och 1 är det svårare att se likheten, vilket kan öppna för frågan hur man kan visa att de är lika, utan att referera till att båda är 5. En bättre inledande aktivitet som sedan också ska prägla mycket av arbetet med den additiva aritmetiken är att undersöka hur man kan visa att tre och två är lika med fyra och ett, utan att referera till att båda är fem. Det kan man göra genom att med klossar (konkret form) eller med bilder på klossar (ikonisk form) flytta en 1:a (en kloss) från den blå 2:an till den röda 3:an. Då har vi byggt om tre plus två till fyra plus ett. Den högra likheten gäller för att det är två (sånär som på färger) identiska byggen. Den vänstra likheten gäller för att antal klossar inte ändrar sig för att vi flyttar på dem. Pilen med +1 representerar den konkreta handlingen att flytta en kloss (en 1:a) från den blå 2-stapeln till den röda 3-stapeln. I de symboliska uttrycken (nederst) kan man inte ta ut en 1:a ur själva siffran 2, men pilen med +1 är en påminnelse om den fysiska handlingen. I det symboliska uttrycket är pilen samtidigt en kommunikativ handling (som kan visa någon annan hur man skapade 4+1 från 3+2) och en mental påminnelse om att den symboliska operationen har en konkret och ikonisk grund i en faktisk förflyttning av en 1:a (en kloss).

Att det bara finns en punkt om likhet i Mål och innehåll för årskurs 1–2 betyder inte att det kan avhandlas snabbt. Snarare är det något som ska behandlas varje vecka under dessa två år, vilket inte är svårt eftersom tolkningen av likhet som lyftas fram

här också ligger till grund för en god behandling av de flesta målen under rubriken aritmetik. Man kan inte förvänta sig att elever ska uppfatta den förståelse för likhet som vi är ute efter här efter en enstaka lektion. Detta är saker som undervisningen måste återvända till många gånger.

$7+3=5+5$	$7+1=6+2$	$12+5=15+2$
$17+3=15+5$	$17+15=27+5$	$18+5=20+3$
$77+8=57+28$	$22+15=30+7$	$198+5=200+3$
$122+18=100+40$	$222+15=232+5$	$998+5=1000+3$
$\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{7}{7}+\frac{1}{7}$	$2{,}87+0{,}15=2{,}02+1$	$977+85=1000+62$

Figur 31. Olika versioner av uttryck = uttryck. Uppgiften är att välja en (eller fler) av likheterna och presentera argument varför det är lika. Samma grundläggande teknik kan användas på alla uppgifter, men variationen i svårighetsgrad gör att uppgiftslistan som helhet fungerar för en omfattande elevvariation. Om undervisningen redan har behandlat bråk och decimalform kan vissa elever ta sig an sista raden och visa sina resonemang i symbolisk form, samtidigt som vissa elever har nytta av att arbeta med de enklaste uppgifterna med multilinkstöd. Elevgruppen som helhet kommer samtidigt att ha nytta av att presentera och ta del av varandras resonemang.

Målet om likhet i åk 1-2 följs sedan upp med att utvidga biblioteket av resonemang som förklarar varför två uttryck är lika t. ex. genom att inom det multiplikativa fältet på motsvarande som i Figur 31 arbete med likheter av typen 6·4=3·8 tillsammans med rektangelrepresentationer (se avsnittet aritmetik) eller att arbeta med likheter i form av öppna utsagor eller med andra symboler för obekanta där frågan om hur man kan visa varför en likhet som 6·4=3·8 gäller ersätts med frågor som *vad ska stå på den tomma platsen för att likheten 6·4=_·8 ska gälla?* (eller motsvarande frågor inom det additiva fältet eller i likheter som innehåller flera operationer). Detta är en bra start för att senare kunna förstå hur ekvationer fungerar. En annan aspekt av öppna utsagor kopplar både till aritmetiken och till funktioner och samband och handlar om att utifrån en viss situation, t. ex. J*ag har tre bollar och du har några bollar och vi har 8 tillsammans. Hur många har du?* kunna ställa upp båda de symboliska uttrycken 3+_=8 och 8–3=_ och även veta att de två likheterna (eller ekvationerna) har samma lösning. Samma sak inom det multiplikativa fältet där frågan *Vi delade 12 kronor på några personer och fick 3 var, hur många personer var det?* både kan beskrivas med den öppna divisionsutsagan 12/_=3 och den öppna multiplikationsutsagan 12=_·3.

En annan helt central resonemangsform som berör likhet är likhet som utbytbarhet[98], och hur man kan använda likheter för att skapa nya likheter som i mellanstadiet följs upp med att detta är de huvudsakliga principerna för hur uttryck kan förenklas eller på andra sätt skrivas om. Principerna för likhet som utbytbarhet är mycket vitt applicerbara. I huvudräkning finns t.ex. en myriad av varianter på att till exempel använda att 5=2+3 för att skriva om 8+5 som 8+2+3 (5:an byts ut mot 2+3) som sedan kan beräknas som 10+3 (se avsnittet Additiva strukturer). Principen bygger på att man genom att ha automatiserat tiokamraterna och att man kan ta fram uppdelningar av andra tal från 2 till 9 kan få maximal generaliserbarhet från ett relativt litet antal lagrade minnen. I Figur 32 finns fyra beräkningsuppgifter där varje steg i beräkningen innebär produktion av en likhet som bygger på användning av en enklare eller redan etablerad likhet. Likheterna i röda rektanglar är argument för varför den likhet som pilen pekar på gäller. Fastän uppgifterna a-d är av olika slag finns det en slags generell resonemangsform som kan återanvändas, nämligen att man använder likheter för att producera nya likheter som gradvis tar ens uttryck allt närmare svaret. Och samma sak gäller för Figur 33. De tre uppgifterna där skulle kunna formuleras som *förkorta, förenkla* respektive *faktorisera*, men bygger på samma grundläggande sätt att använda likheter för att producera nya likheter som a-d. Notera även att första likheten i c. motiveras med ett argument med en ikonisk representation i form av rektangelbilder av multiplikation. Om man introducerar multiplikation med rektangelrepresentationer kan den alltså hanteras någon av de första lektionerna om multiplikation, t.ex. i årskurs 3. I d. motiveras samma sak med en generell algebraisk likhet, nämligen den distributiva lagen. Alla argument, eller om man vill kalla det tekniker eller metoder, i uppgifterna a-g kan generaliseras till mer komplicerade fall som till exempel 18+5 eller 80+50 (a) respektive 15·8 eller 35·75 för (c och d).

Observera att serien a-g inte nödvändigtvis är ett förslag till en konkret progression, eller att elever nödvändigtvis behöver motivera sina likheter på precis detta sätt, utan informationen i Figur 32 och 33 är ägnade att förklara för läsarna av detta dokument (dvs lärare och andra berörda) hur en sammanhängande progression för en viktig aspekt av likhetsbegreppet över hela grundskolan kan se ut.

[98] Det som här kallas likhet som utbytbarhet kallas ofta i den engelskspråkiga litteraturen *the (relational)* s*ubstitution view of equality.* Se t. ex. (Jones m.fl., 2013)

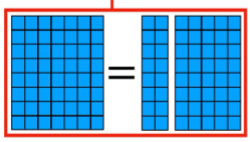
a. $8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13$

$5 = 2 + 3$ $\quad$ $8 + 2 = 10$

b. $13 - 8 = 13 - 3 - 5 = 10 - 5 = 5$

$8 = 3 + 5$ $\quad$ $13 - 3 = 10$

c. $7 \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 16 + 40 = 56$



$2 \cdot 8 = 16$
$5 \cdot 8 = 40$

d. $7 \cdot 8 = (2 + 5) \cdot 8 = 2 \cdot 8 + 5 \cdot 8 = 16 + 40 = 56$

$7 = 2 + 5$ $\quad$ $(a + b)c = ac + bc$ (distributiva lagen) $\quad$ $2 \cdot 8 = 16$, $5 \cdot 8 = 40$

Figur 32. Beräkningar där varje beräkningssteg, dvs produktion av en ny likhet, bygger på användning av en redan etablerad likhet. I fall c. motiveras den första likheten med en ikoniskt representerad likhet i form av en rektangelmodell för multiplikation. I fall d. motiveras samma likhet med en additiv uppdelning av 7 och sedan en generell algebraisk identitet, nämligen distributiva lagen.

e. $$\frac{24}{36} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot3}{2\cdot3\cdot2\cdot3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot3}{2\cdot2\cdot3\cdot3} = \frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{3} = 1\cdot1\cdot1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3$, $36 = 2\cdot3\cdot2\cdot3$ | $3\cdot2 = 2\cdot3$ | $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ (gemensamt bråkstreck) | $\frac{a}{a} = 1$ | $1\cdot a = a$

f. $$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{x^2-2^2}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \frac{x-2}{1} = x-2$$

$4 = 2^2$ | $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (Konjugatregeln) | $\frac{a}{a} = 1$ | $\frac{a}{1} = a$

g. $$3x^2y^4 + 6x^3y^2 + 12x^2y^2 = 3x^2y^2(y^2 + 2x + 4)$$

$ab + ac = a(b+c)$ (distributiva lagen)

Figur 33. Fall e. skulle kunna vara en uppgift med uppmaningen “Förkorta bråket”, fall f. en uppgift “Förenkla uttrycket” och fall g. en uppgift “Faktorisera”, men alla steg i alla uppgifterna bygger på att en likhet skapas genom tillämpning av en annan likhet, precis som för alla uppgifter i Figur 32.[99]

Man kan också notera att i d-g används generellt formulerade likheter i algebraisk form som kommutativa och distributiva lagen för att representera aritmetiska samband som sedan används för att dra specifika slutsatser för just den uppgift som avses. I d. används den generella regeln (*a*+*b*)*c*=*ac*+*bc* (distributiva lagen) tillämpad på *a*=2, *b*=5, *c*=8. Att komma fram till att den distributiva lagen gäller kan göras genom att utforska den typ av rektangelfigurer som finns i fall c (se avsnittet om aritmetik). Men att tänka i denna form av bilder är i längden krävande för arbetsminnet och den visuella förmågan. En poäng med en strukturell algebraisk ansats i undervisningen är att komma fram till generella samband som kan tillämpas i specifika fall. För eleverna betyder det att samma resonemangsformer kan tillämpas för att hantera ett bredare spektrum av olika matematiska situationer. I e. och f. används till exempel *a/a*=1 (a får inte vara 0). I e. tillämpas *a/a*=1 på *a*=2 och *a*=3. Men man hade kunnat klara sig utan denna regel genom att tänka på 2/2 som divisionen *2 personer ska dela på 2 saker, då får de 1 sak var*. Men detta är ett arbetsminneskrävande resonemang att genomföra i huvudet varje gång. Att i stället rikta uppmärksamheten mot formen *a/a=1* skapar en mycket bättre förutsättning för progression. Det går att säga: *förenkling eller förkortning av bråk går ut på att faktorisera och hitta a/a=1*. När man då stöter på f, så gäller fortfarande samma sak: *jag måste på ett eller annat sätt faktorisera och hitta a/a=1.* I fallet f. är faktoriseringen av ett mycket mer avancerat slag än i e.[100] men det är fortfarande

[99] Notera att f. endast gäller när x inte är -2

[100] Notera att *faktorisera* används i två relaterade men olika betydelser i e. och f. I e. har man ett tal, som 24, som så att säga faktoriseras isär genom att man hittar multiplikativa komponenter. I f. har

hjälpsamt att tanken riktas mot just faktorisering (och därefter tillämpning av *a/a*=1 på *a*=*x*+2, alltså att hitta en faktor i täljaren som det finns en identisk version av i nämnaren). Allt detta är exempel på representation av aritmetikens centrala identiteter (kommutativitet, associativitet, distributivitet, inverser, neutralt element) i algebraisk form, vilket alltså är sådant man kan börja att nosa på redan i lågstadiet genom att ta stöd i konkreta material eller ikoniska representationer och jobba med dem på ett generaliserbart sätt för att eleverna på högstadiet ska vara förberedda för att använda och bevisa mer komplexa aritmetiska samband och identiteter i algebraiska form, som den distributiva identiteten *(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd* och specialfallen konjugatregeln och kvadreringsregeln.

De generella principerna som formuleras ovan är tänkta att hjälpa lärare över hela grundskolan, dvs redan från årskurs 1, att förbereda för att elever på högstadiet ska kunna, hantera av uttryck som kombinerar alla fyra aritmetiska operationerna och innehåller tal i olika representationer och icke-numeriska symboler. Att systematiskt arbeta med hur man skapar och använder likheter, snarare än bara när uttryck är lika eller hur man beräknar uttryck är ett sätt att skapa sådan flexibilitet. Sådant likhetsbaserat arbetssätt kan även användas för att hantera parentesnotationen och dess användning för att t. ex. ange att negation respektive 3· i fallen -(*a+b*) och 3·(*a+b*) ska verka på hela innehållet i parentesen,

Progressionen ovan handlar huvudsakligen om att producera likheter, och ett annat stråk som vi kort nämnt ovan är det som handlar om ekvationer. Vi beskrev hur öppna utsagor liknar ekvationer och på mellanstadiet ska arbetet med likheter och uttryck som inkluderar symboler för obekanta fördjupas. Ett steg i detta innebär att oftare arbeta med bokstavssymboler. I en öppen utsaga som 3+_=5 är den intuitiva tolkningen vad ska stå på strecket för att likheten ska stämma. En symbolrad som 8+_=_+ _+4 har ingen fastslagen tolkning och man kan tänka sig att skriva tre olika tal på de tre tomma platserna för att få likheten att stämma. Men i 8+x=x+x+4 ska den strikta tolkningen vara att om vi sätter ett värde på x, så ska alla x ha samma värde. Det är denna regel som möjliggör att kunna skriva och arbeta med avancerade ekvationer. Det är också värt att notera att andra symboler som är vanliga att använd på lågstadiet fungera på ett lite annat sätt än _ (tom rad) eller en tom ruta. Båda dessa stimulerar som sagt att direkt skriva in det tal som löser likheten (ekvationen). Som att skriva 5 på den tomma raden i 3+_=8. Det skulle se konstigt ut att skriva _=5. Men redan att använda till exempel frågetecken ligger närmare hur x eller någon annan bokstav fungerar. I 3+?=8 är det naturligt att ange svaret som ?=5.

För att poängtera att ekvationer egentligen bara är likheter finns på högstadiet formuleringen att hantera likheter på formen uttryck=uttryck genom att ersätta det ena uttrycket med ett som är lika, eller operera på hela likheten så att den bevaras. Denna mening poängterar att det finns två huvudsakliga sätt att operera på likheter

---

man ett additivt uttryck x^2–4 som man skriver om till en multiplikation. Den andra formen av faktorisering kan användas även i numeriska sammanhang som (130+1300)/13. Om man beräknar täljaren får man 1430/13 som inte är så lätt att klara i huvudet. Om man faktoriserar får men 13(10+100)/13 och kan använda *a/a*=1 på *a*=13. Men det hade också gått att dela upp hela bråket additivt och få 130/13+1300/13.

av typen ekvationer. Man kan ersätta den ena sidan med uttryck som är lika som att 3x+4-x i ekvationen 8+x=3x+4-x byts ut till 2x+4 så att hela ekvationen blir 8+x=2x+4[101]. Den andra delen av meningen ovan handlar om den mer typiskt fokuserade aspekten av ekvationslösning, när man utför samma operation på ekvationens båda sidor. I linje med sådant som beskrivits i avsnittet om aritmetik finns det en tydlig vinst att beskriva de operationer som används som tillämpning av additiv och multiplikativ invers används för att hantera linjära ekvationer och andra enkla ekvationer. Att prata i termer av additiv (att $+a-a=0$, eller att $a+(-a)=0$) och multiplikativ invers (att $a \cdot 1/a=1$ eller $a/b \cdot b/a=1$) är ett sätt att säga att man (förutom av förenklingar av ett led i taget) bara måste kunna göra två olika men relaterade saker för att hantera alla linjära ekvationer. Arbetet med ekvationslösning går ju ut på att med hjälp av tillåtna manipulationer transformera ekvationen allt närmare ett läge där det står x=en numerisk term, dvs ekvationens lösning. I ekvationen $3x=2x+1$ skulle vi ju vara klara om vi inte hade $2x$ i högerledet. Eftersom $2x$ är en additiv komponent kan vi eliminera den genom den additiva inverser $-2x$, som vi tillämpar på båda sidorna. Vi får $3x-2x=2x-2x+1$ och alltså $x=1$. Om vi har $x-5=3$ kan vi på samma sätt eliminera den additiva komponenten -5 i vänsterledet genom att i båda leden addera den additiva inversen +5. På ett symmetriskt sätt kan vi eliminera den multiplikativa komponenten 3 i $3x=6$ genom att på båda sidorna tillämpa den multiplikativa inversen $\cdot ⅓$. Eftersom den här kursplanen har ett tydligt fokus på multiplikativ bråkaritmetik redan från mellanstadiet är användandet av multiplikativ invers mycket kraftfullare än att säga att 3an i $3x$ elimineras med division med 3. Med ett inverstänk är ekvationen $⅔\, x=6$ också lätt att hantera med den multiplikativa inversen $\cdot 3/2$.

För att skapa viss möjlighet till variation inom ekvationslösningen bör också enkla kvadratiska ekvationer behandlas, vilket är rimligt då både kvadratrötter och potenser behandlas inom aritmetikområdet.

Mål och innehåll för området likhet ekvationer och uttryck i en ordnad lista:

1–2:

- Likhet och likhetstecknets användning i relationell mening genom att betrakta uppdelning av tal (5=2+3) och likhet mellan uttryck (2+3=4+1) med konkreta och ikoniska antalsmodeller samt hur dessa modeller motsvaras av symboliska uttryck som involverar likhetstecknet.

3–4:

- Likhet som utbytbarhet och hur man kan använda likheter för att skapa nya likheter.
- Likheter i form av öppna utsagor eller med andra symboler för obekanta.
- Resonemang som förklarar varför två uttryck är lika.

5–7:

- Likhet som utbytbarhet och hur man kan använda likheter för att skapa nya likheter för att förenkla eller skriva om uttryck.

[101] Att vi poängterar detta med att förenkla ena sidan beror på att forskning har visat att ekvationen där den ena sidan behöver förenklas separat är särskilt svår för elever, även när själva förenklingen i sig är lätt (Elkjaer, 2023).

- Likheter och uttryck som inkluderar symboler för obekanta.
- Likheter i algebraisk form, t. ex. för att representera aritmetiska identiteter, som kommutativa och associativa lagarna och distributiva lagen.
- Parentesnotationen och dess användning för att t. ex. ange att negation respektive 3· i fallen -(*a*+*b*) och 3·(*a*+*b*) ska verka på hela innehållet i parentesen.

8–10:

- Hantering av uttryck som kombinerar alla fyra aritmetiska operationerna, tal i olika representationer och icke-numeriska symboler
- Hantering av likheter på formen uttryck=uttryck genom att ersätta det ena uttrycket med ett som är lika eller operera på hela likheten så att den bevaras.
- Linjära ekvationer och enkla ekvationer av andra typer, t. ex. kvadratiska.
- Hur additiv och multiplikativ invers används för att hantera linjära ekvationer och andra enkla ekvationer
- Representation av aritmetikens centrala identiteter (kommutativitet, associativitet, distributivitet, inverser, neutralt element) i algebraisk form.
- Användning och bevis av aritmetiska identiteter i algebraiska form, som den distributiva identiteten *(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd* och specialfallen konjugatregeln och kvadreringsregeln.

Mönster och talföljder

Mönster har en slags upphöjd ställning inom matematiken och det finns de som beskriver själva matematiken som vetenskap och mänsklig verksamhet som *vetenskapen om abstrakta mönster.* Det är också att kunna identifiera vissa mönster för att kunna skapa användbara klassifikationer. I geometri är det exempelvis centralt att bland alla månghörningar kunna se att alla månghörningar, hur de än ser ut, har ett visst antal hörn. Därefter kan man klassificera månghörningarna efter antal hörn och leta vidare efter olika mönster av variation och likhet som finns bland exempelvis trehörningarna. Det mesta av den här blicken för mönster och vilka mönster som är värda att ta hand om och skapa matematiska begrepp är svår att undervisa specifikt. Man kan säga att förmågan att använda en sådan blick för mönster troligen tränas bäst inom specifika matematikområden som aritmetik eller geometri. Inledningen till aritmetikavsnittet i denna text tar till exempel utgångspunkt i en mönsteraktivitet som går ut på att bygga olika prickmönster av fem prickar i olika färger och sedan fokusera på ett särskilt mönster som har med helhet-del-del att göra.

Det finns dock några aspekter av mönster och relaterade begrepp som passar att ha i ett mer utpräglat mönsteravsnitt i kursplanen och medveten övning i att arbete med mönster och struktur har visat sig ha goda effekter på elevers allmänna matematikutveckling[102].

I årskurs 1 och 2 är ett skäl att starta undervisningen med mönster att det är en samtidigt kan leda till många kreativa aktiviteter och för en del kännas lite mer

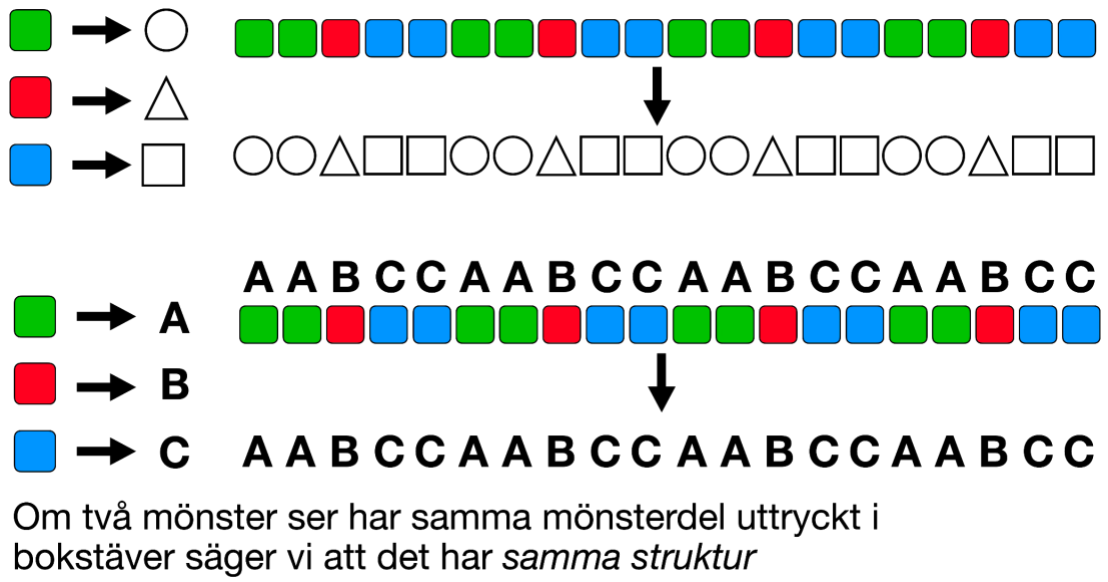
[102] Se arbete av Mulligan och flera kollegor (e.g. Mulligan m.fl., 2018; Mulligan, Oslington, m.fl., 2020; Mulligan, Woolcott, m.fl., 2020).

odramatiskt än att arbeta med tal och antal. Att bygga ett visst mönster är en lite mer personlig sak. Det finns många olika typer av mönster som man kan skapa bra aktiviteter för de första årkurserna för, men det som har valts ut som mål är geometriska upprepande mönster och växande mönster. För att ens kunna prata om sina mönster behöver man dock först vänja sig vid att klassificera och sortera objekt efter egenskaper. De objekt som avses här är typiska samlingar av föremål som kan finnas i ett klassrum, som olika slags pärlor eller mulitlink men egentligen kan det vara vad som helst där man kan ha en klass av föremål där olika egenskaper (färg, form etc.) kan identifieras och benämnas. Även ikoniska bilder av sådana föremål kan användas, men det finns ett tydligt kognitivt abstraktionssteg mellan att arbeta med konkreta föremål och bilder av föremål, inklusive digitala bilder som man som lärare måste vara medveten om. En typisk aktivitet kan vara att använda pärlor med stor variation i färg och form och be elever sortera efter någon eller några egenskaper, som till exempel färg eller form och sedan berätta om hur de har sorterat. Den förmåga man är ute efter är att kunna bestämma sig för någon viss egenskap, kunna beskriva den och kunna hålla sig till den när man sorterar. Som sagt är detta vanligen ganska odramatiska aktiviteter och just därför är de bra för att eleverna också ska vänja sig vid att berätta om sin sortering för andra och lyssna på andra och jämföra och kommentera eget och andras arbete. Detta är alltså tydligt i linje med några av de centrala undervisningsstrategierna för åk 1–2 och arbete med både sortering och mönster kan ses som en slags inskolning i matematikklassrummet. Att arbeta med upprepande mönster är en mycket bra fortsättning av detta arbete.

När arbete av detta slag följs upp i helklass kan läraren alltså skapa en tydlig riktning mot allt högre specificitet och precision i det som fokusera och i språket i sig. Inledningsvis kan eleverna ganska fritt beskriva sina mönster, sedan kan läraren i allt högre grad styra diskussionen mot att be eleverna prata om och visa sina mönsterdelar och senare fråga om de kan beskriva sitt mönster i generell form. Vad detta betyder ska nu förklaras med hjälp av en schematiskt beskriven undervisningssekvens i form av tre figurer.

Figur 34. Multilink (kan vara PostIT-lappar på tavlan, eller vilka föremål som helst) i huvudsakligen oordnad form och som ett upprepande mönster. Vad säger eleverna om saken? Fokusera efterhand diskussionen mot vad som upprepas i den högra figuren. Bygg egna mönster. Beskriv dem för andra. Ge ditt mönster till någon annan och se om den bygger vidare som du tänkte.

Figur 35. Översätt mönster från en klass av föremål till en annan, som från färger till former. Hur vet man hur man ska bygga det nya mönstret vidare? Hjälps åt att identifiera mönsterdelen, dvs den minimala unika sekvens som upprepas i hela mönstret. Hitta upplagor av mönsterdelen på några olika ställen i båda mönstren.

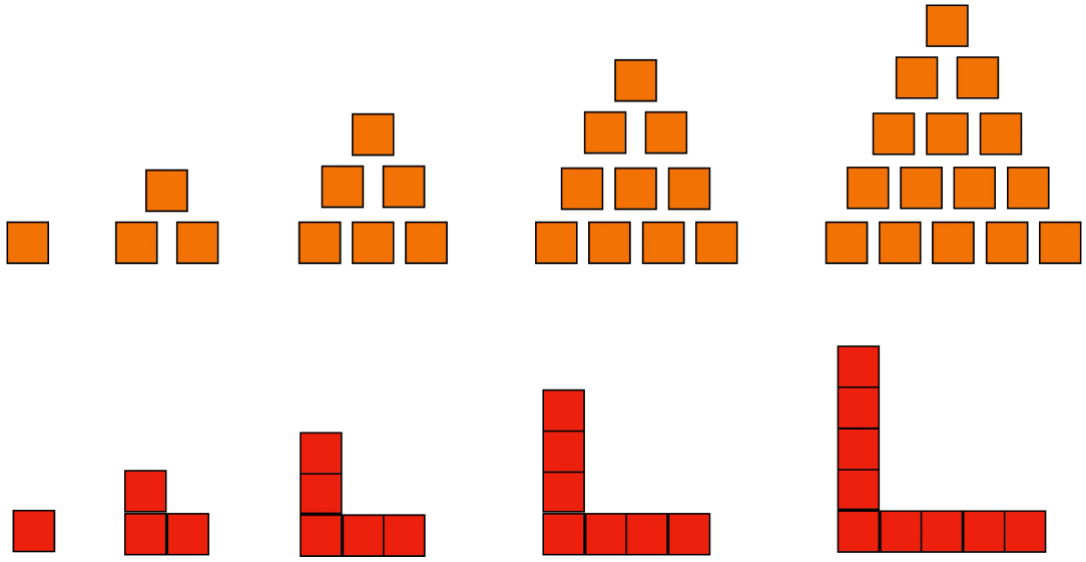


Figur 36. Begreppet struktur. Ett upprepande mönsters struktur är mönsterdelen översatt till en bokstavskombination på ett entydigt sätt. Varje förekomst av ett objekt med en viss egenskap (rund, grön etc.) översätts överallt till samma bokstav. Det första objektet i mönsterdelen översätts till A, osv.

Undervisning om de sakerna som har beskrivits ovan kan organiseras på många olika sätt och göras i många varianter. Det viktiga är att eleverna tycker att det är givande och att de aktiviteter man väljer leder till produktiva helklassdiskussioner där

man gemensamt kan hjälpa alla elever att rikta sin uppmärksamhet mot en given sak (mönsterdel t.ex.) och att utveckla sin språkliga precision samt att delta i diskussionen tillsammans med andra elever och läraren. Så småningom kan man lämna detta (och eventuellt återkomma vid några senare tillfällen) och exempelvis fortsätta med fem-mönster (se aritmetikavsnittet)[103].

Geometriska växande mönster är sedan en bra variation eller fortsättning och medan upprepande mönster kanske främst har en viktig roll i den tidigaste matematikundervisningen och matematikutvecklingen är växande mönster något som återkommer med i den senare undervisningen. Växande mönster karakteriseras ofta men inte alltid av att en viss mönsterdel på ett eller annat sätt upprepas, så övningarna med upprepande mönster förbereder elever för att arbeta med växande mönster.



Figur 37. Två olika växande mönster.

Det kan vara bra att arbeta lite med växande mönster redan i åk 1–2, men det är mest för att eleverna ska bekanta sig med att inte alla mönster är upprepande mönster. Man bör införa terminologin figur 1, figur 2 och så vidare och även skriva det på tavlan under figurerna eller representera figurnumret på andra sätt. Det är bra inledning för eleverna eftersom det gör det enklare att fokusera samtalet på den figur man vill diskutera och ställa frågor som: H*ur ser nästa figur ut? Hur ser figur 7 ut? Kan vi hitta figur 3 som en del av figur 4? Vad har tillkommit i figur 4 som inte redan fanns i figur 3?* Mönsterarbetet i åk 3–4 fortsätter sedan med växande mönster men

[103] I utvecklingsprojekt som bedrivs med detta som grund gör vi ungefär samma uppstart i åk 2 (nuvarande åk 1) som i åk 1 (nuvarande förskoleklass) och ser åk 1 som en repetition. Generellt kan mycket av undervisningen i åk 1 och 2 vara lika och genomföras med lägre krav på formalisering och i lägre tempo i åk 1 och sedan igen med lite högre krav i åk 1. När eleverna både känner igen vissa aktiviteter och har blivit ett år äldre blir både tempot och deras språkliga precision naturligt bättre. Elever som lär sig långsammare av undervisning har stor nytta av att både utmanas tidigt och att få systematisk repetition av nästan samma sak i senare årskurser.

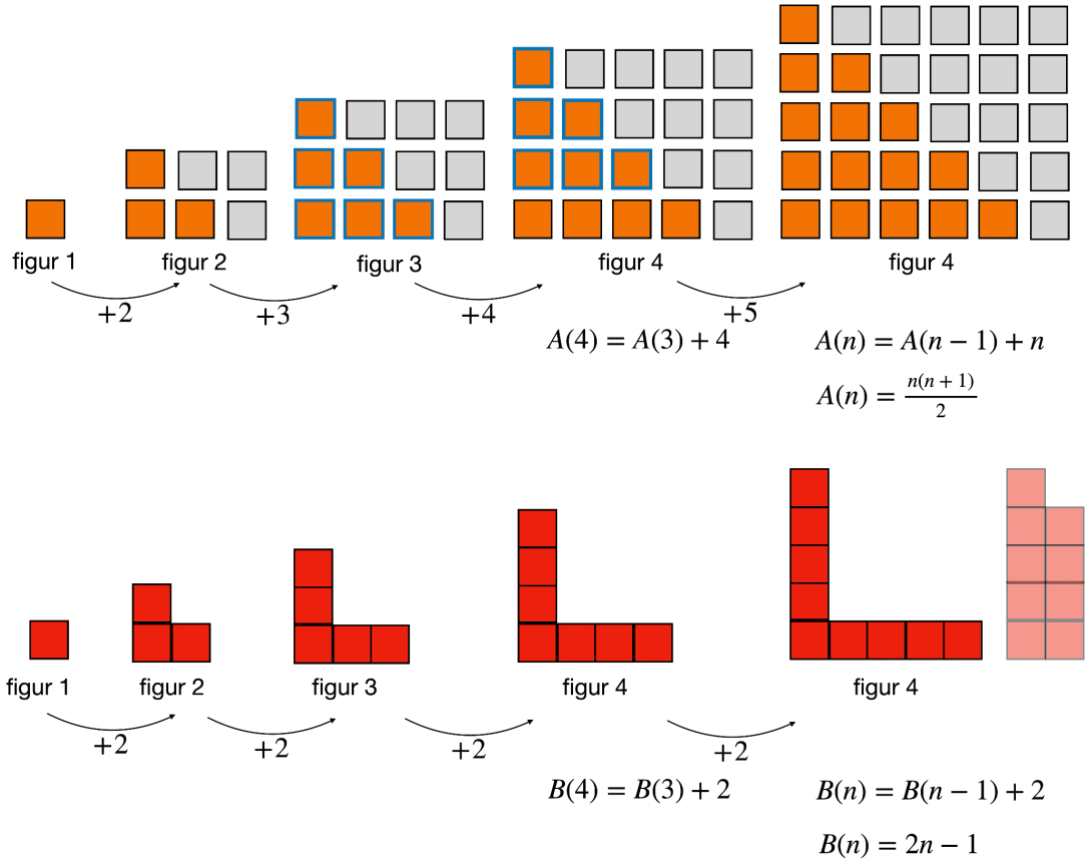
det finns inget som hindrar att man återknyter till upprepande mönster eller andra mönster. I åk 3 och kanske framför allt i åk 4 kan man också arbeta med hur *växande mönster kan representeras med aritmetiska uttryck*. Det som avses här är i förlängningen hur antalet element för en viss figur kan undersökas och beskrivas, men eleverna behöver också vänja sig vid att hitta förändringen mellan figurer, eftersom det senare kommer att vara en viktig teknik för hur man hittar antalet för en viss figur och så småningom en formel för antalet. I mellanstadiet är målet relaterat till detta formulerat som: Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt *och med en sluten formel* dvs undervisningen ska behandla tekniker för att hitta den slutna formeln, men det är inget krav att eleverna ska kunna det. I högstadiet återkommer formuleringen, men nu är hela målet av typen behärska. Som vanligt kommer dock olika elever att kunna hantera detta olika bra i betydelsen att det krävs mer kunskap för att hantera mer avancerade mönster. Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt och med en sluten formel.

En långsiktig progressionslinje genom detta är att börja med att införa figurnummer och att prata om hur en viss figur kan fås från den föregående. Detta kan sedan representeras på olika sätt, t. ex. med den pilnotation som är etablerad i aritmetikavsnittet. Därefter kan man införa en funktionsnotation för antalet, t.ex. $A(1), A(2), \ldots$ för antalet element i figur 1, 2,... Det är en bra idé att göra det i detta specifika sammanhang, för det hjälper eleverna att vänja sig vid hur funktionsnotationen fungerar, vilket är bra för senare arbete inom avsnittet Funktioner och samband[104]. Ett steg i denna utveckling är att (på mellanstadiet eller högstadiet) införa variabeln *n* för den *n*:te figuren. Det som benämns rekursiv representation kan med funktionsnotationen skrivas som till exempel $A(4) = A(3) + 4$ för de orange figurerna i Figur 37. Man kan observera att båda fyrorna i $A(4) = A(3) + 4$ faktiskt är figurnumret, för att varje triangel består av föregående triangel plus en ny nedersta rad som har lika många element som figurnumret. Så $A(5) = A(4) + 5$, och så vidare. När man har inför variabeln *n* kan man uttrycka detta generellt som $A(n) = A(n-1) + n$ vilket är en generell version av en rekursiv formel. Om vi låter antalet element i figur n i den röda följden i Figur 37 ges av $B(n)$ kan vi se att en rekursiv formel är $B(n) = B(n-1) + 2$, dvs den ökar lika mycket hela tiden, vilket kallas att den ökar linjärt. För sådana följder finns det standardtekniker för att hitta en formel för *A(n)* som är en funktion av *n* och inte innehåller $A(n-1)$. Detta kallas en sluten formel. För följder som den orange i Figur 37 och 261 behöver man tillgripa andra tekniker. Det är inte att betrakta som standardkunskap i grundskolan (mer exakt högstadiet) att kunna göra det man det kan ändå vara intressant att behandla några sådana tekniker och använda sådana uppgifter i problemlösningssammanhang. Figur 38 visar ett sätt att hitta en sluten formel.

Ofta kan man ur själva sekvensen av antal (1, 3, 5, 7… för den röda följden) också gissa sig till först vad skillnaden mellan konsekutiva tal är (2) och därefter hitta den generella (slutna) formeln för det n:te talet i följden. Detta är också en viktig teknik att kunna. Men när ursprunget är en följd av geometriska figurer ska man också kunna ur figurkonstruktionen kunna beskriva varför ökningen mellan två konsekutiva figurer

[104] Det är också vanligt att i sammanhang som dessa använda index för figurnumret, dvs $A_1, A_2, \ldots$ Det är bra att eleverna även har sett den notationen. En fördel med att använda *A*(*n*), *F*(*n*), eller liknande är som sagt att det kan ge en bra ingång till att använda funktionsnotationen i andra sammanhang.

är konstant och vad den är. Man kan alltså säga att arbetet med talföljder i allmänhet är relaterat men inte riktigt samma sak som arbetet med växande följder av geometriska figurer.



Figur 38. Överst en orange följd av triangeltal, jämfört med Figur 37 har vi av skäl som snart avslöjas byggt om trianglarna till rätvinklig i stället för toppig form. I figur 4 är några kvadrater markerade med blå ram. Dessa är identiska med figur 3. Man kan se att varje ny triangel är konstruerad av föregående på detta sätt och att de nya elementen i figur n är n till antalet. För figur 2 och uppåt har den orange triangeln roterats 180 grader och bildar då tillsammans med det orange originalet en rektangelform. I det allmänna fallet har den n rader och n+1 kolumner för figur 1 och består alltså av 2 identiska trianglar som figur n. Därför ges A(n) av A(n)=n(n+1)/2. Den röda följden har konstant ökning. Den slutna formeln måste ha en term 2n. För att det ska stämma med första figuren måste vi ha B(n)=2n-1. I den extra figuren längst till höger med svagare röd färg har den utstickande delen av den vertikala delen av figuren ställts ut. Då kan man direkt se att B(n)=2n-1. Ibland kan sådana tekniker vara via att först hitta ökningen mellan varje figur, men geometriska manipulationer kräver mer kreativitet, medan den andra tekniken går till på ungefär samma sätt alltid.

Termen *talserier* betyder i det här sammanhanget att elementen i en talföljd summeras. Både ska behandlas på mellanstadiet, utan att det ställs särskilda krav på att några speciella tekniker behärskas. På högstadiet är ska talföljder och talserier behärskas. Ett rimligt krav är att man för några enkla talföljder av kan ta fram en formel för det n:te elementet och använda beteckningar som *f(n)* eller a_n för att beskriva det n:te elementet som en funktion av *n*. För talserier är det lämpligt att kunna känna igen serier där ökningen mellan konsekutiva termer är konstant och för sådana serier kunna beräkna summan av de *n* första termerna. Det är alltså nödvändigt att arbeta med formeln för sådana serier.

Mål och innehåll för området mönster och talföljder i en ordnad lista:

1–2:

- Sortering av objekt efter egenskaper.
- Mönster, framför allt geometriska upprepande mönster *och växande mönster.* Begreppet mönsterdel och hur upprepande mönster kan representeras i generell form.

3–4:

- Växande mönster *och hur de kan representeras med aritmetiska uttryck.*

5–7:

- Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt *och med en sluten formel*
- *Talföljder och talserier.*

8–10:

- Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt och med en sluten formel.
- Talföljder och talserier.

Funktioner och samband

Det här området har bytt namn från samband och förändring till funktioner och samband, mest för att funktioner och samband båda är matematiska begrepp, medan förändring snarare är ett allmänt fenomen som kan matematiseras (t.ex. med hjälp av att beskrivas som funktioner eller samband). Samband och förändring är inte alltid ett eget område i andra länders kursplaner. Ibland är det en del av algebran. Forskningslitteraturen om algebra och tidiga algebra tar sig i allmänhet också an funktioner och samband som ett delområde[105]. Det ter sig möjligen naturligt eftersom funktioner och samband på det formella planet typiskt använder sig av variabler, som tex *x* och *y*, vilket ju också förekommer i algebran. Det finns dock viktiga skillnader vilken mening symbolen x har olika tillämpningar. Ibland är *x* en variabel, dvs man tänker sig att *x* samtidigt antar alla värden eller undersöker vissa värden på *x* som man är särskilt intresserad av. Ibland är *x* ett okänt värde, som när man ska lösa en ekvation. Ibland är *x* snarare en slags platshållare för möjliga tal eller andra objekt, som i identiteten $x/x=1$. i relation till funktioner och samband är *x* (eller andra symboler) typiskt variabler, som alltså kan anta olika värden.

Det val som har gjorts är att dela upp området funktioner och samband i två delar, där det första tar hand om området på ett generellt plan och det andra fokuserar på en särskild klass av samband, nämligen proportionella samband. Det finns tre skäl att bland alla möjliga specifika klasser av samband som skulle kunna studeras just välja ut proportionella samband. Proportionella samband är väldigt viktiga för att de förekommer i många tillämpningar; proportionella samband bildar grund för flera viktiga begrepp i andra delar av matematiken; och proportionella samband är ett område för vilket man kan beskriva tydliga undervisningsprogressioner som binder ihop många delar av matematiken. Det sista skälet handlar alltså att man genom att låta proportionella samband vara ett utvalt stråk i undervisningen kan skapa ett slags sammanhållande kitt mellan olika delar av matematiken som annars lätt kan uppfattas som åtskilda.

Variabler och representation av variation och samvariation

I årskurs 1–2 är matematikundervisningen huvudsakliga fokus tal och additiva strukturer. Som det har beskrivits i avsnittet Additiva strukturer är en viktig aspekt att utifrån en additiv situation, till exempel beskriven i en textuppgift eller någon berättelse, kunna skriva ned ett aritmetiskt uttryck. Ibland är sådana utsagor av typen saknat värde, som till exempel: Du har 5 kulor och vinner några så att du sen har 8, hur många kulor vann du? Utsagan beskriver i sin enklaste form en addition (av typen lägga till), men det som läggs till är okänt och det aritmetiska uttryck som ligger närmast till hands är 5+_=8. Figur 7, Figur 8 och Figur 9 beskriver olika ickesymboliska representationer av situationen, men utifrån en progression i området funktioner och samband är den additiva öppna utsagan 5+_=8 mer intressant. Redan med utgångspunkt i detta uttryck kan vi skapa en progression hela vägen mot årskurs 10. För det första, det som motsvarar det sökta, eller okända, värdet i 5+_=8 är representerat av en tom rad. Det är för övrigt önskvärt att ha med denna symbol även om man hade skrivit beräkningsuttrycket 8–5=_ eftersom denna notation leder

[105] (Kieran, 1994; Kieran m.fl., 2016)

mot att tänka på likheter som ekvationer och senare som funktioner. En annan representation som vi också redan har sett i aritmetikavsnittet är att använda symbolen ? dvs skriva 5+?=8. Både tom rad och ? leder tanken till att det är något som saknas som vi ska hitta eller något som vi undrar så på detta sätt är symbolerna lika. Men när eleverna själva skriver 5+_=8, så stimulerar den tomma raden att man helt enkelt funderar ut svaret och skriver det på raden. Nackdelen med det är att någon annan (och kanske inte heller en själv) kan se hur lösningen kom till eftersom det som motsvarar en ekvation med en okänd nu inte längre har någon representation av de okända. Den lilla med viktiga variationen i att istället skriva 5+?=8 gör att det inte finns någon plats att i likheten skriva svaret, dvs den okända mängden vunna kulor. Istället får man då skriva ?=3. Detta gör att användningen av symbolen ? stimulerar hanteringen av likheter med ett okänt eller saknat värde att bli mer lik den framtida önskvärda hanteringen av ekvationer. För årskurserna 3–4 är målet att eleverna ska kunna skapa aritmetiska uttryck (med eller utan variabler eller obekanta i form av bokstavssymboler) som representerar matematiska situationer. Här utvidgas alltså målet till att gälla matematiska situationer i allmänhet, vilket kan vara multiplikativa situationer, men i princip även situationer eller andra fenomen från geometri och mätning eller statistik och sannolikhet. Ett annat viktigt tillägg i linje med vår tidigare diskussion är också att använda obekanta i form av bokstavssymboler. Vad skiljer att använda x från att använda ? eller _ (tom rad)? För situationen *Du har några gula och några röda kulor och 8 tillsammans* skulle man kunna skriva uttrycket ?+?=8 eller _+_=8. Det finns inga etablerade regler för de informella symbolerna _ (tom rad) och ? som säger att det ena frågetecknet kan står för 3 och det andra för 5. Men när man skriver x+x=8 så ska det alltid betyda att x i båda instanserna ska betyda samma värde. Om det inte hade varit fallet hade vi till exempel inte kunna skriva om x+x till 2x, och inte överhuvudtaget kunna hantera x i aritmetiska eller algebraiska sammanhang som om det var ett tal. Detta är alltså ett viktigt principiellt skäl till att använda bokstavssymboler och introducera regeln att en viss bokstav i ett visst uttryck alltid står för samma tal. Om man vill representera *Du har några gula och några röda kulor och 8 tillsammans* får man helt enkelt använda två olika bokstäver, som $x+y=8$. Notera att det är tillåtet att $x=y=4$. Likheten $x+x=8$ skulle kunna stå för situationen *Du har några gula kulor och lika många röda och 8 tillsammans.* Likheten $x+y=8$ är intressant för att den kan ta oss från ekvationer eller likheter som modeller av en situation till funktioner. Givet villkoret *Det finns 8 kulor, x gula och y röda* kan ju x variera och för varje val av x finns det ett bestämt y som måste gälla. Detta ligger väldigt nära definitionen av en funktion och det viktiga fenomenet samvariation finns representerat i uttrycket, för när x varierar måste ju y variera på ett slags kompenserande sätt. Att termen samvariation finns representerad i detta områdes rubrik är just för att det är något som kan studeras redan innan man pratar om funktioner och något som kan gälla även för samband som inte är funktioner. Om vi skriver om uttrycket till $y=8-x$ har vi en klassisk funktionsrepresentation. Det är naturligtvis meningen att man ska arbeta med många olika situationer och motsvarande uttryck, ekvationer och funktioner, men här har vi alltså med en mycket enkel situation som grund tagit oss från den mest rudimentära typen av aritmetisk representation till målet för åk 5–7: att skapa uttryck, ekvationer och funktioner med variabler som representerar matematiska situationer. Vi kan för övrigt modifiera vår situation till *det finns x dl gul saft och y dl röd saft och totalt är det 8 dl saft, om vi vill att vårt uttryck y=8-x inte ska vara begränsat till att x*

och y måste vara ickenegativa heltal. Det som återstår i just detta progressionsspår för att nå högstadiets nivå är funktionsnotationen *f(x).* För att från $y=8-x$ komma till $f(x)=8-x$ behöver man ju bara formellt byta y mot $f(x)$, men för att detta steg ska ha mening är det en stor mängd konceptuella saker som behöver vara på plats. Att $y=f(x)$ ska ses som en funktion av x handlar om att det för varje tillåtet värde som x kan anta finns exakt ett bestämt värde på f(x). Det är erkänt svårt att fullt ut greppa principerna för en funktion, men det är antagligen bra att i många konkreta fall vänja sig vid att använda funktionsnotationen för att beskriva samvariation. Om man t.ex. arbetar med rektanglar area i geometrin kan man beskriva arean för en rektangel med bredden 6 och höjden x som $A(x)=6x$, och för omkretsen av samma rektangel $O(x)=6+6+x+x=12+2x$. Det finns många andra exempel där funktionsnotationen kan införas och användas.

Ett ytterligare progressionsspår inom detta område handlar om koordinatsystem. Det finns två huvudsakliga associerade men delvis olika tolkningar. Ur ett geometriskt perspektiv kan ett koordinatsystem ses som ett system för att ange en position helt oberoende av andra referenser än till koordinatsystemet självt. Det här är en tillämpning av koordinatsystem som ligger nära geometrin (och som också ofta blir aktuellt i enkla programmeringsövningar när man till exempel styr en figur eller ska rita ett visst objekt på en viss plats). I den här meningen kan man se ett koordinatsystem som två korslagda tallinjer med 90 grader mellan där man ofta kallar den horisontella för x-axel och den vertikala för y-axel. Eftersom denna kursplan har ett tydligt fokus på tallinjer bör elever vara relativt väl förberedda för att så småningom hantera även koordinatsystem i formell mening. Den aspekt av koordinatsystem som målen här främst handlar om är mer kopplade till grafer och andra sätt att representera data med hjälp av koordinatsystem. En svårighet med koordinatsystem (jämfört med vissa av de relativt likartade representationerna som berörs i statistikområdet) är att det krävs en slags teknisk kompetens för att sätta in punkter på rätt plats och läsa av dem. Ett sätt att inleda undervisningen om *grafer och tabeller* kan vara att först arbeta med *konkreta tidsberoende fenomen som växande växter som kan representeras i naturlig skala på y-axeln.* Om en växt växer i en kruka kan man använda ett kartongblad med hack i och flytta arket åt vänster varje dag (varannan, var tredje etc.) och varje gång notera växtens höjd på papperet[106]. Detta ger en mycket direkt avbildning av hur höjden förändrar sig över tid, utan att det ställer tekniska krav på mätning eller på själva koordinatsystemet. Motsvarande mål finns identiskt i åk 3–4. Just växtexperimentet tar ju lång tid och kan genomföras parallellt med annan undervisning. Med lite olika fokus olika år när eleverna är lite mer vana går det också att med hjälp av ett koordinatsystem föra bok över andra tidsberoende fenomen, som t. ex. dagens temperatur eller hur många elever som är på plats och så vidare. Med rimlig förberedelse från lågstadiets undervisning sedan behandla koordinatsystem mer formellt, men fortfarande med fokus på att skapa olika grafer och tolka grafer i koordinatsystem som någon annan har producerat. Vi har ju redan tidigare berört funktionsnotationen f(x) som ett sätt att uttrycka samband och så snart man har ett sådant samband kan man också studera hur funktioner kan representeras i koordinatsystem.

[106] För en utförligare förklaring, se Helenius (2012).

En annan ny, eller i alla fall mer specificerad punkt är likhet mellan funktioner. Likhet mellan funktioner blir ett nytt begrepp för eleverna. I en ekvation som $2x+3=x+5$ kan ju både högerled och vänsterled ses som funktioner av x, och eleverna är ju då vana att lösa ekvationen och får fram (i det här fallet ett) x som gör likheten sann, dvs löser ekvationen. Men om likheten $2x+3=x+5$ betraktas som en likhet mellan funktioner så är den falsk, för två funktioner är lika när de är lika för alla x. För linjära funktioner är likhet mellan funktioner ett lätthanterat problem, för två linjära funktioner är lika precis när de har lika koefficienter. Men det finns andra fall att studera, som om funktionerna $f(x)= x$ och $g(x)=\sqrt{x^2}$ lika. Svaret beror ju på om man studerar funktionen endast för positiva x eller för alla x. Likhet mellan funktioner behöver inte vara något stort område, men det är bra att ha med för att de utvidgar eleverna uppfattning om hur funktioner fungerar.

Ett nytt mål är att också behandla *kurvor i koordinatsystem och vilka kurvor som kan vara funktionsgrafer f(x).* Det är kategoriserat som behandla, bland annat för att om man slår fast. ex.akt vilka kurvor som ska studeras, som cirkel eller ellipsen blir det lätt en oönskad höjning av svårighetsgraden. En fördel med att ändå behandla andra kurvor är att man då kan använda detta till att undersöka villkoren för när en kurva skulle kunna vara en funktionsgraf. Det här är ett sätt att närma sig de krav som ställs för att ett visst samband mellan x och y ska kunna vara en funktion. Eftersom både exponenter och rötter ingår i högstadiet matematik skulle det till exempel gå att studera sambandet $x^2+y^2=1$ som i grafisk form är cirkeln och undersöka vilka delar av cirkel som kan skrivas som $y=f(x)$ och kanske vilka som kan skrivas som $x=f(y)$. Att arbete med sådan skulle kunna erbjuda en bra variation till att arbete med linjära funktioner och därmed undvika att elever tror att funktioner i allmänhet är linjära.

Notera att det också finns mål under Tekniska hjälpmedel som berör den digitala sidan av att producera och tolka funktionsgrafer. Det sista målet handlar om *Linjära funktioner och notationen y=kx+m och kopplingar till räta linjer i koordinatsystem.*

Mål och innehåll för området variabler och representation av variation och samvariation i en ordnad lista:

1–2:

- Skapa aritmetiska uttryck som representerar additiva situationer, inklusive som öppna utsagor av typen 5+_=8 och 5+?=8.
- *Göra grafer och tabeller över konkreta tidsberoende fenomen som växande växter som kan representeras i naturlig skala på y-axeln.*

3–4:

- Skapa aritmetiska uttryck (med eller utan variabler eller obekanta i form av bokstavssymboler) som representerar matematiska situationer.
- *Skapa och tolka grafer och tabeller över konkreta tidsberoende fenomen som växande växter som kan representeras i naturlig skala på y-axeln.*

5–7:

- Skapa och tolka uttryck, ekvationer och funktioner med variabler som representerar matematiska situationer.
- Skapa och tolka grafer i koordinatsystem.

8–10:

- Funktionsnotationen f(x) och hur den kan representeras i koordinatsystem.
- Likhet mellan funktioner.
- *Linjära funktioner och notationen y=kx+m och kopplingar till räta linjer i koordinatsystem.*
- *Kurvor i koordinatsystem och vilka kurvor som är kan vara funktionsgrafer f(x).*

Proportionella samband

Redan i de inledande delarna i avsnittet Multiplikativa struktur under området Aritmetik beskrivs det hur intuitivt proportionellt tänkande är en grund för multiplikativt tänkande. De schematiska bilderna som presenterades (Figur 15) där kan ses som ordnande principer för stora delar av området proportionella samband. Punkten som beskriver att ett undervisningsinnehåll i årskurserna 1-2 ska vara enkla proportionella resonemang som bygger på barns intuition för att dela lika, fördubbla och halvera mängder och objekt samt skalning med naturliga tal är alltså nära associerat med de mål som beskrivits för Mulitiplikativa strukturer för åk 1-2. Även i årskurs 3-4 är målet att känna igen och kunna representera proportionella samband i tabellform samt med en multiplikationsoperator, som dubbelt-hälften, trippelt-tredjedel nära associerat med motsvarande mål i området multiplikativa strukturer. Det gäller särskilt hur multiplikation kan ses som en operator som exempelvis skalar saker till det dubbla (·2) eller gör det motsatta och halverar saker (·1/2) (se Figur 24). I målet nämns också tabellform (ibland kallat tilde-tabell[107] efter tecknet ~ (tilde) som ofta används för att betrakta att två saker ska ses som proportionella). Tildetabeller bygger på följande. Antag att du har två kvantiteter som är proportionella, Säg t.ex. att du köper godis för ett visst pris i kronor per hekto (hg). Då finns en proportionell relation mellan antalet hg godis du får för ett visst antal kronor och omvänt hur många kronor ett visst antal hg kostar.

För att göra uppgiften lite komplex (men möjligen lite orealistisk), säg att vi vet att 2 hg kostar 50 kronor och undrar vad 7 hg kostar. Vi kan skapa tabellen i Figur 39.

[107] Tecknet tilde används ofta för likformighet i geometrin, som en typ av proportionalitet och i vissa länder också mer generellt för proportionalitet. Det är väldigt praktiskt att ha ett tecken för att säga att två kvantiteter ska betraktas ha ett proportionellt samband, som 2 hg ~ 50kr i vårt. exempel.

hg godis	Pris kr
2	50
20	500
10	250
5	125
7	175

$\cdot 10$

$\cdot \frac{1}{2}$

$\cdot \frac{1}{2}$

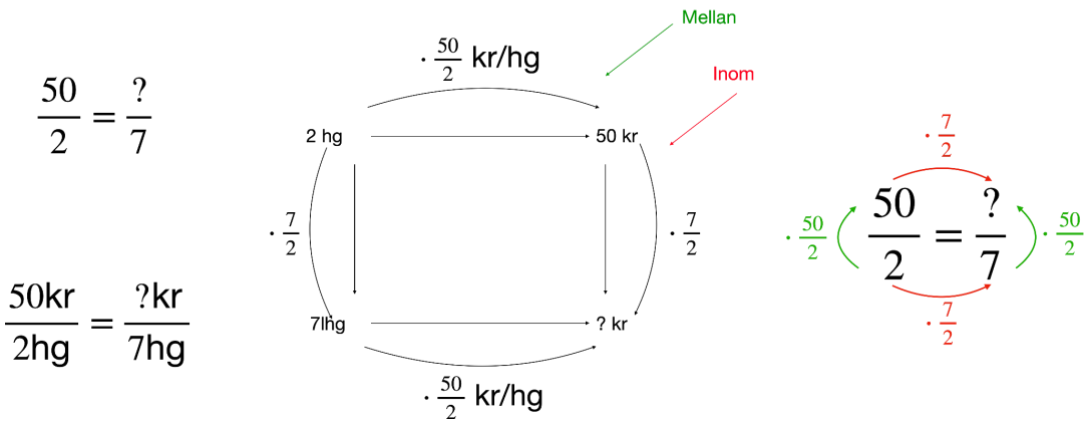
$+$

$+$

Figur 39. En tilde-tabell. Ett villkor som gör att två kvantiteter är proportionella mot varandra har presenterats, *t.ex.* att en viss mängd godis har ett visst pris. Vi får veta en instans, som att 2 hg kostar 50 kr. Via intuition för proportioner blir det klart att dubbelt så mycket godis kostar dubbelt så mycket osv. Men också att om vi via skalning kommer fram till att mängden *a* kostar priset *b* och mängden *c* kostar priset *d* så måste mängden *a+c* kosta priset *b+d*. På ett teoretiskt plan är detta villkor för linjäritet. Men det viktiga är snarare att även unga elever i allmänhet mycket snabbt plockar upp denna princip via sin intuition. Så för att lösa uppgiften: Vi provar att tiodubbla (både hg och kr). Det blir för mycket, så vi halvar. Det blir också för mycket så vi halvar igen. Nu är det för lite (5 hg), men om vi adderar med rad ett är vi klara. Metoden är ingen algoritm, dvs det är inte från början klart hur man ska skala och addera för att komma till det man vill ha, men metoden är praktisk och intuitiv och en bra övning i att administrera proportionellt resonemang.

En direkt metod hade varit att dela med 2 för att få veta vad 1 hg kostar och sedan multiplicera med 7. Det kallas vägen över 1, och är också en relativt intuitiv och bra metod, som dock inte ger lika bra övning i proportionella resonemang som tildetabellen. Dessutom, ett skäl till att vägen över 1 är så lätt att tillgripa för elever, är att det är lätt att tänka sig just 1 hg, och sedan att flera hekto kan fås genom olika många kopior av detta hekto, och sedan samma sak på pengasidan. Det här är exakt det tänket som presenterades redan i Figur 15. Men detta är inte riktigt samma sak som att tänka att det finns ett visst tal - priset per hekto - som kan multipliceras med vilket kvantitet hg som helst och då ger priset för denna kvantitet. Så även om vägen över 1 är en viktig strategi behöver man också arbeta med skalningsoperatorer. I själva verket har grunderna till hantering av proportionella situationer med skalningsoperator redan introducerats på lågstadiet, se Figur 25 i multiplikativa strukturer. I uppgiften ovan kan vi ju direkt identifiera att vi vet var 2 hg kostar men söker kostnaden för 7 hg. Men det kan vi ju ta redan på om vi vet vad vi ska multiplicera 2 med för att få 7, för då får vi svaret genom att multiplicera 50 med denna faktor. I enlighet med resonemanget i Figur 25 ges denna faktor av 7/2. Så svaret ges av 50·7/2.

2 hg kostar 50 kr, vad kostar 7 hg?



Figur 40. Olika representationer av frågan Vad kostar 7 hg godis om 2hg kostar 50 kr? Till vänster, frågan kan ställas upp som bråk, med eller utan enheter. Som vi redan har beskrivit i det inledande exemplet om multiplikation (Figur 15) kan man hantera enheterna ungefär som om de var variabler dvs kvoten 50kr delat på 2 hg ger 50/2 kr/hg. Uppgiften kan alltså genom att representeras som en likhet mellan två förhållanden lösas som en ekvation. Även om detta matematisk verkar vara ett enkelt och generellt sätt, har det visat sig att många elever har svårt att skriva upp rätt ekvation eller gör fel när de löser den. Den skalningsbaserade modellen i mitten är, fast den ser krånglig ut på bild mer intuitiv och kopplad till elevers grundläggande förståelse för proportioner. Till höger en illustration av att de skalningsfaktorer vi har identifierat i diagrammet också finns som relationer inom och mellan bråken. Notera att eftersom kvoterna som har ställts upp representerar sammansatta enheter, motsvarar relationerna inom bråken relationerna mellan enheter i diagrammet.

Det är alltså viktigt att elever lära sig att flexibelt hantera proportionella situationer genom att till exempel använda tabellform (tilde-tabell), vägen över 1, eller skalningsoperator och förstår hur dessa tre hänger ihop. Det exempel som vi har använt innehåller sammansatta enheter vilket brukar anses vara en komplicerad historia, men eftersom det finns många exempel som de flesta eleverna kan ha en god vardagsintuition för är ändå lämplig att använda mycket tidigt och genom hela skolan för att utveckla elevernas förmåga att hantera proportionella situationer. Det finns dock situationer av andra slag, som inte på samma naturliga sätt leder mot att tänka i kvoter eller förhållanden. Betrakta följande uppgift

> Kim och Robin går längs en mur. Kim behöver 40 steg för att passera muren och Robin 30 steg. Robins steg är 80cm långa. Hur långa är Kims steg?

Detta är också en proportionell situation, men den leder inte lika naturligt till en likhet mellan förhållanden. I stället kan man tänka sig att det finns en okänd med specifik murlängd som för Robin kan tecknas som 30·80. Men i Kims fall ges då samma

murlängd av 40·?, eller om man vill 40·x. Detta ger likheten 30·80=40·x, dvs en likhet mellan produkter istället för som tidigare mellan kvoter eller förhållanden. På det matematiska planet är det så två bråk, förhållanden eller kvoter lika, $a/b=c/d$, exakt när $ad=cb$ (b och d får inte vara 0) så egentligen går det alltid att skriva en proportionell situation både som en likhet mellan förhållanden eller som en likhet mellan två produkter. Men olika proportionella situationer leder alltså mer eller mindre naturligt till någon av de två representationerna. Därför behöver elever flexibelt kunna använda båda representationerna $a/b=c/d$ och $ac=db$ för att uttrycka proportionella samband, men på högstadiet tillkommer också funktionsnotationen $y=kx$ och $f(x)=kx$ och eleverna behöver förstå hur alla dessa hänger samman. Fastän proportionella situationer som har att göra med sammansatta enheter betraktas som svåra, är det antagligen sådana som är bäst att använda för att introducera funktionsnotationen. Genom att använda skalningsoperatorn i vårt standardexempel med godis kan vi ju se att en viss mängd godis, x hg, kommer att kosta 25 kr/hg · x hg. Om vi kallar kostnaden för y kommer vi ha att y=25x.

Detta är inte bara ett annorlunda men relaterat tänk utan också ett ganska stort steg i formaliseringsgrad och ett införande av nya representationsformer. Men elever bör ju vid det här laget (se avsnittet ovan) ha vant sig vid både funktionsnotationen och koordinatsystem, därför är det också rimligt att de ska kunna hantera proportionella samband i koordinatsystem hur de kan konstrueras och läsas av.

Överlag kan man säga att lågstadiets behandling av multiplikativa strukturer förbereder för den typ av multiplikativt tänkande som behövs för att kunna resonera flexibelt om proportionella situationer. Att arbeta på många olika sätt med proportionella situationer är också ett sätt att fördjupa kunskaperna om till exempel bråk (och kvoter, förhållanden, divisioner), genom att bråkutryckens inneboende multiplikativa relationer görs explicita och kopplas till konkreta sammanhang där de inte bara anger andelar. Målen och innehållet i denna sektion handlar om att identifiera och representera proportionella samband, inklusive i standardfall som hastigheter, kilopriser, geometrisk likformighet. För att uppnå detta behöver alltså eleverna arbeta med många olika uppgifter från många områden av matematiken (som geometri, sannolikhet osv) som bygger på proportionalitet och se att samma resonemang kan användas för att hantera uppgifter från många olika delar av matematiken, men också samtidigt arbete med uppgifter där vissa representerar proportionella situationer, men andra inte gör det. Det är annars lätt att eleverna övergeneraliserar och tillämpar proportionella metoder på situationer som inte är proportionella[108].

Proportionella samband kan representeras på olika sätt, till exempel med ord, bilder, algebraiskt, med grafer eller i tabeller. Generellt gäller att begreppsförståelse och kopplingar mellan begrepp växer av att eleverna har tillgång till flera representationer för att hantera olika situationer. Dessutom förbättras elevernas förmåga att se samband mellan problem som är baserade på samma matematiska idé, så att de exempelvis kan lära sig se att problem med saknade värden som handlar om

[108] (Dooren m.fl., 2010; Shield & Dole, 2008; Van Dooren m.fl., 2005)

likformighet, proportionella funktioner och hastighetsproblem kan illustreras med olika representationer men hanteras med samma matematiska idé eller metod/verktyg.

Ett ytterligare mål i mellanstadiet handlar om en särskild klass av proportionella situationer: de som är baserade på andelar och förhållanden. I typisk undervisning är det som bekant vanligt att andelar och mer exakt del-helhetsbegreppet används för att definiera bråk, men i den här framställningen har bråk först och introducerats som ett tal (på tallinjen) och sedan också som en operator där *a/b* är det tal *b* ska multipliceras med för att få *a*[109].

I området Multiplikativa strukturer i mellanstadiets Aritmetik finns ett mål som handlar om olika tolkningar av bråkformen. Där nämns bland annat att bråk kan ses som andelar och förhållanden och att eleverna ska kunna omvandla mellan bråk-, decimal- och procentform, och här är det omvända; att andelar och förhållanden kan anges i bråkform, decimalform och procentform samt även som en tabell. Avsikten med denna koppling är att eleverna samtidigt ska kunna använda bekanta och intuitiva proportionella situationer för att ge bråkbegreppet mening, men också att den aritmetiska kompetensen att hantera bråk ska underlätta hanteringen av proportionella situationer inklusive sådana som baseras på andelar. I den här texten har inte procent haft någon prominent plats. Det är för att förhoppningen är att uppgifter som är formulerade med procentbegreppet helt enkelt ska hanteras som vilka andelsuppgifter som helst. Betrakta t.ex. uppgifterna: *10% av lotterna i ett lotteri var vinstlotter. Det fanns 450 nitlotter. Hur många lotter fanns det totalt?* eller *Med 10% rabatt kostade tröjan 450 kronor. Vad kostade den utan rabatt?* I båda fallen kan vi avläsa att 90% motsvarar 450, dvs 90%~450. Vi vill i båda fallen veta vad 100% motsvarar. Men enligt våra resonemang om multiplikationsoperatorer gäller att 90%·100/90=100%, så vi behöver bara skala 450 med 100/90 för att få svaret. Alla andra tekniker som vi har presenterat för att hantera proportionella situationer funkar lika bra så snart uppgiften har tolkats som 90%~450.

Det finns ett viktigt krux med sammansatta enheter som undervisningen måste behandla för att eleverna ska kunna hantera sammansatta enheter som kr/kilo eller kilometer/timma på ett tillförlitligt sätt. Betrakta uppgifterna.

> A. Du cyklar 0,5h i 20km/h och 0,5h i 10km/h. Vad blir medelhastigheten för hela turen?
>
> B. Du cyklar 5 km i 20km/h och 5 km i 10 km/h. Vad blir medelhastigheten för hela turen?

I Uppgift A kommer medelhastigheterna bli (det aritmetiska) medelvärdet av hastigheterna men inte i uppgift B. Skälet till detta är en subtil detalj som har med linjäritet att göra. I A kan vi se att vi förflyttar oss 10+5km totalt på 1h, dvs medelhastigheten för hela turen är 15/1=15 km/h. Alltså medelvärdet av hastigheterna. I B är den totala sträckan 5+5=10 km. Men tiden för första delen är

[109] Den framställningen som presenterade i Multiplikativa strukturer är inte tvingande utan ett exempel. Det finns ett särskilt mål som beskriver att bråk ska kopplas till tallinjen, men det är naturligtvis möjligt att också koppla bråk till del-helhet.

0,25h och för andra 0,5h, dvs totalt är det 10km på 0,75=3/4 h så hastigheten är 10/(¾) vilket är ca 13.3km/h.

Samma typ av uppgifter går att formulera med andra sammansatta enheter som exempelvis kr/kg och det är typiskt en uppgift som många elever ändå upp på gymnasiet misslyckas med. Den har också praktiska tillämpningar, för man kan säga att det fenomen som uppmärksammas här är det som gör att det är svårt att hålla en hög medelhastighet när man kör bil. Även om man bara fick köra sakta en kort sträcka (kanske bakom en traktor) så tog ju den sträckan relativt sett lång tid[110].

Ett typiskt problem (från ett gammalt nationellt prov på gymnasiets kurs 1b) är:

> *I en saltvattenslösning med vikten 300g är 12% salt. Hur många gram vatten ska tillsättas för att lösningen ska innehålla 8% salt?*

Detta kan först se ut som en typisk proportionell situation av saknat värde-typ. Men i det här fallet (och många andra fall) måste det till en förberedande analys. Om vi häller i mer vatten kommer ju inte mängden salt ändras, så vi måste ta redan på mängden salt i den första lösningen. 12%·300=12·3=36g (om man minns att % är 1/100 och kan sin bråkräkning). Vi vill nu att 36g ska motsvara 8%. Det är först nu vi har en proportionell situation som vi vid det här laget vill att eleverna ska kunna hantera på en mängd sätt. Det mest direkta sättet är att tänka: vi vet vad 8% är men vill skala detta till 100%, dvs med 100/8. Så vi måste också skala 36 med 100/8 för att få veta den nya totala vikten (massan). Därefter måste man komma ihåg att subtrahera 300g eftersom frågan gällde hur mycket vatten som skulle adderas.

Denna uppgift är bara ett. exempel men ett bra exempel på vad som kan avses med att avgöra vilka situationer som representerar proportioner och identifiera proportioner i sammansatta samband. Det sista målet i åk 8–10 inom området proportionella samband är huvudsakligen en slags summering av vart vi vill att eleverna ska komma när vi redan på lågstadiet beskriver multiplikationer som en typ av proportionella situationer: att kunna hantera proportionella situationer säkert och flexibelt.

Mål och innehåll för området proportionella samband i en ordnad lista:

1–2:

- Enkla proportionella resonemang som bygger på barns intuition för att dela lika, fördubbla och halvera mängder och objekt samt skalning med naturliga tal.

3–4:

- Känna igen och kunna representera proportionella samband i tabellform samt med en multiplikationsoperator, som dubbelt-hälften, trippelt- tredjedel.

5–7:

- Andelar och förhållanden, inklusive hur de kan anges i bråkform, decimalform och procentform samt även som en tabell.

[110] (Ahl & Helenius, 2018a, 2018b)

- Identifikation och representation av proportionella samband, inklusive i standardfall som hastigheter, kilopriser, geometrisk likformighet.
- Hantering av sammansatta enheter som kr/kilo eller kilometer/timma.
- Hantering av proportionella situationer genom att till exempel använda tabellform (tilde-tabell), vägen över 1, eller skalningsoperator.

8–10:

- Avgöra vilka situationer som representerar proportioner och identifiera proportioner i sammansatta samband.
- Representationerna *a/b=c/d, ac=db, y=kx, f(x)=kx* för att uttrycka proportionella samband och hur de hänger samman.
- Proportionella samband i koordinatsystem hur de kan konstrueras och läsas av.
- Hantera proportionella situationer säkert och flexibelt.

Statistik och sannolikhet

Sannolikhet och sannolikhet är två matematiska områden som är byggda för att hantera osäkerhet och slump. Sannolikhet handlar om att beskriva osäkerhet och slump på ett teoretiskt plan. Statistik handlar om att samla in, analysera och dra slutsatser från data, som nästan alltid innehåller slumpmässiga variationer. Båda disciplinerna försöker alltså ge verktyg för att förstå och hantera osäkerhet.

Frågor som ställs om sannolikhet har typiskt exakta svar, som t ex: *Du har två rättvisa sexsidiga tärningar och kastar båda. Hur stor är sannolikheten summan av tärningarna är 10?*

Vid kast med tärning är slump inblandad, men frågan ovan har ett exakt svar som kan beräknas med matematiska metoder. En associerad fråga är: *Du hittar en tärning och vet inte om den är rättvis eller ej. Hur ska du ta reda på det?*

Den senare frågan är uppenbarligen betydligt öppnare formulerad än den förra och det finns oändligt många sätt att hantera den, som kan vara väldigt olika bra. Faktum är att just att kunna kvantifiera hur säker man är att det svar man anger efter att ha genomfört sin undersökning är en del av statistiken. Frågan har täta kopplingar till området sannolikhet, för en start bör ju vara att med sannolikhetsbaserade metoder ta reda på hur en rättvis tärning skulle uppföra sig. För en rättvis tärning är sannolikheten för vart och ett av de sex möjliga utfallen ⅙. Men om man kastar en rättvis tärning 60 gånger så kommer utfallet typiskt att skilja sig radikalt från att varje antal kommer upp 10 gånger. Om vi kastar 60 kast med vår okända tärning, borde då utfallet [15 10 9 6 9 11] (15 ettor, 10, tvåor, osv) få oss att säga att den är rättvis, orättvis eller ett vi inte kan uttala oss? Med statistiska metoder kan man visa att om man gör ett mycket stort antal försök (säg 10000) med en rättvis tärning är ungefär hälften mer extrema än vårt utfall och hälften mindre extrema. Så kanske ska vi säga att den nog är rättvis. Men en tärning som bara var lite orättvis skulle också kunna ha gett vårt utfall. Så vi kan inte uttala oss särskilt säkert. Som jämförelse, utfallet [150 100 90 60 90 110] av 600 kast med en rättvis tärning uppkommer med en

sannolikhet mycket nära noll och ett sådant utfall borde få oss att med mycket stor säkerhet konstatera att tärningen är orättvis.

Nu är ju inte så många intresserade av tärningar eller kommer att stöta på liknande tärningsproblem i sitt liv. Men exemplet är en fungerande modell för att förklara viktiga aspekter av statistik, som att det är en verksamhet där man ofta behöver planera försök eller inhämta data på ett genomtänkt sätt, och att antalet försök eller stickprovsstorlek spelar en helt avgörande roll för hur säkert man kan uttala sig om något. Väldigt många beslut i vårt samhälle tas på statistiska grunder. Hur kan ett Covid-test visa fel ibland och ändå vara vettigt att använda? Bör man ge alla ett Covidvaccin givet en viss minskad risk att få Covid om man tar vaccinet, men också en viss risk att vissa biverkningar uppkommer? För att planera och dra slutsatser från undersökningar ge information om frågor som dessa används statistiska metoder.

Ett annat problem ur ett kursplanekonstruktionsperspektiv är att de matematiska metoder som gör att man kan säga saker som att utfallet "[15 10 9 6 9 11] av 60 tärningskast är tämligen typiskt för en rättvis tärning" vida överstiger vad som går att lära ut i grundskolan. Med programmering går det att göra simuleringar vilket möjligen något mer tillgängligt, särskilt givet att moden AI enkelt kan leverera ett program som gör sådana simuleringar och kan förklara hur programmet fungerar. Icke desto mindre uppkommer frågan om det är värt att lära ut lite statistik, om man ändå inte kan lära ut det så att eleverna själva kan hantera ens ett enkelt realistiskt problem.

Vidare, frågor som de om Covidtester och -vaccin ovan ligger ofta nära värderingsfrågor som inte i sig är matematiska eller ens statistiska. Men ju mer exakta statistiska metoder man kan tillgripa, desto bättre kan man säkerställa att diskussioner om målkonflikterna bygger på korrekta fakta. Även om dessa värderingsfrågor eller andra värderingsfrågor i sig inte är matematiska, bör att elever i skolan ska få kunskaper om skillnaden mellan att ta fram ett statistiskt underlag och att göra en värderingsbaserad bedömning baserat på statistiskt underlag.

En annan aspekt av statistiken är att den kanske mer än någon annan matematik (undantaget enkel aritmetik) förekommer i medial kommunikation, ofta på sätt som kan missrepresentera det underliggande fenomen som den uppvisade statistiken sägs representera. Ofta används här statistiska representationsformer som tabeller eller olika slags grafiska representationer. Det är alltså viktigt att elever får god förtrogenhet om sådana.

Så sammanfattningsvis, statistiken är experimentell till sin natur, tekniskt komplicerad och tätt kopplad till att kunna förstå nyhetsmedia och kunna avslöja propaganda.

Denna långa inledning har haft syftet att motivera att kursplanekonstruktion för området statistik på många sätt är svårare än för annan matematik. Valet har fallit på att göra statistiken till ett mer orienterande ämne där mycket av målen och innehållet går under kategorin *behandla* och bara några få saker under kategorin *behärska*. För området sannolikhet finns inte samma dilemma, eftersom det i mycket högre grad finns exakta metoder som kan undervisas inom grundskolematematikens ram. Eftersom de flesta av dessa metoder både kan vara logiskt komplicerade och tenderar att kräva vissa etablerade aritmetikkunskaper, är valet att inte ha någon

sannolikhet på lågstadiet och bara relativt lite på mellanstadiet. För statistikens del betyder det att den genom grundskolan som helhet har en tydlig betoning på att formulera undersökande frågor, samla och använda data, representera och analysera data och tolka resultaten[111].

I tillägg till detta experimentella spår finns några mål som berör några enkla men specifika statistiska begrepp.

För hela lågstadiet är statistikområdet som helhet i kategorin behandla. Även för andra stadier är relativt många av statistikmålen satta i kategorin behandla. Det är ett sätt att lösa situationen med att man vill att eleverna ska få arbete med statistiska undersökningar på att mer avancerat sätt än man tror de kan lära sig. De undersökningar som beskrivs ska genomföras men att de är till för att ge eleverna övergripande erfarenheter av att genomföra statistiska undersökningar utan specifika kunskapsmål. Det går till exempel att *samla in data relaterat till elevnära frågor och representera data i konkret eller ikonisk form,* genom att exempelvis ställa frågor om favoritfrukt och representera utfallet *genom streckräkning med bilder eller som stapeldiagram.* Ett sätt att skapa sådana stapeldiagram är att använda multilink av olika färger där en orange kub t ex får svara mot att en elev har apelsin som favoritfrukt, osv. *Med utgångspunkt i representerad data, beskriva vad som är typiskt och vad som varierar med vardagliga ord ("flest/färst", "mer/mindre").* På motsvarande sätt kan man fortsätta med enkla undersökningen i åk 3-4

I övrigt presenteras en sekvens av mål för statistik och sannolikhet utan att området som helhet beskrivs in den narrativa progressionsform som har använts för de flesta andra områdena. Om man instämmer med analysen av statistikens position inom skolmatematiken som presenterades ovan kan man hitta mycket bra exempel på hur man konkret kan arbeta med de förslagna målen i de texter som citeras i fotnot 114.

Mål och innehåll för området statistik och sannolikhet i en ordnad lista:

1-2:

- *Samla in data relaterat till elevnära frågor och representera data i konkret eller ikonisk form, t ex som streckräkning med bilder eller som stapeldiagram*
- *Med utgångspunkt i representerad data, beskriva vad som är typiskt och vad som varierar med vardagliga ord ("flest/färst", "mer/mindre").*
- *Utifrån insamlad data inleda informella sannolikhetsresonamang i termer av vad är säkert, vad är omöjigt.*

3-4:

- *Planera och genomföra små undersökningar relaterat till frågor som eleverna lätt kan förstå men inte vet svaret på.*

[111] Denna del att statistiken är inspirerad av GAISSE II, även det inte har bedömts möjligt att fullfölja de idéerna fullt ut (A. Bargagliotti m.fl., 2020; A. E. Bargagliotti, 2012; English, 2010; Leavy m.fl., 2018)

- *Arbeta med kategoriska och enkla kvantitativa data*
- *Producera och tolka punkt-/linjediagram och stapeldiagram baserat på elevnära data*
- *Introducera medelvärde (rättvis fördelning), median och variationsbredd*
- *Genomföra upprepade försök (t.ex. kasta en tärning 20 gånger) och tala om relativ frekvens ("ungefär 1 av 6") som ett mått på hur sannolikt något verkar.*
- *Jämföra lika sannolika och inte lika sannolika utfall i enkla situationer (t.ex. snedfördelad påse kulor).*

5-7:

- *Fördjupa den statistiska cykeln: fråga → samla → analysera → tolka → kommunicera genom praktiskt undersökande arbete;*
- *Med hjälp av konkreta exempel, skilja stickprov från population och diskutera enkel urvalsmetodik och bias.*
- Producera och tolka punkt-/linjediagram och stapeldiagram baserat egeninsamlad eller annan data
- Medelvärde (rättvis fördelning), median och variationsbredd
- Sammanfatta fördelningar med histogram och låddiagram (boxplot); jämföra grupper med centrummått (medel/median) o*ch på en övergripande nivå även spridningsmått samt resonera om variabilitet.*
- Resonera om utfallsrum och enkla kombinatoriska situationer (t.ex. två mynt, tärning + mynt); uppskatta sannolikhet via tabell/diagram eller simulering.
- Tolka och jämföra teoretisk sannolikhet (t.ex. 1/6) och empirisk frekvens (vad som observeras), samt förklara skillnader.

8-10:

- Fördjupa den statistiska cykeln: fråga → samla → analysera → tolka → kommunicera i undersökningar av sekundära datamängder
- *Ge kvalitativa beskrivningar av osäkerhet i resultatet av statistiska undersökningar och relatera det till urvalets storlek.*
- Kunna beräkna och använda medelvärde och median och använda dessa begrepp för att diskutera symmetri/skevhet i fördelningar.
- *Använda kalkylprogram för att beräkna spridningsmått*
- Modellera och analysera sammansatta händelser (t.ex. två tärningar, kortdragning utan återläggning) med tabell, lista eller enkel trädmodell; beräkna sannolikheter på grundläggande nivå.
- Resonera om beroende/oberoende och villkorlig sannolikhet i vardagsnära exempel (kvalitativt och med enkla beräkningar), samt diskutera rimlighet och antaganden bakom modellen.

Geometri och mätning
Området geometri och mätning är genomarbetat i betydligt lägre grad än andra områden i dessa ämnesspecifika instruktioner. Huvudsakligen har andra länders kursplaner undersökts, och en grov anpassning till svensk kontext. Det betyder att mål och innehåll för geometri i högre grad än andra mål och innehåll behöver jobbas igenom i det fortsatta kursplanearbetet. Avsnittet kan mer ses som en platshållare än som ett genomtänkt förslag. Det behövs exempelvis genomtänkt progression inom mätning

Mål och innehåll för området geometri och mätning i en ordnad lista:

1-2:

- Känna igen, beskriva och jämföra grundläggande två- och tredimensionella former (trianglar, fyrhörningar, cirklar, klot, kuber, rätblock) och jämföra med former i vardagen.
- Jämföra längder, areor och volymer med vardagsmått och standardenheter (cm, m).
- *Speglingar i vardagen, enkla mönster och symmetrier.*
- Förklara och beskriva figurer med egna ord.

3-4:

- Klassificera former efter egenskaper (antal sidor, vinklar, symmetrier)
- Börja använda argument om varför något gäller (”alla fyrhörningar med lika långa sidor är inte kvadrater”).
- *Beräkna omkrets och area av enkla figurer (rektangel, triangel). Introduktion till volym av rätblock.*
- Förstå och beskriva spegling, rotation, förflyttning på rutnät.

5-7:

- Analysera geometriska figurer genom att undersöka deras delar (hörn, sidor, vinklar, diagonaler) och egenskaper.
- *Påbörja arbete med definitioner genom att formulera och använda egna och etablerade definitioner för geometriska objekt (t.ex. parallellogram, rektangel, likbent triangel) och pröva om exempel/motexempel uppfyller dem.*
- Använda skala och proportioner i kartor, ritningar, modeller.
- Generalisera formler för area och volym till parallellogram, cirkel, prisma, cylinder).
- Introduktion till skala.
- Resonera med geometriska begrepp och definitioner.

8-10:

- Avancerade formler (pyramid, kon, klot).

- Använda formler och satser (Pythagoras, likformighet, vinkelsummor, trigonometriska samband). Arbeta abstrakt med definitioner och egenskaper av geometriska objekt.
- Använda Pythagoras sats i area- och längdproblem.
- Tillämpa geometriska kunskaper i verkliga situationer (kartor, design, tekniska tillämpningar).
- Undersök och arbeta med bevis i några enkla fall (t.ex. bevisa vinkelsumman i en triangel, Pythagoras sats).

Tekniska hjälpmedel och programmering

I de senaste kursplanerna har användning av tekniska hjälpmedel varit direkt specificerat i relation till matematikinnehåll, till exempel med formuleringen "...med och utan tekniska hjälpmedel". Den programmering som har funnits har sorterat under området algebra. I det här förslaget provar vi att ha ett särskilt avsnitt om både tekniska hjälpmedel och programmering. Det är inte nödvändigtvis bättre att ha ett sådant särskilt område för tekniska hjälpmedel, eftersom det blir av en helt annan karaktär än andra områden. Men för att kunna föra diskussionen på ett fokuserat sätt behandlas tekniska hjälpmedel och programmering här i ett eget avsnitt. Detta avsnitt är jämfört med de tidigare Mål och innehållsområdena i högre grad resonerande och i lägre grad deklarerande.

Det val som har gjorts här är att noga separera programmering från andra tekniska hjälpmedel. Ur ett teoretiskt perspektiv skulle man ur ett verktygsperspektiv kunna tänka sig att programmering i undervisningen och lärandet fungerar ungefär likadant som andra hjälpmedel. Alla tekniska artefakter behöver nämligen erövras innan de kan fungera som verktyg, dvs innan de har inkorporerats i vårt matematiska tänkande så att verktygen så att säga blir en förlängning av vårt matematiska tänkande istället för att vara en process vid sidan av[112]. Dock är programmering i mycket högre grad än användning av andra tänkbara tekniska hjälpmedel en färdighet i sig. Därför ges den nedan en egen rubrik.

Till skillnad från de andra delområdena i Mål och innehåll ges inte här någon narrativ progressionsbeskrivning, bara förslag på punkter till mål och innehåll och vissa övergripande resonemang.

Tekniska hjälpmedel

I Skolforskningsinstitutets översikt av digitala lärresurser i matematikundervisningen beskrivs fem kategorier: digitala uppgifter, digitala objekt, digitala spel, digitala verktyg och digitala kurspaket. Digitala objekt avser hjälpmedel som matematiska objekt som t. ex. geometriska former kan representeras. Digitala verktyg avser programvara som kan användas för att utföra matematiska aktiviteter, men som inte har tagits fram i pedagogiskt syfte. De fyra kategorier som inte är digitala verktyg kan gå under samlingsnamnet pedagogiska verktyg.

[112] Denna process har i forskningen beskrivits med hjälp av begreppet instrumentell genes (Trouche, 2005; Trouche m.fl., 2012).

Den rekommendation som ges här är att användande av de olika klasserna av pedagogiska verktyg vara helt upp till läraren (eller kanske skolan eller skolhuvudmannen om det finns ordnade samarbeten om saken). Om läraren tror att eleverna lär sig någon särskild matematik bättre om något pedagogiska tekniskt hjälpmedel används, så bör läraren använda det. Olika lärare kan göra olika bedömningar av vilka hjälpmedel som är pedagogiska fördelaktiga. Bedömningen är därför att inga punkter i mål och innehåll ska specificera användning av pedagogiska hjälpmedel. Det är därför också tveksamt att nationella slutprov eller motsvarande ska kräva att elever har specifik kännedom om vissa utvalda pedagogiska hjälpmedel.

Av de digitala verktygen är miniräknaren antagligen ännu den överlägset vanligaste. Även smarta klockor, telefoner och datorer innehåller ju miniräknarapplikationer. Som nummer två i tillgänglighet kommer antagligen kalkylprogram. CAS (computer algebra systems, digitala verktyg som kan hantera algebraiska operationer) skulle givet det fokus på algebra som finns i denna kursplan kunna vara ett rekommenderat verktyg. Men algebrafokuset i kursplanen har huvudsakligen tillkommit för att eleverna ska kunna få en mer sammanhängande uppfattning av matematiken i stort än för att det anses viktigt att kunna utföra avancerade algebraiska manipulationer. Därför ter det sig inte heller rimligt att i olika kursplanemål specificera innehåll som involverar användning av CAS.

Det förslag som läggs här är därför relativt minimala skrivningar om tekniska hjälpmedel som handlar om att kunna mata in uttryck och funktioner i digitala resurser som är fritt tillgängliga. I de flesta fall har sådana verktyg relativt likartade gränssnitt, så att elever genom att prova på några olika kan känna ett förtroende för att de även ska kunna klara det för något nytt gränssnitt. Att lägga fokuset på själva inmatningen kan verka som låg nivå, men man kan säga att det som man vill göra med resultaten som ett visst verktyg producerar kan avgöras av målen med den övriga matematikundervisningen. Som exempel finns under Funktioner och samband mål om att skapa och tolka grafer i koordinatsystem. Om eleverna då kan mata in en funktion i ett digitalt verktyg och få det att rita en graf, då kan ju målet om att tolka grafer tillämpas på det som programmet visar. För lågstadiet är valet att inte ha några mål för digitala verktyg. Det finns elever som av olika skäl vill ha miniräknare som stöd, men en möjlig rekommendation är att i stället ha tillgängliga addition och multiplikationstabeller tillgängliga, se exempelvis Figur 19. De mål som har valts är att eleverna på mellanstadiet ska kunna mata in uttryck eller beräkningar som innehåller flera delar som ett uttryck i miniräknare eller andra fritt tillgängliga resurser. Det är vanligt att elever slår in enkla delberäkningar, skriver ut svaren och sedan slår in nästa delberäkning. Det är en viktig färdighet att veta hur man slår in ett längre uttryck, därav detta mål. Motsvarande mål för högstadiet är att eleverna ska kunna mata in uttryck, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att uttrycken kan utvärderas för olika värden på ingående variabler. Progressionen från mellanstadiet är bland annat att det här krävs att man ska kunna mata in ett uttryck som inkluderar variabler, och sedan utvärdera det för olika värden på denna variabel. Det andra målet gör högstadier är att mata in funktioner, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att funktionernas grafer kan studeras visuellt. I

tillägg till punkterna nedan finns inom området statistik en särskild punkt om digitala verktyg

Mål och innehåll för området tekniska hjälpmedel i en ordnad lista:

5–7

- Mata in uttryck eller beräkningar som innehåller flera delar som ett uttryck i miniräknare eller andra fritt tillgängliga resurser.

8–10:

- Mata in uttryck, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att uttrycken kan utvärderas för olika värden på ingående variabler.
- Mata in funktioner, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att funktionernas grafer kan studeras visuellt.

Programmering

Det har bland lärare funnits en osäkerhet över rollen programmering ska ha i matematikundervisningen[113]. Programmeringsbaserade metoder kan fungera för att kasta intressant begreppsligt ljus över vissa matematiska begrepp och metoder och programmering kan fungera som ett matematiskt hjälpmedel. Även om detta perspektiv inte syns i den senaste kursplanen, har det funnits en förväntan hos många lärare att programmeringen ska kunna spela en sådan roll. Men rådet som ges här är att tona ned denna förväntan. De mest väldokumenterade försöken med att få sådana vinster har misslyckats med avseende på kopplingen till matematiken. Det är relativt sett lätt att få även relativt unga elever att lära sig vissa viktiga programmeringsbegrepp, men mycket svårt att få den programmering som görs att kasta relevant ljus över någon annan matematik[114].

En vanlig kommentar från matematiklärare[115] när det gäller programmering är att de tycker att det är rimligt att det behandlas i skolan, men att det vore bättre att det var ett eget ämne eller hanterades av teknikämnet. Den typen av förändringsförslag ligger dock utanför uppdraget att skriva ämnesspecifika instruktioner. Flera lärare har också sagt att det i själva verket är relativt lätt att hantera programmering genom att ägna t. ex. en viss sammanhängande tid till det varje termin. Naturligtvis finns det också lärare som mer systematisk inkorporerar programmering i sin undervisning. En typisk rapport från lärare är också att elever i allmänhet tycker att programmeringen är rolig och relativt givande, men inte nödvändigtvis kommer så långt i sin programmeringsutveckling. Men några elever i varje klass blir mycket entusiastiska

---

[113] (Helenius & Misfeldt, 2021; Misfeldt m.fl., 2019)

[114] Se utvärderingen av Ifous program Programmering i ämnesundervisningen som konstaterar att det finns goda möjligheter att utveckla elevers datalogiska tänkande med programmeringsundervisning på grundskolan men ifrågasätter om det ens är möjligt att lära sig matematik via programmering i de tidiga årskurserna (Ifous, 2020). Liknande projekt i England har lett till samma resultat (Benton m.fl., 2017; Boylan m.fl., 2018). Se även Kilhamn m.fl. (Kilhamn m.fl., 2022).

[115] I tillägg till de som anges som referenspersoner i Appendix D har många andra lärare vidtalats informellt och diskussioner har förts på stora matematiklärarforum på Facebook.

och ägnar en hel del fritid åt att arbeta på sina program. Detta är antagligen ett rimligt utfall. Detta betyder att lärare i efterföljande skolformer inte nödvändigtvis kan förvänta sig att elever i allmänhet kan särskilt mycket programmering, men att några elever potentiellt har blivit påverkade i riktning mot att välja utbildningar om innehåller programmering i framtiden.

Det rekommenderade valet är därför att behålla programmering som en del av matematikundervisningen ungefär som i LGR 22. I linje med både läroplansutredningens generella beskrivningar av kursplaner och med vad de experter på programmering och programmeringsdidaktik som har vidtalats tycker bör dock specifikationsgraden höjas något. En risk med att höja specifikationsgraden är att en del elever kanske inte klarar den typen av specifika mål om de ska vara betygsgrundande. Därför är det rimligt att låta alla punkter under programmeringskategorin i Mål och innehåll vara av typen *behandla*.

I linje med resonemanget ovan kan man i huvudsak bibehålla motsvarande ambitionsnivå som i LGR 22. Till exempel kan målet för lågstadiet fortsatt att vara *entydiga stegvisa instruktioner och hur de konstrueras, beskrivs och följs som grund för programmering. Hur symboler används vid stegvisa instruktioner.* Det finns relativt gott om modeller för hur man kan arbeta med detta i lågstadiet.

För övriga stadier är förslaget att tona ned det som kan kallas ett processperspektiv, dvs frågan om hur algoritmer skapas, testas, förbättras etc. i formuleringarna för mål och innehåll. Det finns naturligtvis bättre och sämre processer för att skapa algoritmer eller annan programkod, men det verkar ändå bättre att formulera mål som handlar om de centrala element som huvudsakligen bygger upp programkod. Det finns många olika listor på vad som skulle kunna utgöra de viktigaste begreppen inom programmering, som kan inkludera element som data, funktion, variabler, algoritmer och sekventiella processer, villkor, loopar och iteration, modeller, abstraktion och dekomposition, funktionellt tänkande, datastrukturer och så vidare. Förslaget här är att använda en kort lista och att formulera den i abstrakta termer. Den föreslagna listan innehåller de fem begreppen: iteration, selektion, variabel, tillstånd, reduktion. Att dessa termer används i kursplanetexten betyder inte att eleverna ska kunna just dessa, utan att undervisningen ska behandla de begrepp termerna står för. I årskurserna 5–7 är den föreslagna formuleringen för mål och innehåll *programmering i visuella programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion och variabel.* Lärare på mellanstadiet som skulle vilja kan även på mellanstadiet använda textbaserad programmering och i så fall bör det inte vara ett krav att de också använder visuella programmeringsmiljöer. (se nedan för enkla sätt att göra detta). För årskurserna 8–10 är formuleringen: *programmering i textbaserade programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion, variabel, tillstånd och reduktion.* Som synes specificeras här att man på högstadiet ska hantera textbaserade miljöer (men inte vilka). Dessutom kommer tillstånd och reduktion till som programmeringsbegrepp. Så vad står dessa fem begrepp för.

Iteration betyder upprepning: att låta programmet göra samma (eller nästan samma) sak flera gånger. Både textbaserade (t.ex. Python) och blockbaserade (t.ex. Scratch) miljöer har flera sätt att iterera, t.ex. for-/while-loopar eller blocket “upprepa n

gånger”.
Exempel: “Gå 50 steg, vrid 90°” upprepat 4 gånger ritar en kvadrat. Det är både kortare och säkrare att skriva “upprepa 4 gånger” än att klistra in samma kod fyra gånger (och särskilt om det är 1000 gånger).

Selektion betyder val: att köra en viss del av programmet om ett villkor är uppfyllt, annars något annat (eller ingenting). I textbaserade språk görs det med if … elif … else, i block med “om … annars …”.
Exempel: “Om temperaturen < 0: skriv ‘Frysgrader’, annars: skriv ‘Plusgrader’.”

En **variabel** i programmering har alltid ett aktuellt värde tills det tilldelas ett nytt. Tecknet = betyder tilldelning, inte matematisk likhet.
Exempel: n = 5 sätter värdet 5 i n. Satsen n = n + 1 är ogiltig i matematik men betyder i programmering: öka n med 1. (För jämförelse/likhet används vanligtvis ==.)

De följande två begreppen har angetts som fundamentala av vissa referenspersoner, men skulle möjligen kunna ersättas med några enklare begrepp

Tillstånd är programmets “ögonblicksbild”: alla aktuella variabelvärden, var i koden vi befinner oss, objektens lägen (t.ex. en figurs position) och eventuellt. ex.terna resurser. Att kunna förstå begreppet tillstånd kan vara viktigt för att felsöka att program steg för steg. Detta begrepp har därmed en annorlunda och karaktär, men inriktad mot processen att programmera.
Exempel: I ett spel är tillståndet t.ex. spelarens liv, poäng, nivå och koordinater. En händelse (t.ex. krock) ändrar tillståndet (liv −1, ny position).

Funktion är ett sätt att dela upp program i namngivna, återanvändbara byggstenar som tar in parametrar, utför beräkningar och returnerar ett resultat. Användning av funktioner gör koden mer läsbar, testbar och återanvändbar.

Det finns många både visuella och textbaserade programmeringsmiljöer[116] som är konstruerade på ett väldigt pedagogiskt sätt som för de flesta elever är självinstruerande, särskilt om de arbetar i par. För många lärare är det rimligt att använda en sådan resurs. Det är ett av skälen till att det har bedömts som rimligt att ha kvar programmering i kursplanen trots att det finns många lärare som inte själva kan programmering så bra. Att öka på specifikationsgraden lite kan möjligen verka som att höja kraven, men det ger samtidigt undervisningen lite bättre riktning.

Mål och innehåll för området programmering i en ordnad lista:

3–4:

- *Entydiga stegvisa instruktioner och hur de konstrueras, beskrivs och följs som grund för programmering. Hur symboler används vid stegvisa instruktioner.*

5–7:

[116] Till exempel koda.nu, hedy.org, scratch.org

- *Programmering i visuella programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion och variabel*

8–10:

- *Programmering i textbaserade programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion, variabel, tillstånd och funktion*

Referenser

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2018a). The role of language representation for triggering students' schemes. I J. Häggström, M. Johansson, M. Fahlgren, Y. Liljekvist, O. Olande, & J. Bergman Ärlebäck (Red.), *Perspectives on professional development of mathematics teachers. Proceedings of MADIF11: The eleventh research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education, Karlstad, January 23–24 2018* (s. 49–59). SMDF.

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2018b). Why is calculating the average speed difficult? I E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Red.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 3–10). PME.

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2021a). A framework for analyzing progress in concept knowledge in mathematics textbooks. I G. A. Nortvedt, N. A. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Hähkiöniemi, B. E. Jessen, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H. K. Nilsen, G. Pálsdóttir, P. Portaankorva-Koivisto, J. Radišić, & A. Wernberg (Red.), *Bringing Nordic mathematics education into the future. Preceedings of Norma 20. The ninth Nordic Conference on Mathematics Education Oslo, 2021* (s. 1–8). SMDF.

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2021b). Polysemy and the role of representations for progress in concept knowledge. I Y. Liljekvist & J. Häggström (Red.), *Sustainable mathematics education in a digitalized world. Proceedings of MADIF 12.* (s. 101–110). SMDF.

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2022). New Demands on the Symbols and Formalism Competency in the Digital Era. I U. T. Jankvist & E. Geraniou (Red.), *Mathematical Competencies in the Digital Era* (s. 159–176). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0_9

Ahl, L. M., Helenius, O., Aguilar, M. S., Jankvist, U. T., Misfeldt, M., & Prytz, J. (2023). Implementation research in mathematics education: A systematic mapping review. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *3*(2), 135–199. https://doi.org/10.1163/26670127-bja10015

Ahl, L. M., Helenius, O., & Koljonen, T. (2022). Gauging fidelity to an implemented teaching model through the lens of the documentational approach to didactics. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, *2*(1), 45–75. https://doi.org/DOI:%252010.1163/26670127-bja10003.

Bando, R., Näslund-Hadley, E., & Gertler, P. (2019). *Effect of inquiry and problem based pedagogy on learning: Evidence from 10 field experiments in four countries*. National Bureau of Economic Research.

Bargagliotti, A. E. (2012). How well do the NSF Funded Elementary Mathematics Curricula Align with the GAISE Report Recommendations? *Journal of Statistics Education*, *20*(3), 1. https://doi.org/10.1080/10691898.2012.11889646

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., & Spangler, D. A. (2020). *Pre-K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)* (Second edition). American Statistical Association.

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 17–38.

Beishuizen, M. (1997). Two types of mental arithmetic and the empty numberline. *British Society for Research into Learning Mathematics*, *18*.

Benton, L., Hoyles, C., Kalas, I., & Noss, R. (2017). Bridging Primary Programming and Mathematics: Some Findings of Design Research in England. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *3*(2), 115–138. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0028-x

Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2010a). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet. Grundskolan våren 2009*. National center for mathematics education.

Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Helenius, O., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2010b). *Matematikutbildningens mål och undervisningens ändamålsenlighet. Gymnasieskolan hösten 2009*. National center for mathematics education.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics education in its cultural context. *Educational studies in mathematics*, *19*(2), 179–191.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 72–87. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.10.001

Boylan, M., Demack, S., Wolstenholme, C., Reidy, J., & Reaney, S. (2018). *ScratchMaths: Evaluation report and executive summary*. Education Endownment Foundation. https://shura.shu.ac.uk/id/eprint/23758

Capar, G., & Tarim, K. (2015). Efficacy of the cooperative learning method on mathematics achievement and attitude: A meta-analysis research. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(2), 553–559.

Cepeda, N. J., Vul, E., Rohrer, D., Wixted, J. T., & Pashler, H. (2008). Spacing Effects in Learning: A Temporal Ridgeline of Optimal Retention. *Psychological Science*, *19*(11), 1095–1102. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2008.02209.x

Cheng, Z.-J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 29–47.

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching children mathematics*, *5*(7), 400–405.

D'Ambrosio, U. (2016). An Overview of the History of Ethnomathematics. I M. Rosa, U. D'Ambrosio, D. C. Orey, L. Shirley, W. V. Alangui, P. Palhares, & M. E. Gavarrete, *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program* (s. 5–10). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30120-4_2

Davydov, V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula.* National Council of Teachers of Mathematics. https://eric.ed.gov/?id=ED318633

Diesterweg, A. (1938). *Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer*. F. Schöningh.

Dooren, W. V., Bock, D. D., Vleugels, K., & Verschaffel, L. (2010). Just Answering … or Thinking? Contrasting Pupils' Solutions and Classifications of Missing-Value Word Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 20–35. https://doi.org/10.1080/10986060903465806

Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J., & Willingham, D. T. (2013). Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques: Promising Directions From Cognitive and Educational Psychology. *Psychological Science in the Public Interest*, *14*(1), 4–58. https://doi.org/10.1177/1529100612453266

Ekdahl, A.-L., Nord, M., & Kullberg, A. (2025). What matters in teaching for students' learning opportunities of subtraction in the 1–20 number range? *Scandinavian Journal of Educational Research*, *69*(6), 1288–1303. https://doi.org/10.1080/00313831.2024.2419064

Elkjaer, M. (2023). *Detect, diagnose and intervene*. AArhus universitet.

Emanuelsson, G., Johansson, B., & Lingefjärd, T. (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning* (No. 1992:1; Rapporter från institutionen för ämnesdidaktik, avdelningen för matematik, s. 238). Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.

English, L. D. (2010). Young children's early modelling with data. *Mathematics Education Research Journal*, *22*(2), 24–47. https://doi.org/10.1007/BF03217564

Eriksson, K., Lindvall, J., Helenius, O., & Ryve, A. (2021). Socioeconomic Status as a Multidimensional Predictor of Student Achievement in 77 Societies. *Frontiers in Education*, *6*, 464. https://doi.org/10.3389/feduc.2021.731634

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Giota, J. (2013). *Individualiserad undervisning i skolan – en forskningsöversikt.* (No. 3:2013). Vetenskapsrådet.

Grønmo, L. S. (2018). The role of algebra in school mathematics. I G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Red.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (s. 179–194).

Haldén, E. (1997). *Ett centralt ämbetsverk i omvandling—Från Skolöverstyrelsen till Skolverket.* (No. 1997:2). Stockholm center for organizational research.

Harnad, S. (1990). The Symbol Grounding Problem. *Physica D*, *42*, 335–346. https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90087-6

Helenius, O. (2012). Hedda mäter. *Nämnaren*, *2012*(2), 9–12.

Helenius, O. (2022, december 19). Socioekonomiska faktorer överskattade. *Kvartal*.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2023). *Hur bör man förändra kursplaner i matematik? – Argument från den internationella forskningen* (Näringslivets skolforum, s. 30). Svenskt Näringsliv.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2024a). *En bättre kursplan i matematik* (Näringslivets skolforum, s. 1–59). Svenskt Näringsliv.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2024b). *Läromedel på villovägar –en analys av den bristande vetenskapliga grunden för dagens svenska läromedel i matematik* (Näringslivets skolforum, s. 1–37). Svenskt Näringsliv.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (2025). Gérard Vergnaud in action. *For the Learning of Mathematics*, *45*(1), 50–55.

Helenius, O., & Ahl, L. M. (accepted). Conceptual fields and conceptual polysemy of mathematical objects with applications to the multiplicative conceptual field. *Hiroshima journal of mathematics education*.

Helenius, O., & Misfeldt, M. (2021). Programmeringens väg in i skolan – en jämförelse mellan Sverige och Danmark. I K. Bråting, C. Kilhamn, & L. Rolandsson (Red.), *Programmering i skolmatematiken – möjligheter och utmaningar* (s. 37–53). Studentlitteratur.

Helenius, O., & Mouwitz, L. (2009). *Matematiken-var finns den?* Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet. https://www.academia.edu/download/41873292/Matematiken__var_finns_den20160201-30232-we88qn.pdf

Hellstrand, H., Holopainen, S., Korhonen, J., Räsänen, P., Hakkarainen, A., Laakso, M.-J., Laine, A., & Aunio, P. (2024). Arithmetic fluency and number processing skills in identifying students with mathematical learning disabilities. *Research in developmental disabilities*, *151*, 104795.

Houang, R. T., & Schmidt, W. H. (2008). TIMSS international curriculum analysis and measuring educational opportunities. *3rd IEA International research conference TIMSS*, 1–18. https://www.iea.nl/sites/default/files/2019-04/IRC2008_Houang_Schmidt.pdf

Ifous. (2020). *Programmering i skolan vad, hur, när och varför?: Slutrapport från FoU-programmet Programmering i ämnesundervisningen*.

Izsák, A., & Beckmann, S. (2019). Developing a coherent approach to multiplication and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(1), 83–103. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09885-8

Izsák, A., Beckmann, S., & Stark, J. (2021). Seeking Coherence in the Multiplicative Conceptual Field: A Knowledge-in-Pieces Account. *Cognition and Instruction*, 1–46.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1987). *Learning together and alone: Cooperative, competitive, and individualistic learning*. Prentice-Hall, Inc. https://psycnet.apa.org/record/1986-98283-000

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An Educational Psychology Success Story: Social Interdependence Theory and Cooperative Learning. *Educational Researcher*, *38*(5), 365–379. https://doi.org/10.3102/0013189X09339057

Jones, I., Inglis, M., Gilmore, C., & Evans, R. (2013). Teaching the substitutive conception of the equals sign. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 34–49. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.756635

Kaur, B., & Leong, Y. H. (2021). Overview of the School System and School Mathematics Curriculum in Singapore. I B. Kaur & Y. H. Leong (Red.), *Mathematics Instructional Practices in Singapore Secondary Schools* (s. 1–13). Springer Nature Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8956-0_1

Kieran, C. (1994). A Functional Approach To The Introduction Of Algebra—Some Pros And Cons. I J. P. de Ponte & J. F. Matos (Red.), *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education (PME) 18*. The international group for the international group for the psychology of mathematics education.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature. https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27822/1002183.pdf

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Department of Pedagogical, Curricular and Professional Studies …. https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/24151

Kilhamn, C., Bråting, K., Helenius, O., & Mason, J. (2022). Variables in early algebra: Exploring didactic potentials in programming activities. *ZDM–Mathematics Education*, 1–16.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press.

Klein, A. S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(4), 443–464.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from*. Basic Books.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, s. 629–667). Information Age Publishing.

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparistodemou, E. (Red.). (2018). *Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*. Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in mathematics*, *67*, 255–276.

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM Mathematics Education*, *49*(6), 937–949.

Läroplan för grundskolan, - förskoleklassen och fritidshemmet 2022, 2010:37 SKOLFS.

MacKenzie, D. (2008). *An engine, not a camera: How financial models shape markets*. Mit Press.

Mathematics syllabus. Primary one to six. (2012). Ministry of education, Singapore. https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf

Mercier, H., & Sperber, D. (Red.). (2017). *The Enigma of Reason*. Harvard University Press. https://doi.org/10.4159/9780674977860

Misfeldt, M., Szabo, A., & Helenius, O. (2019). Surveying teachers' conception of programming as a mathematics topic following the implementation of a new mathematics curriculum. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *13*.

Mulligan, J., Oslington, G., & English, L. (2020). Supporting Early Mathematical Development through a "Pattern and Structure" Intervention Program. *ZDM–Mathemtics Education*, *52*(4), 663–676. ERIC.

Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., Busatto, S., Lai, J., & Davis, B. (2020). Evaluating the Impact of a Spatial Reasoning Mathematics Program (SRMP) Intervention in the Primary School. *Mathematics Education Research Journal*, *32*(2), 285–305. ERIC.

Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., & Davis, B. (2018). Connecting Mathematics Learning through Spatial Reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(1), 77–87. ERIC.

Murphy, C. (2011). Comparing the use of the empty number line in England and the Netherlands. *British Educational Research Journal*, *37*(1), 147–161. https://doi.org/10.1080/01411920903447423

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(2), 3–46.

Niss, M. (2016). Mathematics standards and curricula under the influence of digital affordances. *Digital curricula in school mathematics*, *239*.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriets forlag.

Opsal, H., & Topphol, A. K. (2023). The problematic equal sign. *NOMAD Nordic Studies in Mathematics Education*, *28*(1–2), Article 1–2. https://doi.org/10.7146/nomad.v28i1-2.149263

Prytz, J. (2020). Framing for Success: Governance of Swedish School Mathematics, 1980–1995. *Nordic Journal of Educational History*, *7*(1), 3–32.

Prytz, J. (2023a). *En ny kursplan i matematik – hur den skulle kunna se ut och varför* (s. 1–48). Svenskt Näringsliv.

Prytz, J. (2023b). *Grundskolans kursplaner i matematik – igår, idag och imorgon* (s. 1–30). Svenskt Näringsliv.

Regeringskansliet. (2010). *Förskola i utveckling – bakgrund till ändringar i förskolans läroplan* (promemoria No. U10.027; s. 23). Utbildningsdepartementet.

Regeringskansliet. (2025). *Kunskap för alla* (Betänkande av Läroplansutredningen No. SOU 2025:19; Statens offentliga utredningar). Regeringskansliet. https://regeringen.se/rattsliga-dokument/statens-offentliga-utredningar/2025/02/sou-202519/

Resnick, L. B. (1984). *A developmental theory of number understanding.* In H.P. Ginsburg (Ed.), The development of mathematical thinking. London: Academic Press.

Roediger, H. L., & Butler, A. C. (2011). The critical role of retrieval practice in long-term retention. *Trends in cognitive sciences*, *15*(1), 20–27.

Shield, M., & Dole, S. (2008). PROPORTION in middle-school mathematics: It's everywhere. *Australian Mathematics Teacher*, *64*(3), 10–15.

Sidenvall, J., Lithner, J., & Jäder, J. (2015). Students' reasoning in mathematics textbook task-solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 533–552. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.992986

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Skolöverstyrelsen. (1982). *Läroplan för grundskolan. Kommentarmaterial Lgr 80. Att räkna—En grundläggande färdighet* (Läroplaner No. 1982:6). Skolöverstyrelsen.

Slavin, R. E. (1996). Research on cooperative learning and achievement: What we know, what we need to know. *Contemporary educational psychology*, *21*(1), 43–69.

Soni, M., & Okamoto, Y. (2020). Improving Children's Fraction Understanding through the Use of Number Lines. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *22*(3), 233–243. ERIC.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0591-8

Sumpter, L., Blomqvist, A., Nydahl, A., & Sollerman, S. (2025). Mathematical equivalence and grade 6 students' errors. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 1–12. https://doi.org/10.1080/00313831.2025.2550274

Sweller, J., Kirschner, P. A., & Clark, R. E. (2007). Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational psychologist*, *42*(2), 115–121.

Säfström, A., Helenius, O., & Ahl, L. (2019). Implementing alternative models for introducing multiplication. I U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Nummer 14, s. 4447–4454). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; Utrecht University; ERME. https://hal.science/hal-02429789/document

Tossavainen, A., & Helenius, O. (2024). Student Teachers' Conceptions of Fractions: A Framework for the Analysis of Different Aspects of Fractions. *Mathematics Teacher Education and Development*, *26*(1), Article 1.

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. I *The didactical challenge of symbolic calculators* (s. 197–230). Springer.

Trouche, L., Drijvers, P., Gueudet, G., & Sacristán, A. I. (2012). Technology-Driven Developments and Policy Implications for Mathematics Education. I M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Red.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (s. 753–789). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_24

Valverde, G. A., & Schmidt, W. H. (2000). Greater expectations: Learning from other nations in the quest for ”world-class standards” in US school mathematics and science. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(5), 651–687. https://doi.org/10.1080/00220270050116932

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and instruction*, *23*(1), 57–86.

Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2022). The role of relational preference in word-problem solving in 6- to 7-year-olds. *Educational Studies in Mathematics*, *110*(3), 393–411. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10139-9

Vergnaud, G. (1979). The acquisition of arithmetical concepts. *Educational studies in Mathematics*, *10*(2), 263–274.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. I R. A. Lesh & M. Landau, *Acquisition of mathematics concepts and processes* (s. 127–184). London Academic Press.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, *52*(2), 83–94. https://doi.org/10.1159/000202727

Vergnaud, G. (2020). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. I *Addition and subtraction* (s. 39–59). Routledge.

Vinterek, M. (2006). *Individualisering i ett skolsammanhang* (No. 31; Forskning i fokus). Myndigheten för skolutveckling. https://www.skolverket.se/download/18.6bfaca41169863e6a6550e1/1553958313016/pdf1844.pdf

Wahlström, N. (2023). *Kunskap, kompetens och kvalifikation: Om EU: s nyckelkompetenser ochnationella styrdokument* (No. 2023:1333). Skolverket. https://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:1834024

Zhang, X., Clements, M. A., & Ellerton, N. F. (2015). Conceptual mis (understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. *Mathematics Education Research Journal*, *27*, 233–261.

Appendix A

Nedan listas de viktigaste utdragen som berör kursplaner från SOU 2025:19:

I kapitel 5 föreslår vi att ämnesspecifika instruktioner ska utarbetas som en förberedelse inför kursplanearbetet. Dessa kommer att bli viktiga underlag för kommentarerna. (s. 166)

Kursplanerna behöver på ett tydligare sätt ange vad det är meningen att eleverna ska kunna och när det är meningen att de ska göra det. Därför behöver innehållet uttryckas på ett mer konkret och detaljerat sätt. Kursplanerna behöver också ge mer ledning om hur lärarna ska prioritera mellan olika innehåll. (s. 256)

Progressionen mellan stadier och årskurser behöver förstärkas, bland annat genom att införa mer specifika mål och tydliggöra i vilken ordning olika innehållsområden ska behandlas i undervisningen. (s. 256)

Kursplanerna och betygskriterierna är inte tillräckligt anpassade till elevernas kognitiva utveckling och skilda förutsättningar. Det är för lite fokus på grundläggande kunskaper och färdigheter, särskilt i låg- och mellanstadiet. Vikten av bakgrunds-, referens- eller orienteringskunskaper behöver lyftas fram, liksom vikten av färdighetsträning. Även om fakta betonas något mer i Lgr 22 – bland annat genom att ”kunskaper om” används i målen i vissa ämnen – är det fortfarande förmågor som dominerar i målen. Här behöver alltså balansen mellan å ena sidan grundläggande kunskaper och färdigheter och å andra sidan förmågor som att analysera och reflektera ses över. (s. 256)

De olika delarna i kursplanerna – syfte, centralt innehåll och betygskriterier – styr lärarnas planering, genomförande och uppföljning av undervisningen samt deras bedömning och betygssättning på sätt som delvis inte var avsedda. I kursplanerna SOU 2025:19 Principer och riktlinjer för kursplaner behöver det ingå fler delar så att varje enskild del kan renodlas mer utifrån sina tänkta funktioner. (s. 256)

Kursplanerna saknar systematiska kopplingar till läroplanernas inledande delar. En risk med detta är att det blir oklart vem som ska ta ansvaret för de områden som lyfts fram i de inledande delarna. Samtidigt behöver kursplanerna vara ämnesspecifika. Ett sätt att hantera denna problematik är att i kursplanerna visa på hur varje ämne bidrar till läroplanernas inledande delar. (s. 256)

Kursplanerna behöver innehålla klarare anvisningar om undervisningens genomförande. Ur ett historiskt perspektiv har tidigare svenska kursplaner innehållit såväl avsnitt om metoder som beskrivningar av ämnets karaktär och uppbyggnad. Internationellt är det vanligt med delar som behandlar metoder och arbetssätt i kursplanerna. (s. 256)

Betygskriterierna ska inte styra planeringen av undervisningen och det behöver bli mer fokus på undervisning och lärande än på bedömning och betyg. (s. 256)

Värdeorden som Skolverket införde i Lgr 11 har spelat ut sin roll. De är svårtolkade och alltför generella. Även om dagens betygskriterier är mindre detaljerade än i Lgr 11 bygger de fortfarande på värdeord som är generella för olika ämnen. (s. 256)

Överlag behöver de begrepp som används i kursplanerna bli mer ämnesspecifika. (s. 256)

Förslag: Nedanstående principer ska ligga till grund för de nya kursplanerna för grundskolan, anpassade grundskolan, specialskolan och sameskolan, och utgöra utgångspunkter för framtagandet av kursplanerna. (s. 266)

Kursplanerna ska kännetecknas av en fast kunskapsinriktning. I samtliga ämnen ska vikten av grundläggande kunskaper och färdigheter betonas. Betoningen ska vara starkast i de tidiga årskurserna. (s. 266)

Varje kursplan ska på ett samlat sätt ange vad som ska behandlas i undervisningen, vad det är meningen att eleverna ska lära sig och när det är meningen att de ska göra det. Dessa beskrivningar ska vara så precisa och konkreta som möjligt och gälla för varje stadium och i förekommande fall årskurs. Kursplanerna ska hjälpa lärarna att prioritera så att det viktigaste ges mest utrymme i undervisningen. Beskrivningarna av det som ska ingå i undervisningen ska vara anpassade till de ramar som ges av timplanen. (s. 267)

Beskrivningarna av vad undervisningen ska behandla och vad det är meningen att eleverna ska lära sig ska utgå från begreppen kunskaper, färdigheter och förhållningssätt. Tyngdpunkterna mellan dessa behöver skilja sig åt för ämnen och stadier. (s. 267)

Språket i kursplanerna ska vara ämnesspecifikt och termer som är vedertagna, accepterade och vetenskapligt underbyggda ska användas i så hög utsträckning som möjligt. (s. 267)

Kursplanerna ska ge lärarna stöd för undervisningens genomförande inom varje stadium och i förekommande fall årskurs. (s. 267)

Kursplanerna ska ha en uttrycklig, väl synlig och ämnesförankrad progression mellan varje stadium och i förekommande fall mellan årskurser. (s. 267)

Kursplanernas nivå avseende det som ska behandlas i undervisningen och det som det är meningen att eleverna ska lära sig ska anpassas till barns kognitiva utveckling och olika elevgruppers kognitiva förutsättningar. (s. 267)

Varje kursplan ska ge information om hur ämnet och ämnesundervisningen bidrar till de övergripande målen i läroplanens inledande delar. (s. 267)

Varje del i kursplanestrukturen ska utformas för att fungera så väl som möjligt i förhållande till något eller några av momenten planering, genomförande och uppföljning av undervisningen samt bedömning och betygssättning. (s. 267)

Kursplanerna ska betona undervisning och lärande före bedömning och betygssättning. Målen för undervisningen ska knytas starkare till ämnesinnehållet. (s. 267)

Vi föreslår att nedanstående riktlinjer ska styra arbetet med att ta fram nya kursplaner för grundskolan, anpassade grundskolan, specialskolan och sameskolan.

• Ämnesspecifika instruktioner ska utarbetas som en förberedelse inför kursplanearbetet.

• Arbetsprocessen ska vara transparent och därmed beskrivas och dokumenteras.

• Kompetensprofiler ska tas fram för olika personalkategorier som ska involveras i arbetet.

• Utprövningar av utkast ska göras med lärare och med forskare från olika relevanta vetenskapliga discipliner.

• Kursplanearbetet ska följas upp löpande under arbetets gång. (s. 297)

Ämnesspecifika instruktioner som en förberedelse inför kursplanearbetet

Utifrån det vi kommit fram till i utredningsarbetet föreslår vi att ämnesspecifika instruktioner ska utarbetas som en förberedelse inför kursplanearbetet. Detta ska göras i samverkan med lärare, forskare från olika relevanta vetenskapliga discipliner samt berörda myndigheter och organisationer. Sådana ämnesspecifika instruktioner kan liknas vid de kommentarmaterial som forskarna Ola Helenius och Linda Marie Ahl föreslår att man ska ta fram innan nya kursplaner utarbetas. Genom att inleda arbetet med att först skriva ett kommentarmaterial och därefter ta fram själva kursplanetexten menar de att man kan säkerställa att varje ämne analyseras noggrant så att kursplanernas skrivningar blir tillräckligt genomarbetade bland annat med avseende på innehållets bredd, djup och progression. Vi ser stora möjligheter i det förfarande som Helenius och Ahl beskriver, men föredrar en annan benämning än kommentarmaterial eftersom det begreppet sammanknippas med förklaringar till hur man tänkte i kursplanekonstruktionen. I stället använder vi här ämnesspecifika instruktioner. I sak är innebörden dock liknande. De ämnesspecifika instruktionerna kan publiceras öppet så att det blir transparent vad som utgör utgångspunkter för respektive ämne. Instruktionerna är också ett viktigt underlag för kommentarerna till kursplanerna (se även avsnitt 3.2.5). Erfarenheterna från Lgr 11 visar att det parallellt med det ämnesspecifika arbetet behövs en lyhörd central samordning.80 Även om ämnesperspektivet är centralt för kursplanerna finns det också behov av enhetlighet i en del avseenden. Att omvandla det förberedande arbetet till kursplaner är en grannlaga uppgift där bland annat lärares och forskares perspektiv men likaså juridiska aspekter behöver beaktas. Ett förberedande ämnesarbete inför en kursplanerevidering har enligt vår uppfattning stor potential. I ett sådant arbete kan man exempelvis komma fram till hur urvalet av innehåll ska gå till, vilka kunskaper och färdigheter som ska uttryckas i kursplanen samt vad som ska tas bort och vad som ska tillföras. Ytterst är innehållet i de obligatoriska skolformerna en politisk fråga så det förberedande arbetet bör starta med att regeringen beslutar om vem som ska

ansvara för arbetet med de ämnesspecifika instruktionerna och ger uttryck för sina intentioner i ett uppdrag. I kapitel 10 återkommer vi till tidsplanen bland annat för det förberedande arbetet. (s298-299)

I matematik anser vi att mål och innehåll ska anges för årskurs 1–2 och årskurs 3–4. (s. 311)

Appendix B. Förslag till kursplan i matematik

Ämnets syfte

Matematik är en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning, metodutveckling och för utveckling av matematikspecifika symbolsystem. Människor i alla kulturer skapar matematik för att kunna använda den till att räkna, mäta, orientera sig, hantera lekar och spel, designa och konstruera samt för att förklara fenomen i sin omvärld. Matematik är alltså både ett tillämpat ämne med en mycket bred uppsättning tillämpningar och en kulturföreteelse med världsvid spridning. Det är därför matematik är ett viktigt ämne i svensk skola, liksom i andra skolsystem världen över.

Matematikens abstraktion hanteras huvudsakligen genom starkt sammanlänkade nätverk av matematikspecifika begrepp, metoder och symbolsystem. Sådana symbolsystem kan vara uttryck med siffror och andra tecken, men också grafiska och spatialt orienterade system, som till exempel tallinjer eller koordinatsystem. Matematikens generalitet uppnås genom att samma nätverk av begrepp, metoder och resonemangsformer kan användas för att beskriva och modellera en vid uppsättning av olika fenomen. Det är den kompakta och symboliska naturen av dessa matematikens språk och redskap tillsammans med hur matematikens resultat struktureras i logiskt sammanhängande system som kommer till med hjälp av logisk slutledning som gör matematikens generalitet möjlig och gör den till ett så viktigt verktyg i många olika sammanhang.

Skolmatematikens syfte är att eleverna utvecklar matematiska kunskaper och färdigheter så att de i sin framtid kan använda matematik för att tolka och värdera situationer som är matematiska eller där matematiska perspektiv kan tillämpas, i arbetsliv, vardagsliv, vetenskap och media. Det övergripande målet med skolans matematikundervisning är att elever ska utveckla kunskaper och färdigheter i att hantera matematikens språk och redskap för att med hjälp av dessa kunna ställa matematiska frågor och ge matematiska svar.

Ämnets bidrag till skolans mål

Ämnet bidrar till att eleverna lär sig matematiskt tänkande och hur matematikens språk och framför allt symbolspråk kan användas för att representera icke-matematiska fenomen och hantera dessa med matematiska metoder. På detta sätt bidrar ämnet till förståelse av omvärlden på kvantitativ och annan matematisk grund. Kunskap i matematik, samt vana att tillämpa matematiken i olika sammanhang bidrar även till elevernas förutsättningar att bygga sina uppfattningar om världen på kunskap samt till deras förmåga att hantera sammanhang de ställs inför på ett kritiskt och ansvarsfullt sätt.

Många samhällsfrågor representeras och diskuteras i kvantitativa eller statistiska termer och information presenteras ofta med hjälp av matematikens representationsformer. Därför bidrar också sådana kunskaper som skolmatematiken

kan förmedla till att elever kan ta beslut på välinformerad grund, till exempel beslut relaterade till demokratiska valsituationer. Detta gäller särskilt frågor om hållbar utveckling, där ekonomiska, ekologiska och sociala prioriteringar behöver vägas samman. I den matematikundervisning som rekommenderas i denna kursplan involveras eleverna att dela sina matematiska tankar och uppfattningar samt delta i diskussion med andra. Detta bidrar till att eleverna lär sig att intressera sig för, förstå och respektera andras tankegångar. Ämnets konceptuella karaktär ställer eleverna inför utmaningar som bidrar till att de lär sig att inse värdet av att göra sitt bästa, vara delaktiga och ta ett gemensamt ansvar. Genom ämnet ges eleverna också inblick i metoder med relevans för områden som exempelvis natur- och samhällsvetenskap, teknik, informationsteknologi, tillverkning, finans och försäkring.

Årskurs 1–2: Undervisningsstrategier

Matematiken präglas av att ett relativt litet antal mönster och samband används i många olika situationer. Men när man lär sig matematik är det lätt att också se mönster och samband som är felaktiga eller som inte leder till utvecklingsbara matematiska uppfattningar. Undervisningen ska läggas upp så att sådana icke utvecklingsbara uppfattningar eller missuppfattningar kan synliggöras för att kunna bearbetas och omvärderas.

Eftersom det är mycket tidskrävande att göra detta med varje elev var för sig behöver undervisningen i hög grad bygga på aktiviteter som får elever att i helklass eller grupp dela med sig av sina matematiska tankegångar, ta del av andras tankegångar och delta i fokuserade diskussioner om olika matematiska fenomen. En sådan resonemangsorienterad undervisning utvecklar också elevernas förmåga att kommunicera matematiskt.

Dessutom behöver eleverna arbeta undersökande med problemuppgifter som har potential att åskådliggöra matematiska begrepp och metoder. I sådant arbete förankras elevernas resonemang i deras egna etablerade tankegångar. När arbetet sedan följs upp med lärarledda diskussioner har dessa större chans att få fäste i eleverna, än om läraren utan föregående elevarbete beskriver ett begrepp eller förklarar en metod.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig.

Att delta i en sådan undervisningspraktik som beskrivs ovan är en färdighet i sig. De två första skolårens matematikundervisning ska tydligt inriktas mot att skola in eleverna till att delta i sådan undervisning.

I sin mest effektiva form är matematikens språk och redskap komplexa regelsystem. För att ge dessa system mening måste de dock till en början förankras i det konkreta. De första årens skolmatematik ska därför handla om att med stöd i elevers upplevelsebara värld introducera, förankra och använda sådana tankemodeller som

lägger en stabil kognitiv grund för de viktigaste matematiska begreppen, metoderna och resonemangsformerna, framför allt inom den grundläggande aritmetiken.

Matematikundervisningen ska präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen, framför allt inom aritmetiken, ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna.

Den huvudsakliga inriktningen för de första två årens skolmatematik är att eleverna ska utveckla relevanta utvecklingsbara mentala modeller för tal och de fyra räknesätten och hur de kan representeras. Med mentala modeller avses sätt att tänka på tal och operationer i termer av ikoniska bildsystem och klasser av additiva respektive multiplikativa situationer. Med utvecklingsbara menas att de modellerna som undervisas, ska vara sådana att de är användbara för beräkningar och resonemang. Modellerna ska också vara sådana att de inte i elevernas framtida matematikutveckling skapar onödiga missuppfattningar. Med relevanta menas att modellerna är upplevelsebara av eleverna och kan representeras och hanteras fysiskt och konkret av eleverna i åldersgruppen samt att modellerna understödjer utveckling av kunskap om hur man kan hantera tal och operationer med matematikens symbolsystem.

De fyra räknesätten ska grupperas i additiva och multiplikativa strukturer, där det huvudsakliga undervisningsinnehållet under de första två skolåren är tal och additiva strukturer. En sådan gruppering innebär till exempel att addition och subtraktion ska undervisas tillsammans och att undervisningen ska inriktas mot att elever förstår och kan använda sambandet mellan addition och subtraktion för att både beskriva additiva situationer och hantera och beräkna additiva uttryck. Detsamma gäller för multiplikativa strukturer och sambandet mellan multiplikation och division som dock kan behandlas på ett övergripande sätt de första två skolåren.

Undervisningen ska också behandla matematik från områdena Samband och funktioner, Geometri och mätning, samt Statistik och sannolikhet på ett orienterande och översiktligt sätt och med fokus på sådana aktiviteter som fungerar som tillämpningar på elevernas aritmetikkunskaper. Undervisningen ska också involvera övning i att kunna använda linjal och andra mätverktyg, att rita strukturerade bilder inklusive med hjälp av linjal, att klippa samt att sortera och strukturera samlingar av objekt.

Årskurs 1–2: Mål och innehåll

När begrepp metoder, samband eller resultat listas nedan betyder det (om inte annat anges) att undervisningen ska behandla det nämnda och att målet är att eleverna som ett resultat av undervisningen vid stadiets slut ska ha *kunskap om och kunna använda* begreppet, metoden, sambandet eller resultatet. Mål och innehåll ska anses additiva vilket betyder att det som är mål och innehåll för ett visst stadie ska också vara mål och innehåll för nästkommande stadie. När punkter eller delar av punkter *skrivs med kursiv stil* betyder det att motsvarande innehåll ska behandlas i undervisningen utan att uppnådda kunskaper och färdigheter relaterade till punkten behöver utvärderas summativt.

Aritmetik

Tal

- Talramsan upp till 100, *och från 100 och vidare*, med betoning på den repetitiva formen från 20 och uppåt.
- Räkna uppåt och nedåt, tals efterföljare och föregångare.
- Tio-hopp och talramsan med tiotal, dvs 10, 20, 30... *och till exempel 23, 33, 43*, ...
- Positionssystemet i enkla fall och begreppen ental, tiotal och hundratal. Att 10 är 1 tiotal och 10 ental. Att 100 är 1 hundratal, 10 tiotal och 100 ental.
- Tal för att ange antal och ordning
- Tal som antal och helhet-del-delrelationer inklusive med ikoniska representationer
- Talkamrater med särskilt fokus på femkamrater och tiokamrater.
- Tal som position och längder på tallinjen med särskilt fokus på 5 och 10 som referenspunkter,
- Fler och färre och kopplingen till mer och mindre samt till talramsan och tallinjen

Additiva strukturer

- De fyra additiva situationerna, lägga till, lägga ihop, ta bort och skillnad.
- Representation av additiva situationer med ikoniska helhet-del-delmodeller, och på tallinjen samt med aritmetiska uttryck.
- Sambandet mellan addition och subtraktion och operationernas samband med helhet-del-delrelationer samt additionens kommutativitet
- Additiva talfamiljer

Multiplikativa strukturer

- Enkla multiplikativa situationer med särskilt fokus på proportionella samband av typen *Vad kostar 4 saker om 2 saker kostar 10?*
- Sätta samman lika grupper av antal och dela isär antal i lika grupper.
- Likagruppering och uppdelning med rektangelrepresentationer
- Multiplikationens kommutativitet i enkla fall med rektangelrepresentationer
- Sambandet mellan multiplikation och division i några enkla fall som $10=2\cdot5$, $5=10/2$, $2=10/5$ med koppling till multiplikativa situationer.

- Hur talkamrater, uppdelning av tal och helhet-del-delrelationer kan användas vid beräkningar, med skriftliga metoder och i huvudet.
- Sätta samman tolkning av en additiv situation (i ett steg) med representation som en ikonisk modell och som aritmetiskt uttryck och kunna beräkna uttrycket.

Algebra

Likhet, ekvationer och uttryck

- Likhet och likhetstecknets användning i relationell mening genom att betrakta uppdelning av tal (5=2+3) och likhet mellan uttryck (2+3=4+1) med konkreta och ikoniska antalsmodeller samt hur dessa modeller motsvaras av symboliska uttryck som involverar likhetstecknet.

Mönster och talföljder

- Sortering av objekt efter egenskaper.
- Mönster, framför allt geometriska upprepande mönster *och växande mönster.* Begreppet mönsterdel och hur upprepande mönster kan representeras i generell form.

Funktioner och samband

Variabler och representation av variation och samvariation

- Skapa aritmetiska uttryck som representerar additiva situationer, inklusive som öppna utsagor av typen 5+_=8 och 5+?=8.
- *Göra grafer och tabeller över konkreta tidsberoende fenomen som växande växter som kan representeras i naturlig skala på y-axeln.*

Proportionella samband

- Enkla proportionella resonemang som bygger på barns intuition för att dela lika, fördubbla och halvera mängder och objekt samt skalning med naturliga tal.

Statistik och sannolikhet

- *Samla in data relaterat till elevnära frågor och representera data i konkret eller ikonisk form, t ex som streckräkning med bilder eller som stapeldiagram*
- *Med utgångspunkt i representerad data, beskriva vad som är typiskt och vad som varierar med vardagliga ord (“flest/färst”, “mer/mindre”).*
- *Utifrån insamlad data inleda informella sannolikhetsresonamang i termer av vad är säkert, vad är omöjigt.*

Geometri och mätning

- Känna igen, beskriva och jämföra grundläggande två- och tredimensionella former (trianglar, fyrhörningar, cirklar, klot, kuber, rätblock) och jämföra med former i vardagen.
- Jämföra längder, areor och volymer med vardagsmått och standardenheter (cm, m).
- *Speglingar i vardagen, enkla mönster och symmetrier.*
- Förklara och beskriva figurer med egna ord.

Årskurs 3–4: Undervisningsstrategier

I sin mest effektiva form är matematikens språk och redskap komplexa regelsystem. För att ge dessa system mening måste de dock till en början förankras i det konkreta. Skolmatematiken i årskurs 3 och 4 ska handla om att med stöd i elevers upplevelsebara värld introducera, förankra och använda sådana tankemodeller som lägger en stabil kognitiv grund för de viktigaste matematiska begreppen, metoderna och resonemangsformerna, framför allt inom den grundläggande aritmetiken, för att eleverna ska bli allt bättre på att använda aritmetikens symbolsystem för att kunna göra beräkningar och lösa problem.

Den huvudsakliga inriktningen skolmatematiken i årskurserna 3–4 är att eleverna ska fortsätta att utveckla relevanta utvecklingsbara mentala modeller för tal och de fyra räknesätten och hur de kan representeras. Med mentala modeller avses sätt att tänka på tal och operationer i termer av ikoniska bildsystem och klasser av additiva respektive multiplikativa situationer. Med utvecklingsbara menas att de modellerna som undervisas, ska vara sådana att de är användbara för beräkningar och resonemang. Modellerna ska också vara sådana att de inte i elevernas framtida matematikutveckling skapar onödiga missuppfattningar. Med relevanta menas att modellerna är upplevelsebara av eleverna och kan representeras och hanteras fysiskt och konkret av eleverna i åldersgruppen samt att modellerna understödjer utveckling av kunskap om hur man kan hantera tal och operationer med matematikens symbolsystem.

Matematikundervisningen ska präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen, framför allt inom aritmetiken, ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna.

De fyra räknesätten ska grupperas i additiva och multiplikativa strukturer. En sådan gruppering innebär till exempel att multiplikation och division, samt den associerade representationsformen bråk ska undervisas tillsammans och att undervisningen ska inriktas mot att elever förstår och kan använda sambandet mellan multiplikation och division för att både beskriva multiplikativa situationer och hantera och beräkna multiplikativa uttryck. För additiva strukturer ska undervisningen huvudsakligen präglas av en konsolidering av det tidigare lärandet, och att de etablerade tankemodellerna återanvänds för att hantera bråk och tal i decimalform.

För både additiva och multiplikativa strukturer ska undervisningen inriktas mot att när matematiska situationer, som exempelvis uppgifter i textform, behandlas så ska eleverna först skriva ett aritmetiskt uttryck som beskriver situationen och sedan beräkna detta uttryck. Undervisningen i årskurserna 3 och framför allt 4 behöver därför innehålla uppgifter som är svåra att lösa i huvudet men möjliga att lösa när man väl skrivit ned de aritmetiska uttrycken. För att elever ska lära sig att tolka situationer behöver undervisningen ibland erbjuda uppgifter där det inte är på förhand givet om det är en additiv eller multiplikativ situation som ska behandlas.

Undervisningen ska också behandla matematik från områdena Samband och funktioner, Geometri och mätning, samt Statistik och sannolikhet på ett orienterande

och översiktligt sätt och med fokus på sådana aktiviteter som fungerar som tillämpningar på elevernas aritmetikkunskaper som t. ex. proportionella samband och på begrepp som är särskilt avgörande för den framtida matematikutvecklingen, t. ex. samvariation representerad i grafer (som växande växter, temperaturförändringar), osäkerhet vid mätning och geometriska figurers grundläggande egenskaper och sådana egenskaper kan användas för att klassificera figurer.

Matematiken präglas av att ett relativt litet antal mönster och samband används i många olika situationer. Men när man lär sig matematik är det lätt att också se mönster och samband som är felaktiga eller som inte leder till utvecklingsbara matematiska uppfattningar. Undervisningen ska läggas upp så att sådana icke utvecklingsbara uppfattningar eller missuppfattningar kan synliggöras för att kunna bearbetas och omvärderas.

Eftersom det är mycket tidskrävande att göra detta med varje elev var för sig behöver undervisningen i hög grad bygga på aktiviteter som får elever att i helklass eller grupp dela med sig av sina matematiska tankegångar, ta del av andras tankegångar och delta i fokuserade diskussioner om olika matematiska fenomen. En sådan resonemangsorienterad undervisning utvecklar också elevernas förmåga att kommunicera matematiskt.

Dessutom behöver eleverna arbeta undersökande med problemuppgifter som har potential att åskådliggöra matematiska begrepp och metoder. I sådant arbete förankras elevernas resonemang i deras egna etablerade tankegångar. När arbetet sedan följs upp med lärarledda diskussioner har dessa större chans att få fäste i eleverna, än om läraren utan föregående elevarbete beskriver ett begrepp eller förklarar en metod.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig.

Att delta i en sådan undervisningspraktik som beskrivs ovan är en färdighet i sig som behöver underhållas och utvecklas genom hela grundskolan.

Årskurs 3–4: Mål och innehåll

När begrepp metoder, samband eller resultat listas nedan betyder det (om inte annat anges) att undervisningen ska behandla det nämnda och att målet är att eleverna som ett resultat av undervisningen vid stadiets slut ska ha *kunskap om och kunna använda* begreppet, metoden, sambandet eller resultatet. Mål och innehåll ska anses additiva vilket betyder att det som är mål och innehåll för ett visst stadie ska också vara mål och innehåll för nästkommande stadie. När punkter eller delar av punkter *skrivs med kursiv stil* betyder det att motsvarande innehåll ska behandlas i undervisningen utan att uppnådda kunskaper och färdigheter relaterade till punkten behöver utvärderas summativt.

Aritmetik

Tal

- Talkamrater för talen 1–20, dvs vilka par av tal som summerar till ett visst givet tal.
- Hundrakamrater med tiotal (20 och 80) och ental (21 och 79)
- Positionssystemet, inklusive exempel på tiondelar. Att 100 är 1 hundratal, 10 tiotal och 100 ental. Att 1 är 0,1 tior och 10 tiondelar.
- Bråksystemet, med särskilt fokus på nämnare upp till 10, dvs bråk som 18/5, 3/7 och 6/3
- Bråk som positioner och avstånd på tallinjen, inklusive bråk större än 1.
- Tal i decimalform på tallinjen med huvudsakligt fokus på tiondelar
- Konstruktion och analys av tallinjer för varierade tillämpningar.

Additiva strukturer

- Sambandet mellan addition och subtraktion, inklusive för tal i bråkform.
- Additiva talfamiljer och sambandet mellan additiva beräkningsuttryck (3+5=_, 8–3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8).
- Utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med positiva heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal och metoder som utnyttjar positionssystemet, och även formella additions- och subtraktionsalgoritmer.
- Utföra additioner och subtraktioner med bråk med samma nämnare
- Hantera additiva situationer i flera steg genom att representera dem med ikoniska modeller och aritmetiska uttryck och beräkna dem.

Multiplikativa strukturer

- Multiplikation som lika grupper
- Rektangelrepresentationen av multiplikation och division
- Faktorisering och primtal, till exempel med hjälp av rektangelrepresentationer
- Multiplikationens kommutativitet
- Distributiva lagen med hjälp av rektangelrepresentationer och dess användning för beräkningar av multiplikationer
- Ettans roll vid multiplikation och division.
- Multiplikativa talfamiljer
- Sambandet mellan multiplikation och division.
- Multiplikationstabellerna upp till 10, med särskilt fokus på strukturella relationer baserat på till exempel dubbling/halvering och distributiva lagen.
- Sambandet mellan multiplikationstabeller och division
- Multiplikation upp till 100 med hjälp av positionssystemet och distributiva lagen.
- Multiplikation som hopp på tallinjen.

- Bråk på tallinjen och bråknotationen inklusive bråk större än 1 och blandad form.
- Multiplikativ invers i enkla fall, som att $2 \cdot 1/2 = 1$, och $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.
- Bråkformen för att ange andelar och som multiplikationsoperator, som att $\frac{2}{3}$ multiplicerat med 3 ger talet 2.
- Hantera multiplikativa situationer i ett steg och kunna särskilja multiplikativa från additiva situationer.

Algebra

Likhet, ekvationer och uttryck

- Likhet som utbytbarhet och hur man kan använda likheter för att skapa nya likheter.
- Likheter i form av öppna utsagor eller med andra symboler för obekanta.
- Resonemang som förklarar varför två uttryck är lika.

Mönster och talföljder

- Växande mönster *och hur de kan representeras med aritmetiska uttryck.*

Funktioner och samband

Variabler och representation av variation och samvariation

- Skapa aritmetiska uttryck (med eller utan variabler eller obekanta i form av bokstavssymboler) som representerar matematiska situationer.
- *Skapa och tolka grafer och tabeller över konkreta tidsberoende fenomen som växande växter som kan representeras i naturlig skala på y-axeln.*

Proportionella samband

- Känna igen och kunna representera proportionella samband i tabellform samt med en multiplikationsoperator, som dubbelt-hälften, trippelt- tredjedel.

Statistik och sannolikhet

- *Planera och genomföra små undersökningar relaterat till frågor som eleverna lätt kan förstå men inte vet svaret på.*
- *Arbeta med kategoriska och enkla kvantitativa data*
- *Producera och tolka punkt-/linjediagram och stapeldiagram baserat på elevnära data*
- *Introducera medelvärde (rättvis fördelning), median och variationsbredd*
- *Genomföra upprepade försök (t.ex. kasta en tärning 20 gånger) och tala om relativ frekvens ("ungefär 1 av 6") som ett mått på hur sannolikt något verkar.*
- *Jämföra lika sannolika och inte lika sannolika utfall i enkla situationer (t.ex. snedfördelad påse kulor).*

Geometri och mätning

- Klassificera former efter egenskaper (antal sidor, vinklar, symmetrier)
- Börja använda argument om varför något gäller (”alla fyrhörningar med lika långa sidor är inte kvadrater”).
- *Beräkna omkrets och area av enkla figurer (rektangel, triangel). Introduktion till volym av rätblock.*
- Förstå och beskriva spegling, rotation, förflyttning på rutnät.

Tekniska hjälpmedel och programmering

Programmering

- *Entydiga stegvisa instruktioner och hur de konstrueras, beskrivs och följs som grund*
  för programmering. Hur symboler används vid stegvisa instruktioner.

Årskurs 5–7: Undervisningsstrategier

Undervisningen i årskurserna 5–7 ska präglas av ett ökat fokus på formell matematisk notation och kommunikation. Matematikens notationer och symbolsystem är inte bara centrala för att kommunicera matematik mellan människor utan också för att organisera och administrera sitt matematiska tänkande. Att tydligt och stringent kunna beskriva matematiska argument och resultat i skrift är en förutsättning för att kunna hantera problem vars lösning kräver flera steg och överstiger vad vårt arbetsminne kan hantera. Därför ska sådan matematisk notation vara prioriterad i årskurserna 5–7.

Eftersom matematisk problemlösning karakteriseras av att redan kända metoder kombineras ihop för att lösa nya och mer komplexa problem är ett viktigt fokus för matematiken i årskurserna 5–7 också att utveckla en tillräckligt omfattande samling av matematiska situationer som eleverna kan hantera med metoder som eleverna känner igen, samt att eleverna sätts i situationer där kända lösningar kombineras ihop eller justeras för att lösa nya problem.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig. Att använda kända metoder i nya kontexter på ett kreativt sätt eller i kombination med varandra kan också vara en del i att befästa metoderna i minnet.

Matematikundervisningen ska präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen, ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna. I årskurserna 5–7 ska det också vara ett ökat fokus på att arbeta i formella symbolsystem, inklusive att arbeta med uttryck och likheter som innehåller variabler med bokstavsbeteckningar.

Inom aritmetikområdet ska det vara fortsatt fokus på multiplikativa strukturer och särskilt bråkuttryck och hur dessa kan användas för att beskriva flera olika matematiska situationer och på hur bråkuttryck hanteras i beräkningar. Även bråkuttryckens täta koppling till hanteringen av proportionella situationer ska vara i fokus.

I årskurserna 5–7 behandlas matematik från områdena Funktioner och samband, Geometri och mätning och Sannolikhet och statistik med ökad formalitet jämfört med den översiktliga behandlingen i tidigare årskurser. Särskilt viktiga fokusområden är Proportioner och proportionella resonemang samt användandet av variabler för att kunna ställa upp uttryck för olika matematiska situationer och beräkna dessa som ekvationer. I detta arbete ska det särskilt fokuseras på att eleverna lär sig att ange argument för de likheter de ställer upp.

I de tidigare årskurserna har elevernas upplevelsebara värld huvudsakligen används för att skapa mening åt matematiska begrepp, som exempelvis tal och operationer. I årskurserna 5–7 ska undervisningen också inkludera hur redan konsoliderade matematikkunskaper kan användas för att matematisera situationer som ännu inte är beskrivna matematiskt, beskriva och formulera sådana situationer i matematisk form, så att de kan hanteras med matematiska metoder. Det ställer också ökade krav på att lösningarnas giltighet värderas i relation till originalsituationen

Oavsett om undervisningen handlar om att lösa problem med hjälp av etablerade begrepp och metoder eller om att introducera nya begrepp eller metoder ska den präglas av ett problemlösande arbetssätt. Det betyder att eleverna ska arbeta med uppgifter som de inte har en färdig lösningsmetod för. Dels är det viktigt att träna sig på att kunna hantera matematiska situationer där man inte direkt ser en lösning framför sig. Men ett problemlösande arbetssätt med tydlig uppföljning i helklass eller grupp är också ett sätt för läraren att få information om hur nya begrepp och metoder har fått fäste i elevers etablerade matematiska tänkande. Lektioner eller lektionssekvenser behöver ha en tydlig riktning som kan avslutas med att läraren samlar ihop och strukturerar det som har hänt och ser till att det får en form som är tydligt strukturerad och gärna skriver ned de viktigaste slutsatserna och i senare undervisning tydligt plockar upp dessa igen. Detta är en viktig del i att göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna, och visa att ny matematik nästan alltid bygger på redan etablerade matematiska kunskaper.

Årskurs 5–7: Mål och innehåll

När begrepp metoder, samband eller resultat listas nedan betyder det (om inte annat anges) att undervisningen ska behandla det nämnda och att målet är att eleverna som ett resultat av undervisningen vid stadiets slut ska ha *kunskap om och kunna använda* begreppet, metoden, sambandet eller resultatet. Mål och innehåll ska anses additiva vilket betyder att det som är mål och innehåll för ett visst stadie ska också vara mål och innehåll för nästkommande stadie. När punkter eller delar av punkter *skrivs med kursiv stil* betyder det att motsvarande innehåll ska behandlas i undervisningen utan att uppnådda kunskaper och färdigheter relaterade till punkten behöver utvärderas summativt.

Aritmetik

Tal

- Positionssystemet, inklusive med decimaler
- Positionssystemets translativa egenskaper, som att 30 är 3 tiotal, 30 ental och 0,3 hundratal
- Bråksystemet, lika bråk, förkortning och förlängning och rollen av 1 på formen a/a vid förkortning och förlängning
- Procentform och sambandet med hundradelar samt likheten %=1/100=0,01 och hur den kan användas i beräkningar.
- Negativa tal, inklusive på tallinjen

Additiva strukturer

- Sambandet mellan addition och subtraktion, inklusive för negativa tal
- Subtraktion som addition av den additiva inversen, inklusive med negativa tal
- Additiva talfamiljer och sambandet mellan additiva beräkningsuttryck (3+5=_, 8–3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8) inklusive med negativa tal
- Parentesnotationen och hur till exempel -(5–7) i ett uttryck kan ses som en subtraktion av talet 5–7 eller som den additiva inversen till talet 5–7 och att -(5–7) =-5+7
- Utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal och metoder som utnyttjar positionssystemet, till exempel formella additions- och subtraktionsalgoritmer.
- Utföra additioner och subtraktioner med bråk även med samma nämnare
- Hantera additiva situationer som kan inkludera negativa tal och bråk i flera steg genom att representera dem med aritmetiska uttryck och därefter beräkna dem.

Multiplikativa strukturer

- Ettans roll vid multiplikation och division och vid förenkling av uttryck som innehåller multiplikation och division.
- Bråk, inklusive hur bråk multipliceras och divideras och att det för alla nollskilda a gäller att division med a är samma sak som multiplikation med 1/a
- Multiplikation, division och hantering av bråkuttryck som inkluderar negativa tal och tal i decimalform
- Multiplikativa och proportionella situationer och hur de kan kännas igen och representeras som aritmetiska uttryck och likheter
- Bråknotationen som representation av klasser av situationer som involverar: Vad ska man multiplicera b med för att få a? Hur mycket mer (multiplikativt) är b än a? Vad är skalningsfaktorn som skalar b till a? Vad är förhållandet

mellan a och b? Vilken är förändringsfaktorn som tar b till a? Vad är kvoten mellan a och b? Hur mycket b ryms i a (multiplikativt)? Vad är andelen a av b?
- Hur procentuella förändringar kan hanteras multiplikativt.
- Hantera multiplikativa situationer i flera steg och situationer som mixar additiva och multiplikativa aspekter

Algebra

Likhet, ekvationer och uttryck

- Likhet som utbytbarhet och hur man kan använda likheter för att skapa nya likheter för att förenkla eller skriva om uttryck.
- Likheter och uttryck som inkluderar symboler för obekanta.
- Likheter i algebraisk form, t. ex. för att representera aritmetiska identiteter, som kommutativa och associativa lagarna och distributiva lagen.
- Parentesnotationen och dess användning för att t. ex. ange att negation respektive 3· i fallen -(a+b) och 3·(a+b) ska verka på hela innehållet i parentesen.

Mönster och talföljder

- Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt *och med en sluten formel*
- *Talföljder och talserier.*

Funktioner och samband

Variabler och representation av variation och samvariation

- Skapa och tolka uttryck, ekvationer och funktioner med variabler som representerar matematiska situationer.
- Skapa och tolka grafer i koordinatsystem.

Proportionella samband

- Andelar och förhållanden, inklusive hur de kan anges i bråkform, decimalform och procentform samt även som en tabell.
- Identifikation och representation av proportionella samband, inklusive i standardfall som hastigheter, kilopriser, geometrisk likformighet.
- Hantering av sammansatta enheter som kr/kilo eller kilometer/timma.
- Hantering av proportionella situationer genom att till exempel använda tabellform (tilde-tabell), vägen över 1, eller skalningsoperator.

Statistik och sannolikhet

- *Fördjupa den statistiska cykeln: fråga → samla → analysera → tolka → kommunicera genom praktiskt undersökande arbete;*
- *Med hjälp av konkreta exempel, skilja stickprov från population och diskutera enkel urvalsmetodik och bias.*

- Producera och tolka punkt-/linjediagram och stapeldiagram baserat egeninsamlad eller annan data
- Medelvärde (rättvis fördelning), median och variationsbredd
- Sammanfatta fördelningar med histogram och låddiagram (boxplot); jämföra grupper med centrummått (medel/median) o*ch på en övergripande nivå även spridningsmått samt resonera om variabilitet.*
- Resonera om utfallsrum och enkla kombinatoriska situationer (t.ex. två mynt, tärning + mynt); uppskatta sannolikhet via tabell/diagram eller simulering.
- Tolka och jämföra teoretisk sannolikhet (t.ex. 1/6) och empirisk frekvens (vad som observeras), samt förklara skillnader.

Geometri och mätning

- Analysera geometriska figurer genom att undersöka deras delar (hörn, sidor, vinklar, diagonaler) och egenskaper.
- *Påbörja arbete med definitioner genom att formulera och använda egna och etablerade definitioner för geometriska objekt (t.ex. parallellogram, rektangel, likbent triangel) och pröva om exempel/motexempel uppfyller dem.*
- Använda skala och proportioner i kartor, ritningar, modeller.
- Generalisera formler för area och volym till parallellogram, cirkel, prisma, cylinder).
- Introduktion till skala.
- Resonera med geometriska begrepp och definitioner.

Tekniska hjälpmedel och programmering

Tekniska hjälpmedel

- Mata in uttryck eller beräkningar som innehåller flera delar som ett uttryck i miniräknare eller andra fritt tillgängliga resurser.

Programmering

- *Programmering i visuella programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion och variabel*

Årskurs 8–10: Undervisningsstrategier

Även avancerad matematik introduceras ofta med referenser till ikoniska bildsystem eller konkreta företeelser, men för att effektivt kunna arbeta matematiskt måste man också kunna arbeta med och operera direkt på matematikens symbolsystem. Ett fokus i årskurserna 8–10 är därför att elever ska kunna hantera matematiska situationer på ett flexibelt sätt, oberoende av talområden och talrepresentationer och även om kvantiteter eller objekt betecknas med variabler eller bokstäver.

Matematikundervisningen ska alltså präglas av ett strukturellt algebraiskt förhållningssätt som betyder att undervisningen ska göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna. Algebrans representationsformer och metoder ska ha en tydlig roll inom alla områden av matematiken, särskilt för att hantera funktioner och samband och samvariation. Nya begrepp och representationer inom områdena Funktioner och samband, Geometri och mätning och Sannolikhet och statistik ska introduceras med ökad formalitet jämfört med den översiktliga behandlingen i tidigare årskurser.

Undervisningen i årskurserna 8–10 ska också präglas av användning av formell matematisk notation och kommunikation och av att beskriva argument för samband och resultat med hjälp av formella resonemang. Att tydligt och stringent kunna beskriva matematiska argument och resultat i skrift är en förutsättning för att kunna hantera problem vars lösning kräver flera steg och överstiger vad vårt arbetsminne kan hantera.

I årskurserna 8–10 ska undervisningen liksom i tidigare stadie inkludera hur redan konsoliderade matematikkunskaper kan användas för att matematisera situationer som ännu inte är beskrivna matematiskt, det vill säga beskriva och formulera sådana situationer i matematisk form, så att de kan hanteras med matematiska metoder. Det ställer ökade krav på att lösningarnas giltighet värderas i relation till originalsituationen. Sådana problem kan med fördel hämtas från andra ämnesområden, eller från media och involvera situationer där matematik från olika områden behöver kombineras. Eleverna ska få rika tillfällen att använda den mest avancerade matematiken de kan, vilket. exempelvis betyder att många av de tillämpade problemen ska formuleras så att olika talområden och talrepresentationer måste användas. Detta inkluderar variabler och algebraiska uttryck.

Matematisk problemlösning är en kreativ verksamhet där kombinationer av kända metoder sätts samman eller modifieras för att hantera nya situationer. Med hjälp av ett etablerat bibliotek av matematiska situationer och tillhörande lösningsmetoder, som ibland kan komma från olika delar av matematiken, skapas möjligheter att hantera nya och mer komplexa situationer. Att utvecklas till en kreativ matematisk problemlösare handlar inte bara om att lösa nya problem, utan också om att analysera lösningar och undersöka lösningarna giltighet för att hantera klasser av problem som är näraliggande originalproblemet. På detta sätt hänger matematisk problemlösning och metodutveckling samman.

Undervisningen ska präglas av att eleverna vänjer sig vid att hantera uppgifter de inte på förhand har fått en färdig lösningsmetod för, men där de alltså samtidigt kan känna en trygghet i att modifikationer och kombinationer av metoder och rutiner de redan kan, troligen kommer att hjälpa dem lösa problemet. Oavsett om undervisningen handlar om att lösa problem med hjälp av etablerade begrepp och metoder eller om att introducera nya begrepp eller metoder ska den bygga på ett problemlösande arbetssätt. Dels är det viktigt att träna sig på att kunna hantera matematiska situationer som man inte har en på förhand given metod för att hantera. Men ett problemlösande arbetssätt med tydlig uppföljning i helklass eller grupp är också ett sätt för elever att lära sig och för läraren att få information om hur nya begrepp och metoder har fått fäste i elevers etablerade matematiska tänkande.

Lektioner eller lektionssekvenser behöver ha en tydlig riktning som kan avslutas med att läraren samlar ihop och strukturerar det som har hänt och ser till att det får en form som är tydligt strukturerad och gärna skriver ned de viktigaste slutsatserna och i senare undervisning tydligt plockar upp dessa igen. Detta är en viktig del i att göra matematiken sammanhängande, förutsägbar, pålitlig och utan motsägelser för eleverna, och visa att ny matematik nästan alltid bygger på redan etablerade matematiska kunskaper.

För att befästa begrepp och metoder behöver eleverna över tid få använda dem i varierande situationer snarare än att arbeta med serier av likartade uppgifter som kan hanteras med metoder eleverna har fått förklarat för sig. Att använda kända metoder i nya kontexter på ett kreativt sätt eller i kombination med varandra kan också vara en del i att befästa metoderna i minnet.

Årskurs 8–10: Mål och innehåll

När begrepp metoder, samband eller resultat listas nedan betyder det (om inte annat anges) att undervisningen ska behandla det nämnda och att målet är att eleverna som ett resultat av undervisningen vid stadiets slut ska ha *kunskap om och kunna använda* begreppet, metoden, sambandet eller resultatet. Mål och innehåll ska anses additiva vilket betyder att det som är mål och innehåll för ett visst stadie ska också vara mål och innehåll för nästkommande stadie. När punkter eller delar av punkter *skrivs med kursiv stil* betyder det att motsvarande innehåll ska behandlas i undervisningen utan att uppnådda kunskaper och färdigheter relaterade till punkten behöver utvärderas summativt.

Aritmetik

Tal

- Potenser, exponenter, inklusive negativa, och symbolsystemets aritmetik
- Begreppet och beteckningen roten ur och operationens aritmetik.
- Grundpotensform, inklusive med negativa exponenter
- *Kopplingen mellan bråk som exponenter och n:te rötter, dvs generaliseringar av* $\sqrt{a}=a^{1/2}$

Additiva strukturer

- Additioner och subtraktioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, inklusive med negativa tal och med variabler.

Multiplikativa strukturer

- Hantera multiplikationer och divisioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, potensform och med rotuttryck, inklusive med variabler.
- Hantering av uttryck med blandningar av alla fyra räknesätten, inklusive rollen av faktorisering för att hantera uttryck multiplikativt.

Algebra

Likhet, ekvationer och uttryck

- Hantering av uttryck som kombinerar alla fyra aritmetiska operationerna, tal i olika representationer och icke-numeriska symboler
- Hantering av likheter på formen uttryck=uttryck genom att ersätta det ena uttrycket med ett som är lika eller operera på hela likheten så att den bevaras.
- Linjära ekvationer och enkla ekvationer av andra typer, t. ex. kvadratiska.
- Hur additiv och multiplikativ invers används för att hantera linjära ekvationer och andra enkla ekvationer
- Representation av aritmetikens centrala identiteter (kommutativitet, associativitet, distributivitet, inverser, neutralt element) i algebraisk form.
- Användning och bevis av aritmetiska identiteter i algebraiska form, som den distributiva identiteten $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ och specialfallen konjugatregeln och kvadreringsregeln.

Mönster och talföljder

- Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt och med en sluten formel.
- Talföljder och talserier.

Funktioner och samband

Variabler och representation av variation och samvariation

- Funktionsnotationen f(x) och hur den kan representeras i koordinatsystem.
- Likhet mellan funktioner.
- *Linjära funktioner och notationen $y=kx+m$ och kopplingar till räta linjer i koordinatsystem.*
- *Kurvor i koordinatsystem och vilka kurvor som är kan vara funktionsgrafer $f(x)$.*

Proportionella samband

- Avgöra vilka situationer som representerar proportioner och identifiera proportioner i sammansatta samband.
- Representationerna $a/b=c/d$, $ac=db$, $y=kx$, $f(x)=kx$ för att uttrycka proportionella samband och hur de hänger samman.
- Proportionella samband i koordinatsystem hur de kan konstrueras och läsas av.
- Hantera proportionella situationer säkert och flexibelt.

Statistik och sannolikhet

- Fördjupa den statistiska cykeln: fråga → samla → analysera → tolka → kommunicera i undersökningar av sekundära datamängder

- *Ge kvalitativa beskrivningar av osäkerhet i resultatet av statistiska undersökningar och relatera det till urvalets storlek.*
- Kunna beräkna och använda medelvärde och median och använda dessa begrepp för att diskutera symmetri/skevhet i fördelningar.
- *Använda kalkylprogram för att beräkna spridningsmått*
- Modellera och analysera sammansatta händelser (t.ex. två tärningar, kortdragning utan återläggning) med tabell, lista eller enkel trädmodell; beräkna sannolikheter på grundläggande nivå.
- Resonera om beroende/oberoende och villkorlig sannolikhet i vardagsnära exempel (kvalitativt och med enkla beräkningar), samt diskutera rimlighet och antaganden bakom modellen.

Geometri och mätning

- Avancerade formler (pyramid, kon, klot).
- Använda formler och satser (Pythagoras, likformighet, vinkelsummor, trigonometriska samband). Arbeta abstrakt med definitioner och egenskaper av geometriska objekt.
- Använda Pythagoras sats i area- och längdproblem.
- Tillämpa geometriska kunskaper i verkliga situationer (kartor, design, tekniska tillämpningar).
- Undersök och arbeta med bevis i några enkla fall (t.ex. bevisa vinkelsumman i en triangel, Pythagoras sats).

Tekniska hjälpmedel och programmering

Tekniska hjälpmedel

- Mata in uttryck, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att uttrycken kan utvärderas för olika värden på ingående variabler.
- Mata in funktioner, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att funktionernas grafer kan studeras visuellt.

Programmering

- *Programmering i textbaserade programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion, variabel, tillstånd och funktion*

Appendix C. Progression i Mål och innehåll

När begrepp metoder, samband eller resultat listas nedan betyder det (om inte annat anges) att undervisningen ska behandla det nämnda och att målet är att eleverna som ett resultat av undervisningen vid stadiets slut ska ha *kunskap om och kunna använda* begreppet, metoden, sambandet eller resultatet. Mål och innehåll ska anses additiva vilket betyder att det som är mål och innehåll för ett visst stadie ska också vara mål och innehåll för nästkommande stadie. När punkter eller delar av punkter *skrivs med kursiv stil* betyder det att motsvarande innehåll ska behandlas i undervisningen utan att uppnådda kunskaper och färdigheter relaterade till punkten behöver utvärderas summativt.

Aritmetik

Tal

1–2:

- Talramsan upp till 100, *och från 100 och vidare*, med betoning på den repetitiva formen från 20 och uppåt.
- Räkna uppåt och nedåt, tals efterföljare och föregångare.
- Tio-hopp och talramsan med tiotal, dvs 10, 20, 30... *och till exempel 23, 33, 43*, ...
- Positionssystemet i enkla fall och begreppen ental, tiotal och hundratal. Att 10 är 1 tiotal och 10 ental. Att 100 är 1 hundratal, 10 tiotal och 100 ental.
- Tal för att ange antal och ordning
- Tal som antal och helhet-del-delrelationer inklusive med ikoniska representationer
- Talkamrater med särskilt fokus på femkamrater och tiokamrater.
- Tal som position och längder på tallinjen med särskilt fokus på 5 och 10 som referenspunkter,
- Fler och färre och kopplingen till mer och mindre samt till talramsan och tallinjen

3–4:

- Talkamrater för talen 1–20, dvs vilka par av tal som summerar till ett visst givet tal.
- Hundrakamrater med tiotal (20 och 80) och ental (21 och 79)
- Positionssystemet, inklusive exempel på tiondelar. Att 100 är 1 hundratal, 10 tiotal och 100 ental. Att 1 är 0,1 tior och 10 tiondelar.
- Bråksystemet, med särskilt fokus på nämnare upp till 10, dvs bråk som 18/5, 3/7 och 6/3
- Bråk som positioner och avstånd på tallinjen, inklusive bråk större än 1.
- Tal i decimalform på tallinjen med huvudsakligt fokus på tiondelar
- Konstruktion och analys av tallinjer för varierade tillämpningar.

5–7:

- Positionssystemet, inklusive med decimaler

- Positionssystemets translativa egenskaper, som att 30 är 3 tiotal, 30 ental och 0,3 hundratal
- Bråksystemet, lika bråk, förkortning och förlängning och rollen av 1 på formen a/a vid förkortning och förlängning
- Procentform och sambandet med hundradelar samt likheten %=1/100=0,01 och hur den kan användas i beräkningar.
- Negativa tal, inklusive på tallinjen

8–10:

- Potenser, exponenter, inklusive negativa, och symbolsystemets aritmetik
- Begreppet och beteckningen roten ur och operationens aritmetik.
- Grundpotensform, inklusive med negativa exponenter
- *Kopplingen mellan bråk som exponenter och n:te rötter, dvs generaliseringar av* $\sqrt{a}=a^{1/2}$

Additiva strukturer

1–2:

- De fyra additiva situationerna, lägga till, lägga ihop, ta bort och skillnad.
- Representation av additiva situationer med ikoniska helhet-del-delmodeller, och på tallinjen samt med aritmetiska uttryck.
- Sambandet mellan addition och subtraktion och operationernas samband med helhet-del-delrelationer samt additionens kommutativitet
- Additiva talfamiljer
- Hur talkamrater, uppdelning av tal och helhet-del-delrelationer kan användas vid beräkningar, med skriftliga metoder och i huvudet.
- Sätta samman tolkning av en additiv situation (i ett steg) med representation som en ikonisk modell och som aritmetiskt uttryck och kunna beräkna uttrycket.

3–4:

- Sambandet mellan addition och subtraktion, inklusive för tal i bråkform.
- Additiva talfamiljer och sambandet mellan additiva beräkningsuttryck (3+5=_, 8–3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8).
- Utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med positiva heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal och metoder som utnyttjar positionssystemet, och även formella additions- och subtraktionsalgoritmer.
- Utföra additioner och subtraktioner med bråk med samma nämnare
- Hantera additiva situationer i flera steg genom att representera dem med ikoniska modeller och aritmetiska uttryck och beräkna dem.

5–7:

- Sambandet mellan addition och subtraktion, inklusive för negativa tal
- Subtraktion som addition av den additiva inversen, inklusive med negativa tal

- Additiva talfamiljer och sambandet mellan additiva beräkningsuttryck (3+5=_, 8–3=_) och additiva öppna utsagor (8-_=5, 3+_=8) inklusive med negativa tal
- Parentesnotationen och hur till exempel -(5–7) i ett uttryck kan ses som en subtraktion av talet 5–7 eller som den additiva inversen till talet 5–7 och att -(5–7) =-5+7
- Utföra additioner och subtraktioner i alla talområden med heltal med strategier som bygger på uppdelning och sammansättning av tal och metoder som utnyttjar positionssystemet, till exempel formella additions- och subtraktionsalgoritmer.
- Utföra additioner och subtraktioner med bråk även med samma nämnare
- Hantera additiva situationer som kan inkludera negativa tal och bråk i flera steg genom att representera dem med aritmetiska uttryck och därefter beräkna dem.

8–10:

- Additioner och subtraktioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, inklusive med negativa tal och med variabler.

Multiplikativa strukturer

1–2:

- Enkla multiplikativa situationer med särskilt fokus på proportionella samband av typen *Vad kostar 4 saker om 2 saker kostar 10?*
- Sätta samman lika grupper av antal och dela isär antal i lika grupper.
- Likagruppering och uppdelning med rektangelrepresentationer
- Multiplikationens kommutativitet i enkla fall med rektangelrepresentationer
- Sambandet mellan multiplikation och division i några enkla fall som 10=2·5, 5=10/2, 2=10/5 med koppling till multiplikativa situationer.

3–4:

- Multiplikation som lika grupper
- Rektangelrepresentationen av multiplikation och division
- Faktorisering och primtal, till exempel med hjälp av rektangelrepresentationer
- Multiplikationens kommutativitet
- Distributiva lagen med hjälp av rektangelrepresentationer och dess användning för beräkningar av multiplikationer
- Ettans roll vid multiplikation och division.
- Multiplikativa talfamiljer
- Sambandet mellan multiplikation och division.
- Multiplikationstabellerna upp till 10, med särskilt fokus på strukturella relationer baserat på till exempel dubbling/halvering och distributiva lagen.
- Sambandet mellan multiplikationstabeller och division

- Multiplikation upp till 100 med hjälp av positionssystemet och distributiva lagen.
- Multiplikation som hopp på tallinjen.
- Bråk på tallinjen och bråknotationen inklusive bråk större än 1 och blandad form.
- Multiplikativ invers i enkla fall, som att $2 \cdot 1/2 = 1$, och $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.
- Bråkformen för att ange andelar och som multiplikationsoperator, som att $\frac{2}{3}$ multiplicerat med 3 ger talet 2.
- Hantera multiplikativa situationer i ett steg och kunna särskilja multiplikativa från additiva situationer.

5–7:

- Ettans roll vid multiplikation och division och vid förenkling av uttryck som innehåller multiplikation och division.
- Bråk, inklusive hur bråk multipliceras och divideras och att det för alla nollskilda a gäller att division med a är samma sak som multiplikation med 1/a
- Multiplikation, division och hantering av bråkuttryck som inkluderar negativa tal och tal i decimalform
- Multiplikativa och proportionella situationer och hur de kan kännas igen och representeras som aritmetiska uttryck och likheter
- Bråknotationen som representation av klasser av situationer som involverar: Vad ska man multiplicera b med för att få a? Hur mycket mer (multiplikativt) är b än a? Vad är skalningsfaktorn som skalar b till a? Vad är förhållandet mellan a och b? Vilken är förändringsfaktorn som tar b till a? Vad är kvoten mellan a och b? Hur mycket b ryms i a (multiplikativt)? Vad är andelen a av b?
- Hur procentuella förändringar kan hanteras multiplikativt.
- Hantera multiplikativa situationer i flera steg och situationer som mixar additiva och multiplikativa aspekter

8–10:

- Hantera multiplikationer och divisioner inom alla talområden, med tal i decimalform (positionssystemsform) och bråkform, potensform och med rotuttryck, inklusive med variabler.
- Hantering av uttryck med blandningar av alla fyra räknesätten, inklusive rollen av faktorisering för att hantera uttryck multiplikativt.

Algebra

Likhet, ekvationer och uttryck

1–2:

- Likhet och likhetstecknets användning i relationell mening genom att betrakta uppdelning av tal (5=2+3) och likhet mellan uttryck (2+3=4+1) med konkreta och ikoniska antalsmodeller samt hur dessa modeller motsvaras av symboliska uttryck som involverar likhetstecknet.

3–4:

- Likhet som utbytbarhet och hur man kan använda likheter för att skapa nya likheter.
- Likheter i form av öppna utsagor eller med andra symboler för obekanta.
- Resonemang som förklarar varför två uttryck är lika.

5–7:

- Likhet som utbytbarhet och hur man kan använda likheter för att skapa nya likheter för att förenkla eller skriva om uttryck.
- Likheter och uttryck som inkluderar symboler för obekanta.
- Likheter i algebraisk form, t. ex. för att representera aritmetiska identiteter, som kommutativa och associativa lagarna och distributiva lagen.
- Parentesnotationen och dess användning för att t. ex. ange att negation respektive 3· i fallen -(a+b) och 3·(a+b) ska verka på hela innehållet i parentesen.

8–10:

- Hantering av uttryck som kombinerar alla fyra aritmetiska operationerna, tal i olika representationer och icke-numeriska symboler
- Hantering av likheter på formen uttryck=uttryck genom att ersätta det ena uttrycket med ett som är lika eller operera på hela likheten så att den bevaras.
- Linjära ekvationer och enkla ekvationer av andra typer, t. ex. kvadratiska.
- Hur additiv och multiplikativ invers används för att hantera linjära ekvationer och andra enkla ekvationer
- Representation av aritmetikens centrala identiteter (kommutativitet, associativitet, distributivitet, inverser, neutralt element) i algebraisk form.
- Användning och bevis av aritmetiska identiteter i algebraiska form, som den distributiva identiteten *(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd* och specialfallen konjugatregeln och kvadreringsregeln.

Mönster och talföljder

1–2:

- Sortering av objekt efter egenskaper.
- Mönster, framför allt geometriska upprepande mönster *och växande mönster.* Begreppet mönsterdel och hur upprepande mönster kan representeras i generell form.

3–4:

- Växande mönster *och hur de kan representeras med aritmetiska uttryck.*

5–7:

- Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt *och med en sluten formel*
- *Talföljder och talserier.*

8–10:

- Hur geometriska växande mönster kan representeras rekursivt och med en sluten formel.

- Talföljder och talserier.

Funktioner och samband

Variabler och representation av variation och samvariation

1–2:

- Skapa aritmetiska uttryck som representerar additiva situationer, inklusive som öppna utsagor av typen 5+_=8 och 5+?=8.
- *Göra grafer och tabeller över konkreta tidsberoende fenomen som växande växter som kan representeras i naturlig skala på y-axeln.*

3–4:

- Skapa aritmetiska uttryck (med eller utan variabler eller obekanta i form av bokstavssymboler) som representerar matematiska situationer.
- *Skapa och tolka grafer och tabeller över konkreta tidsberoende fenomen som växande växter som kan representeras i naturlig skala på y-axeln.*

5–7:

- Skapa och tolka uttryck, ekvationer och funktioner med variabler som representerar matematiska situationer.
- Skapa och tolka grafer i koordinatsystem.

8–10:

- Funktionsnotationen f(x) och hur den kan representeras i koordinatsystem.
- Likhet mellan funktioner.
- *Linjära funktioner och notationen y=kx+m och kopplingar till räta linjer i koordinatsystem.*
- *Kurvor i koordinatsystem och vilka kurvor som är kan vara funktionsgrafer f(x).*

Proportionella samband

1–2:

- Enkla proportionella resonemang som bygger på barns intuition för att dela lika, fördubbla och halvera mängder och objekt samt skalning med naturliga tal.

3–4:

- Känna igen och kunna representera proportionella samband i tabellform samt med en multiplikationsoperator, som dubbelt-hälften, trippelt- tredjedel.

5–7:

- Andelar och förhållanden, inklusive hur de kan anges i bråkform, decimalform och procentform samt även som en tabell.
- Identifikation och representation av proportionella samband, inklusive i standardfall som hastigheter, kilopriser, geometrisk likformighet.
- Hantering av sammansatta enheter som kr/kilo eller kilometer/timma.
- Hantering av proportionella situationer genom att till exempel använda tabellform (tilde-tabell), vägen över 1, eller skalningsoperator.

8–10:

- Avgöra vilka situationer som representerar proportioner och identifiera proportioner i sammansatta samband.
- Representationerna *a/b=c/d, ac=db, y=kx, f(x)=kx* för att uttrycka proportionella samband och hur de hänger samman.
- Proportionella samband i koordinatsystem hur de kan konstrueras och läsas av.
- Hantera proportionella situationer säkert och flexibelt.

Statistik och sannolikhet

1-2:

- *Samla in data relaterat till elevnära frågor och representera data i konkret eller ikonisk form, t ex som streckräkning med bilder eller som stapeldiagram*
- *Med utgångspunkt i representerad data, beskriva vad som är typiskt och vad som varierar med vardagliga ord ("flest/färst", "mer/mindre").*
- *Utifrån insamlad data inleda informella sannolikhetsresonamang i termer av vad är säkert, vad är omöjigt.*

3-4:

- *Planera och genomföra små undersökningar relaterat till frågor som eleverna lätt kan förstå men inte vet svaret på.*
- *Arbeta med kategoriska och enkla kvantitativa data*
- *Producera och tolka punkt-/linjediagram och stapeldiagram baserat på elevnära data*
- *Introducera medelvärde (rättvis fördelning), median och variationsbredd*
- *Genomföra upprepade försök (t.ex. kasta en tärning 20 gånger) och tala om relativ frekvens ("ungefär 1 av 6") som ett mått på hur sannolikt något verkar.*
- *Jämföra lika sannolika och inte lika sannolika utfall i enkla situationer (t.ex. snedfördelad påse kulor).*

5-7:

- *Fördjupa den statistiska cykeln: fråga → samla → analysera → tolka → kommunicera genom praktiskt undersökande arbete;*
- *Med hjälp av konkreta exempel, skilja stickprov från population och diskutera enkel urvalsmetodik och bias.*
- Producera och tolka punkt-/linjediagram och stapeldiagram baserat egeninsamlad eller annan data
- Medelvärde (rättvis fördelning), median och variationsbredd
- Sammanfatta fördelningar med histogram och låddiagram (boxplot); jämföra grupper med centrummått (medel/median) *och på en övergripande nivå även spridningsmått samt resonera om variabilitet.*

- Resonera om utfallsrum och enkla kombinatoriska situationer (t.ex. två mynt, tärning + mynt); uppskatta sannolikhet via tabell/diagram eller simulering.
- Tolka och jämföra teoretisk sannolikhet (t.ex. 1/6) och empirisk frekvens (vad som observeras), samt förklara skillnader.

8-10:

- Fördjupa den statistiska cykeln: fråga → samla → analysera → tolka → kommunicera i undersökningar av sekundära datamängder
- *Ge kvalitativa beskrivningar av osäkerhet i resultatet av statistiska undersökningar och relatera det till urvalets storlek.*
- Kunna beräkna och använda medelvärde och median och använda dessa begrepp för att diskutera symmetri/skevhet i fördelningar.
- *Använda kalkylprogram för att beräkna spridningsmått*
- Modellera och analysera sammansatta händelser (t.ex. två tärningar, kortdragning utan återläggning) med tabell, lista eller enkel trädmodell; beräkna sannolikheter på grundläggande nivå.
- Resonera om beroende/oberoende och villkorlig sannolikhet i vardagsnära exempel (kvalitativt och med enkla beräkningar), samt diskutera rimlighet och antaganden bakom modellen.

Geometri och mätning

Obs att detta område inte är genomtänkt pga begränsad tid att hantera uppdraget.

1-2:

- Känna igen, beskriva och jämföra grundläggande två- och tredimensionella former (trianglar, fyrhörningar, cirklar, klot, kuber, rätblock) och jämföra med former i vardagen.
- Jämföra längder, areor och volymer med vardagsmått och standardenheter (cm, m).
- *Speglingar i vardagen, enkla mönster och symmetrier.*
- Förklara och beskriva figurer med egna ord.

3-4:

- Klassificera former efter egenskaper (antal sidor, vinklar, symmetrier)
- Börja använda argument om varför något gäller (”alla fyrhörningar med lika långa sidor är inte kvadrater”).
- *Beräkna omkrets och area av enkla figurer (rektangel, triangel). Introduktion till volym av rätblock.*
- Förstå och beskriva spegling, rotation, förflyttning på rutnät.

5-7:

- Analysera geometriska figurer genom att undersöka deras delar (hörn, sidor, vinklar, diagonaler) och egenskaper.
- *Påbörja arbete med definitioner genom att formulera och använda egna och etablerade definitioner för geometriska objekt (t.ex. parallellogram, rektangel, likbent triangel) och pröva om exempel/motexempel uppfyller dem.*
- Använda skala och proportioner i kartor, ritningar, modeller.
- Generalisera formler för area och volym till parallellogram, cirkel, prisma, cylinder).
- Introduktion till skala.
- Resonera med geometriska begrepp och definitioner.

8-10:

- Avancerade formler (pyramid, kon, klot).
- Använda formler och satser (Pythagoras, likformighet, vinkelsummor, trigonometriska samband). Arbeta abstrakt med definitioner och egenskaper av geometriska objekt.
- Använda Pythagoras sats i area- och längdproblem.
- Tillämpa geometriska kunskaper i verkliga situationer (kartor, design, tekniska tillämpningar).
- Undersök och arbeta med bevis i några enkla fall (t.ex. bevisa vinkelsumman i en triangel, Pythagoras sats).

Tekniska hjälpmedel och programmering

Tekniska hjälpmedel

5–7

- Mata in uttryck eller beräkningar som innehåller flera delar som ett uttryck i miniräknare eller andra fritt tillgängliga resurser.

8–10:

- Mata in uttryck, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att uttrycken kan utvärderas för olika värden på ingående variabler.
- Mata in funktioner, även sådana man inte tidigare nödvändigtvis är bekant med, i allmänt tillgängliga digitala resurser så att funktionernas grafer kan studeras visuellt.

Programmering

3–4:

- *Entydiga stegvisa instruktioner och hur de konstrueras, beskrivs och följs som grund*
  för programmering. Hur symboler används vid stegvisa instruktioner.

5–7:

- *Programmering i visuella programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion och variabel*

8–10:

- *Programmering i textbaserade programmeringsmiljöer. Hur algoritmer kan skapas som programkod. Användning av iteration, selektion, variabel, tillstånd och funktion*

Appendix D. Referenspersoner

Följande personer har läst olika utkast till och delar av de Ämnesspecifika instruktionerna eller kontaktats för diskussion om specifika frågor. Referenspersonerna har gett kommentarer via mail, telefon eller zoom.

Forskare och universitetslärare

Linda Marie Ahl, forskare, Göteborgs universitet

Jorryt van Bommel, professor, Karlstads universitet

Åsa Brorsson, adjunk, Göteborgs universitet, läromedelsförfattare

Susanne Frisk, adjunkt, Göteborgs universitet

Patrik Gustafsson, postdoktor, Mälardalens universitet

Agneta Gulz, professor, Lunds universitet

Thore Husfeldt, professor, IT-universitetet, Köpenhamn

Hannan Innabi, docent, Göteborgs universitet

Angelika Kullberg, professor, Göteborgs universitet

Kerstin Larsson, lektor, Luleå tekniska högskola

Johan Lithner, professor, Umeå universitet

Morten Misfeldt, professor, Köpenhamns universitet

Hanna Palmér, professor, Linneuniversitetet

Andreas Ryve, professor, Mälardalens universitet

Anna Sjödahl, doktorand, Örebro universitet

Christina Skodras, adjunkt, Göteborgs universitet

Utkastet och ursprungsförslaget till kursplan i matematik från SOU 2025:19 har också diskuterats på ett seminarium med anställda på matematikavdelningen, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet.

Ursprungsförslaget till kursplan i matematik från SOU 2025:19 har diskuterats på ett seminarium på Nationellt centrum för matematikutbildning

Lärare

David Brunhage[117], lärare IM, gymnasiet, speciallärare, Uddevalla kommun

Niclas Fohlin, Speciallärare, AcadeMedias grundskolor.

Dennis Färnund, lärare 7–9, Falköpings kommun

Maria Hildebrand, lärare 4–6, kommunövergripande förstelärare, Varbergs kommun

Anna Magnusson, lärare 4–6, kommunövergripande förstelärare, Varbergs kommun

David Nordkvist, gymnasielärare, projektledare, Skara kommun

Cecilia Seiman, lärare F-4, förstelärare, Sigtuna kommun

Daniel Uddenberg, lärare 7–9, lektor, Sigtuna kommun

Tina Åkegård, gymnasielärare, speciallärare, projektledare, Skara kommun

Övriga kontakter och diskussioner

Fredrik Blomkvist, redaktör, projektledare, Rik matematik

Görel Sterner, författare, speciallärare, Skövde

Ursprungsförslaget från SOU 2025:19 har dessutom diskuterat med ett flertal läromedelsförfattare och redaktörer

Utkast och olika riktade frågor har presenterats och diskuterats med ett stort antal lärare och andra medlemmar i Facebookgruppen Matematikundervisning.

Lärargrupp från Skolverkets referensskolor

Dessutom en handfull personer som har gett värdefull feedback, men inte vill stå med som referenspersoner.

[117] David Brunhage och Dennis Färnlund har själva gjort ett stort arbete med att skapa ett eget kommentarmaterial för högstadiet baserat på förslaget till matematikkursplan i SOU 2025:19. Kontakta david.brunhage@protonmail.com för mer information.