STÖDMATERIAL

Särskilt begåvade elever

2.4 Ämnesdidaktiskt stöd i matematik

CECILIA ERIKSSON OCH HENRIK PETERSSON

2.4 Ämnesdidaktiskt stöd i matematik

CECILIA ERIKSSON OCH HENRIK PETERSSON

Detta ämnesdidaktiska stöd utgår från de texter som beskriver vilka de särskilt begåvade eleverna är och hur man kan anpassa undervisningen för dessa elever. Läs dem gärna i sin helhet innan du läser detta material. Några av de viktigaste punkterna från de andra texterna följer nedan.

Särskilt begåvade elever

- är inte en homogen grupp, de kan inte alla stödjas på ett och samma sätt – inte ens inom ett och samma ämnesområde
- behöver mötas av acceptans och få erkännande för sina styrkor
- identifierar sig ofta med att kunna och veta till skillnad från att bemästra och lära, vilket gör att de behöver lära sig studieteknik
- bör få möjlighet att arbeta med elever på samma nivå
- måste undervisas, stödjas och ledas av ämneskunnig personal
- behöver både berikning och acceleration inom sina styrkeområden.

FÖRFATTARE

Cecilia Eriksson är speciallärare i matematik och ämneslärare i matematik, naturvetenskap och teknik för årskurs 4–9 och forskarstuderande inom naturvetenskapsämnenas didaktik vid Stockholms universitet. Hon har bland annat byggt upp fördjupningsgrupper i matematik för grundskolan med utgångspunkt i problemlösning.

Henrik Petersson är docent i matematik och arbetar som lektor på Hvitfeldtska gymnasiet i Göteborg, med bland annat med skolans spetsutbildning i matematik. Han har även skrivit en breddningsbok i matematik för gymnasieskolan.

ILLUSTRATION: ELIN JONSSON

Vi vill med detta inspirationsmaterial belysa utmärkande förmågor hos särskilt begåvade matematikelever, hur dessa kan ta sig uttryck, och hur man som lärare på olika sätt kan arbeta för att stimulera en fortsatt utveckling av dessa förmågor.

Kännetecken på särskild begåvning i matematik och hur du upptäcker den

Höga betyg i matematik innebär att eleven visar upp både en bredd och ett djup inom ett antal förmågor. Grundskolans och gymnasieskolans undervisning i matematik ska ge eleverna möjlighet att utveckla

- problemlösningsförmåga
- begreppsförmåga
- procedurförmåga
- resonemangsförmåga
- kommunikationsförmåga (Lgr 11, Lgy 11).

För gymnasieskolan tillkommer också modelleringsförmågan. Men alla särskilt begåvade elever uppnår inte högsta betyg i matematik och det finns många anledningar till att ett särskilt begåvat barn inte realiserar sin potential i skolan (se t.ex. avsnitt *1.1 Inledning – att uppmärksamma de särskilt begåvade eleverna*). Att en elev når högsta betyget i matematik behöver heller inte innebära att eleven är särskilt begåvad i matematik. Men det är ett tecken på att eleven behöver utmaningar i matematik. På motsvarande sätt är ett högsta betyg för en särskilt begåvad elev inte ett kvitto på att läraren fullt ut lyckats i arbetet med eleven (Greenes 1981; Pettersson, 2011). Eleven kan ha en kapacitet för betydligt mer komplext och abstrakt arbete än vad kursplanen för elevens ålder kräver, något som lärare bör vara uppmärksamma på.

Matematisk kreativitet är ett tecken på särskild begåvning

Det är svårt att specificera vad lärare kan söka efter för att identifiera särskilt begåvade elever. Lärare som sedan många år tillbaka arbetar med särskilt begåvade matematikelever har lärt sig att känna igen de utmärkande matematiska förmågorna när de möter dem i undervisningen, men de har trots det svårigheter att formulera vad det är de ”ser” hos eleverna (Mattsson, 2013b). Lärare inom matematikintensiva program på svenska gymnasieskolor brukar lyfta fram matematisk kreativitet som det mest utmärkande karaktärsdraget på särskild matematisk begåvning (Mattsson, 2010; Mattsson 2013b). Det nära sambandet mellan matematisk kreativitet och särskild begåvning i matematik syns även i internationell forskning (Leikin, Berman & Koichu, 2009). Forskarna visar inte någon tydlig skiljelinje mellan särskild begåvning i matematik och matematisk kreativitet, men matematisk kreativitet förknippas ofta med högsta nivån av matematisk förmåga (Leikin et al. 2009). Sheffield (2003, s. 5) illustrerar detta med en utvecklingslinje som elever rör sig längs i sin strävan efter matematisk utveckling.

Figur 1. Sheffields (2003) kontinuum av matematiska förmågor.

Elever kan uppvisa matematisk kreativitet genom att själva upptäcka och skapa något för dem helt nytt i matematik (Leikin et al. 2009; Sheffield, 2009; Lithner, 2008; Sriraman, 2008). Det kan t.ex. vara att de finner lösningar på uppgiftstyper de aldrig stött på förut och att de själva formulerar matematiska samband som inte tidigare presenterats för dem. Förutom förmågan att skapa något nytt så förknippas matematisk kreativitet även med flexibelt och reversibelt tänkande samt en lätthet i att komma på många olika idéer (Greenes, 1981; Leikin et al. 2009; Sheffield, 2009).

Exempel 1 visar hur matematisk kreativitet kan synas i en elevs lösning.

> *Exempel 1.* Kim går andra året på gymnasiet, och studerar följande problem tillsammans med sin lärare: Visa att om n och $3n$ har samma siffersumma, där n är ett positivt heltal, så är n delbart med 3.
>
> Kim känner till delbarhetsregeln för 3 och 9, baserad på siffersumman, och konstaterar att eftersom talet $3n$ uppenbart är delbart med 3 måste dess siffersumma vara det. Men då är n delbart med 3, eftersom siffersumman för n överensstämmer med den för $3n$.

Kim resonerar vidare att n i själva verket måste vara delbart med 9. Eftersom $3n$ är delbart med 9 då n är delbart med 3, måste den gemensamma siffersumman för $3n$ och n vara delbar med 9, och därmed även n.

Läraren frågar Kim hur det blir med fallet n och $4n$. Vad innebär det om dessa tal har samma siffersumma? Kim konstaterar att hans motsvarande resultat då inte stämmer, han ger exemplet $n = 3$ och $4n = 12$. Dessa tal har samma siffersumma men n är inte delbart med 9.

Hur blir det med n och $5n$ fortsätter läraren, gäller ditt resultat för dessa par av tal? Kim inser att $(9{,}45)$ är det ”första” talparet $(n{,}5n)$ med samma siffersumma, och finner även talparen $(n{,}5n) = (18{,}90)$, $(27{,}135)$, $(36{,}180)$ med samma siffersumma. Jag tror att det kanske stämmer, säger Kim. Kim växlar nu strategi (flexibilitet) och säger att siffersumman $s(n)$ för n är kongruent med n modulo 9, för alla heltal n. Så om n och $5n$ har samma siffersumma så måste $n \equiv 5n$ modulo 9. Redan här ser Kim det allmännare. Han konstaterar, då är $4n \equiv 0$ så n måste vara delbart med 9 eftersom 4 inte innehåller några treor, och det måste vara så att det stämmer även för paret n och $6n$, och för n och $8n$, men inte för n och $7n$.

Vad är det som stämmer, frågar läraren, kan du formulera? Om n och an har samma siffersumma, där a är ett positivt heltal och $a-1$ inte är delbart med 3, så är n delbart med 9. Läraren fyller på: I själva verket verkar du ha ett bevis för att n är delbart med 9 om an och bn har samma siffersumma för några positiva heltal a och b med $3 \nmid (a - b)$.

Det verkar som det omvända också kan stämma, säger Kim (reversibelt tänkande). Kim går tillbaka till sina beräkningar i fallet n och $5n$, och säger att det verkar som om n och $5n$ alltid har samma siffersumma då n är delbart med 9, men jag vet inte. Diskussionen fortsätter…

Matematiska förmågor hos särskilt begåvade elever

I de svenska läroplanerna är matematisk problemlösning en central del, och särskild begåvning i matematik är ofta knuten till förmågor som uppvisas vid matematisk problemlösning (Sriraman, 2005). Många aktuella studier utgår från Krutetskiis (1976) studie av särskilt begåvade matematikelever. Krutetskii identifierar dessa förmågor i problemlösningsprocessen:

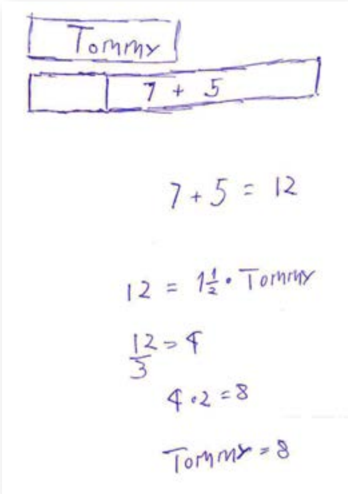
> **F1.** Förmåga att formalisera matematiskt material: att skilja form från innehåll, att operera med formella strukturer av relationer och samband.
> **F2.** Förmåga att generalisera matematiskt material.
> **F3.** Förmåga att operera med siffor och andra symboler.
> **F4.** Förmåga till sekventiellt, logiskt resonerande: kunna skilja på förutsättningar för och slutsatser av ett resonemang och förmågan att dra slutsatser från givna förutsättningar.
> **F5.** Förmåga att förkorta resonemang, klart och enkelt i slutsatser.
> **F6.** Förmåga till flexibilitet och reversibilitet, skifta tankemodeller och vända tankegångar.
> **F7.** Förmåga att minnas matematisk information som gör det möjligt att använda erfarenheter i nya problemlösningssituationer, exempelvis relationer mellan storheter och argumentationsscheman.
> **F8.** Generell fallenhet och intresse för matematik i en lust att söka matematiska aspekter av omvärlden (Krutetskii, 1976, i Pettersson & Wistedt, 2013).

Dessa förmågor kan ta sig olika uttryck, och en elev kan betraktas som särskilt begåvad även om inte hela registret av förmågor F1–F8 är framträdande. Notera även speciellt att förmågorna i F6 är yttringar av kreativitet som vi resonerade om ovan.

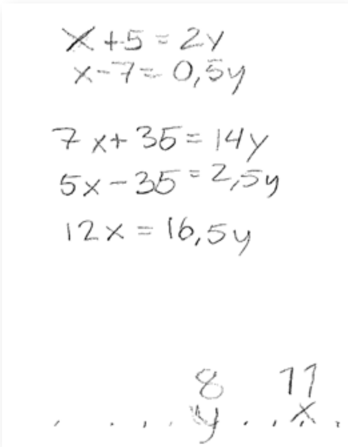
Exempel 1 visar hur förmågor såsom kreativ förmåga och förmågan att generalisera kan komma till uttryck. Vi ger här ytterligare ett exempel där vi belyser hur matematiska förmågor kan visa sig i en konkret problemsituation. I Exempel 2 löser Johan och Sara, som båda går i årskurs 7–9, samma uppgift men med olika strategier.

Exempel 2. Johnny och Tommy spelar pingis. Om Johnny haft 5 poäng mer än han har skulle han ha dubbelt så många poäng som Tommy. Om Johnny haft 7 poäng mindre än han har skulle han haft hälften så många poäng som Tommy. Hur många poäng har Johnny?

Johan löser problemet genom att observera att skillnaden i antal poäng i de två fallen ges av $5+7=12$ och att denna skillnad motsvarar en och en halv del av Tommys poäng:



Sara löser problemet med hjälp av ekvationssystem:



Sara väljer att lösa ekvationssystemet genom att multiplicera båda leden i den första ekvationen med sju och i den andra med fem. Hon ser genom dessa operationer en möjlighet att eliminera konstanttermerna på ett smidigt sätt. Resultatet blir en diofantisk ekvation och Sara hittar det ”första” paret av positiva heltalslösningar. Med punkterna … i hennes lösning ovan visar hon att hon troligen inser att det finns flera lösningar. (Samtliga heltalslösningar till ekvationen $12x=16{,}5y$ ges av $=11k$, $y=8k$ där k är ett heltal.)

Båda eleverna visar med sina lösningar exempel på förmåga att tolka en problemformulering, att se helheten och samtidigt arbeta med delarna (F1). Sara är mycket systematisk och skriver ner de två samband hon tolkar i uppgiften och använder ett logiskt resonerande (F4) där de två ekvationerna kan ses som slutsatser från uppgiftens givna förutsättningar. Johan upptäcker direkt den formella strukturen i problemet, har en tydlig logisk slutledningsförmåga (F4) där han hoppar över stegen med två ekvationer och direkt skriver ner en sammanslagning av dessa i ett samband (kan liknas vid en ekvation). Han visar i dessa steg på en förmåga att förkorta resonemanget och enkelt dra slutsatser (F5). Johan har aldrig sysslat med ekvationer eller obekanta medan Sara ligger långt före i kursmaterialet och tidigare varit i kontakt med enklare ekvationer. Sara visar förmåga att uttrycka sig med hjälp av matematiska symboler (F3). Johan skriver oftast inget då han löser matematiska problem utan gör allt i huvudet. Vid denna övning var han ombedd att skriva ner sin lösning (Pettersson, 2011, s. 117–119; Pettersson & Wistedt, 2013).

Utvecklingsmöjligheter för särskilt begåvade elever

Precis som alla elever kan särskilt begåvade elever ha vissa matematiska förmågor som är mer utvecklade än andra. Vilka förmågor som är starkare respektive svagare varierar från individ till individ. Men till följd av särskilt begåvade elevers snabbhet i tanken, deras förmåga att förkorta sina tankeprocesser och därmed ”se” lösningen direkt är det relativt vanligt att dessa elever inte tecknar ned en detaljerad lösning (se exempel 2). Det långsamma skrivandet stör deras tankeflöde och de undrar ofta varför de ska skriva ned någonting som är så uppenbart.

Just avsaknaden av detaljerade, mer fullständiga, lösningar är vanligt hos särskilt begåvade elever. Det är här viktigt att man inte låter krav på redovisning av bakomliggande resonemang hämma tankeflödet och motivationen hos eleven. Men för att eleven ska komma vidare i sin matematiska utveckling är det viktigt att hon eller han utvecklar sin förmåga att kommunicera matematik.

UNDERVISNINGSMETODER OCH LÄRARENS FÖRHÅLLNINGSSÄTT

Särskilt begåvade elevers intresse för matematik är sällan grundat på att de tänker sig en framtida karriär som matematiker. Att säga att något är viktigt för framtida bruk fungerar därför sällan som motivation och att peka på deras brister och kunskapsluckor är heller inget som väcker deras engagemang. Tvärtom finns det många särskilt begåvade elever som tappar intresset när lärare fokuserar på deras tillkortakommanden. Att exempelvis i yngre åldrar tvinga elever att ägna för stor del av tiden till att skriva snygga och rättvända siffror är inte utvecklande för eleverna, i synnerhet inte för de särskilt begåvade eleverna och riskerar i stället att skapa frustration.

Matematik som intellektuell lek

Det som ofta lockar de särskilt begåvade eleverna är i stället matematiken som en intellektuell lek. Det är det lustfyllda som driver dem, och deras lust måste vårdas. För att eleverna ska lockas till att utveckla olika förmågor i matematiken gäller det att utnyttja denna inre drivkraft och att bygga på elevernas styrkor. Det kan exempelvis innebära att man bistår med problem och andra uppslag som intresserar och engagerar eleverna. Det kan också innebära att man lyfter fram elevens egna ofta okonventionella sätt att resonera kring en problemställning. Skälet till att eleven ska göra något annorlunda känns därmed ofta mer relevant och begripligt för eleven.

Exempel 3 visar hur läraren utgår från elevens eget sätt att tänka och därifrån väcker elevens behov av att förtydliga sin redovisning.

Exempel 3. En elev studerar ekvationen $2\sqrt{x}-x\sqrt{2}=0$. Eleven kommer snabbt fram till svaren, eller något svar, med bristande förklaring. Eleven ”ser” lösningarna. I stället för att påpeka att elevens lösning är fel kan du kommentera den bristande redovisningen och fråga Hur vet vi att detta är de enda lösningarna utifrån dina svar? Behovet av att redovisa tankegången blir på detta sätt begripligt.

Det är viktigt att du fokuserar på *kommunikationen* mellan dig som lärare och din elev (se exempel 1) och intresserar dig för och utgår från elevens sätt att tänka. Nedan följer andra exempel på frågor som *bjuder in* eleven att resonera *utifrån sitt* arbete (jämför Berggren och Trygg, 2010, s. i:11–i:12):

- Finns det flera lösningar? Hur många?
- Finns det fördelar och nackdelar med olika lösningsstrategier? Motivera varför.
- Kan du visa lösningen med representationsformer (ord, bild, tal, formel…)?
- Går det att generalisera ditt resultat?
- Är svaret rimligt?
- Kan du kontrollera din lösning? Finns det olika sätt att göra detta?
- Har arbetet med problemet gett dig ny kunskap? I så fall vilken?
- Har du arbetat med något liknande problem tidigare? Jämför.

Det gäller också att visa på lösningsstrategier för eleven som kommer fungera på sikt. Som lärare för elever med särskilda matematiska förmågor behöver du ibland se bortom årskursens centrala innehåll för att hitta rätt innehåll och använda varierade metoder. Tänk igenom olika möjliga lösningsförslag inför undervisningstillfällen och förvånas inte över helt nya som du snabbt behöver kunna sätta dig in i, det är en grund för att lyckas med att stödja dessa elever att utvecklas vidare.

Normer i matematikundervisningen

Det är också viktigt att vara vaksam på de normer som råder i klassrummet. Det finns *matematiska normer* exempelvis för vad som kan anses som en lösning på ett matematiskt problem, vad som kan tänkas vara en alternativ eller mer effektiv lösning på problemet och vad som är ett matematiskt godtagbart argument för lösningen. I skolan behöver vi skapa normer som underlättar för eleverna att komma i kontakt med de matematiska reglerna. Alltså normer för undervisning i matematik s.k. *sociomatematiska normer* (Cobb & Yackel, 1996; Pettersson, 2011; Pettersson & Wistedt, 2013; Yackel & Cobb, 1996).

Om en matematisk norm är att ett svar eller en lösning på ett problem kräver argumentation, följer att en sociomatematisk norm är att eleverna får möjlighet att lära sig argumentera för sina lösningar. På samma sätt behöver eleverna få möjlighet att diskutera alternativa lösningar, se vad som skiljer dem åt, bedöma och avgöra vilka kvaliteter som finns i de olika lösningarna. Dessutom finns *klassrummets sociala normer* oberoende av ämne, det är regelbundna mönster som reglerar elevers och lärares interaktion med varandra. Sådana normer kan exempelvis vara hur man samtalar i klassrummet, att elever räcker upp handen, att det är viktigt att lyssna när en enskild elev eller läraren talar. Klassrummets sociala normer kan också innebära att det är viktigt att alla förstår och kan följa de resonemang som förs i klassrummet eller att alla får komma till tals i samma omfattning. De sociomatematiska och de sociala normerna kan i vissa fall komma i konflikt. Läs mer om sådana konflikter och hur detta kan ta sig uttryck i klassrumssituationer i *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor* (Pettersson, 2011) samt *Barns matematiska förmågor – och hur de kan utvecklas* (Pettersson och Wistedt, 2013).

Som lärare har du uppgiften att kontinuerligt ge eleverna nytt bränsle och stimulans som utmanar dem och som de kan vara kreativa kring. Det räcker inte med ”genom den här fördjupningsuppgiften i slutet på läsåret eller kursen så får de duktiga eleverna sitt”. Du kan inte räkna med att det går att föra över ditt eget engagemang för något. Det fungerar sällan med ”det här tycker jag är intressant, titta på detta”. Särskilt begåvade elever vill gärna själva välja sitt engagemang, de vill själva upptäcka, definiera och skapa sitt intresse. De vill vara delaktiga i problemställningen. Det är därför viktigt att du kan känna dig trygg i att utmana elever att formulera matematiska frågeställningar även om du inte har ett färdigt lösningförslag som stöd för samtalet. Att se undervisningen, exempelvis arbetet med ett problem, som ett gemensamt projekt kan vara en nyckel för utvecklande samtal (notera exempelvis samspelet mellan lärare och elev i exempel 1).

Visa alltså ditt engagemang utan direkt anspråk på motprestation, och möt samtidigt elevens intresse för något. Var en förebild för matematisk nyfikenhet. Ditt engagemang, ditt bemötande och ditt förhållningssätt till matematiken är minst lika viktigt som innehållet i det du förmedlar. Miljön, det matematiska klimatet, är alltså viktig för att eleverna ska kunna blomma ut.

Möta andra särskilt begåvade elever

Läraren fungerar som ett bollplank för kreativa tankar, men det är också viktigt att särskilt begåvade elever kommer i kontakt med jämlika elever. Eleverna kan på detta sätt fungera som en kreativ kraft åt varandra, och det minskar risken att eleverna känner sig ensamma och missförstådda. Det är även positivt om särskilt begåvade elever får möta personer som de kan se som förebilder för vidare studier i ämnet. Det kan vara äldre elever eller vuxna verksamma inom andra institutioner. I de tidigare skolåren kan en förebild även vara en ”matematikmentor” i form av en speciallärare i matematik som regelbundet stöttar arbetet med de mer drivna eleverna. I de senare skolåren i grundskolan kan t.ex. lärare med behörighet för undervisning i gymnasieskolan behöva knytas till skolan för ett systematiskt arbete. Positivt är även andra utbyten mellan grundskola och gymnasieskola.

Förutsättningarna för att låta särskilt begåvade elever träffas är olika. Genom spetsutbildningar i grundskolan och gymnasieskolan finns särskilda förutsättningar för matematiskt drivna elever att mötas. Eleverna samlas här i gemensam klass eller läser sina spetsämnen gemensamt vilket gör att de i det dagliga arbetet har kontakt med jämbördiga. Det finns även andra former av grupperade lösningar där man låter intresserade elever samlas i den dagliga verksamheten och genom kontinuerliga undervisningstillfällen.

Det finns exempel där högskolor och universitet ordnar träffar för gymnasieelever, med olika former av fördjupningsverksamhet, exempelvis matematiska cirklar (Kungliga Tekniska högskolan, 2015), vektorgeometri för gymnasieelever (Linnéuniversitetet, 2015) och problemlösningskurs (Stockholms universitet, 2015). På motsvarande sätt finns samarbeten mellan grundskola och gymnasieskola där grundskoleelever får komma till en gymnasieskola och delta i olika former av breddningsverksamhet. De stadieöverskridande samarbetena fungerar ofta om de bygger på kontinuitet och att det finns en klar tanke och ett uttalat mål med verksamheten.

Tävlingar ger också möjligheter att komma i kontakt med andra matematikintresserade elever. I grundskolan har vi exempelvis *Pythagoras Quest, Sigmaåttan, Högstadiets matematiktävling* samt *Kängurutävlingen* (där tävlingens flervalsuppgifter är utmärkta problem att arbeta vidare med). Kängurutävlingen har även sin motsvarighet för gymnasieelever, och för gymnasiet finns även *Skolornas matematiktävling*, där de främst placerade erbjuds en korrespondenskurs. Det är viktigt att lärare och skolledare informerar eleverna om dessa tävlingar och att eleverna får möjlighet att delta. Ytterligare information om tävlingar och aktiviteter som rör särskilt begåvade elever i matematik finns på t.ex. NCM:s webbsida ”Mattetalanger” (mattetalanger.ncm.gu.se).

Förslag på aktiviteter

Vi ger här några förslag på konkreta aktiviteter i arbetet med särskilt begåvade elever. Vi vill lyfta fram aktiviteter som inte är beroende av vilket område i matematiken som är aktuellt. De föreslagna ingångarna kan ses ligga som en ”hinna” över vilket matematiskt område som helst. Förenklat syftar fokusområdena nedan till att möta och vidareutveckla elevernas särskilda förmågor som berördes i textens inledning, och detta i en riktning mot att bygga upp viktiga kvaliteter för mötet med ny matematik. Aktiviteterna ska också skapa uttrycksformer för eleverna och därigenom skapa förutsättningar för att kommunicera matematik. Detta är inte minst viktigt för att de ska komma vidare i sin kreativitet. Problemförslagen kopplade till de olika aktiviteterna är lämpliga för olika åldrar.

(A) Lek med symbolspråket. Utmana eleverna genom att välja okonventionella variabelnamn och liknande. Det utvecklar förmågan att avkoda problemställningar och bidrar till att stimulera elevens kreativitet (F1, F3, F6). Eleverna blir mindre hämmade i sitt sätt att tänka och de känner sig friare i sina resonemang.

Förslag på problem:

a) Finns det olika tal a och b sådana att $a^b = b^a$?

b) På vilka sätt beskriver ekvationen $x = y^2 + 4y - 7$ en funktion?

c) Bestäm möjliga x då $x^2 + (p + q)\,x + pq = 0$.

d) Vad är k-värdet för den räta linjen med ekvationen $y=3x + k$?

e) Vilka komplexa tal z uppfyller $\mathrm{Im}\,\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Re}\,\mathrm{Im}\,z$?

I det första problemet ligger observationen $2^4=4^2$ kanske närmast, men även $(-2)^{-4} = (-4)^{-2}$ gäller exempelvis. En diskussion kring problemet kan handla om olika strategier för att bestämma möjliga värden på a och b. En fullständig utredning av problemet kräver analysens verktyg, men om vi begränsar problemet till fallet att a och b är positiva heltal, så blir verktygen inom talteorin tillgängliga.

Det andra problemet, Ab, utmanar eleven i att tänka y som funktion av x, och (mer okonventionellt) x som funktion av y. Diskussionen kan fördjupas genom att blanda in olika val av definitionsmängder. I samband med problem Ac kan frågan lyftas om begreppet pq-formel är ett bra begrepp, och på samma sätt i Ad, är k-värde ett bra begrepp?

Arbete med komplexa tal erbjuder många möjligheter att laborera med spännande identiteter och ekvationer, ett exempel finns i Ae. Några ytterligare exempel på detta: undersök möjliga z då $\bar{z} + |z|i = 2 + 3i$, bestäm alla komplexa tal z sådana att $z|z| = \bar{z} + |z|i$ och, slutligen, har ekvationen $z^i = i^z$ någon mening eller lösning?

(B) Lek med definitioner och begrepp. Ifrågasätt givna definitioner, låt eleverna arbeta med nya definitioner. Låt även eleverna introducera egna definitioner och begrepp, och dra slutsatser kring dessa. Genom att ge elever här-och-nu-uppgifter, dvs. problem som de inte har någon förförståelse kring, kan du hålla uppe energin, aktiviteten och närvaron hos särskilt begåvade elever. Dessa elever tappar tempo i brist på stimulans. Förmågan att ta till sig begrepp och definitioner, är oerhört viktig i kunskapsbygget i området matematik, och vi kan koppla detta till förmågorna F1 och F4.

Förslag på problem:

a) Ett *kvadrattal* är ett tal som är kvadraten av ett heltal. Två heltal a och b är *kamrattal* då produkten $a \cdot b$ är ett kvadrattal. Vilka av talen $1, \ldots, 100$ är kamrat med talet 6?

b) Vad skulle det innebära om talet 1 vore ett *primtal*?

c) Ett *halvtal* är ett tal a sådant att $2a$ är ett heltal. Bevisa att summan av två halvtal är ett halvtal. (Från Petersson, 2013.)

d) Räkneregeln *addiplikation* $*$ definieras $a * b = a \cdot b + a + b$. Lös ekvationen $3 * x = 4$.

e) En triangel kallas *sexaginta* då dess sidor kan namnges a, b och c så att
$c^2 = a^2 + b^2 - ab$.
Undersök om det finns rätvinkliga trianglar som är sexaginta.

Det första problemet handlar om att ta till sig, och hålla isär, begreppen kvadrattal och kamrattal. Alternativa frågeställningar: visa att varje par av kvadrattal är kamrattal, och, visa att ett kvadrattal inte kan vara kamrat med något annat än ett kvadrattal. Vid arbete med Bb bör du kommentera hur vi då skulle tappa entydigheten vid primtalsfaktorisering. Detaljer vid definitionen av begrepp är viktiga.

I problemen, Bc – Be, utmanas eleverna framför allt i att hålla isär vad som är givet och vad som ska visas. Problem Bd kan varieras på olika sätt, exempelvis: för vilka tal a har ekvationen $a * x = b$ en unik lösning för alla tal b? Varför inte låta eleverna utforska en egen räkneregel? I det sista problemet Be så kan det ligga nära till hands att (endast) utgå från fallet att $c^2 = a^2 + b^2$ (vanliga variabelbeteckningar i samband med Pythagoras sats), och konstatera att det inte finns några sexaginta rätvinkliga trianglar då $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Här missas fallet då a är hypotenusan (eller b), så $a^2 = b^2 + c^2$ vilket tillsammans med likheten $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ ger att $a = 2b$. Vi har alltså att göra med en halv liksidig triangel. Trianglar med vinklarna $30°$, $60°$ och $90°$ är precis de rätvinkliga trianglarna som samtidigt är sexaginta. (Cosinussatsen ger att en triangel är sexaginta om och endast om en vinkel är 60 grader, sexaginta = 60 på latin.)

(C) Laborera med riktningen på påståenden. Arbeta med begreppen implikation och ekvivalens. Du kan arbeta med begreppen formellt, men även mer informellt i lägre årskurser. Studera omvändningen till givna implikationer (utsagor), vänd alltså riktning på implikationen. Att resonera kring implikation och ekvivalens är viktiga *tankeverktyg*, verktyg för flexibelt tänkande (F6). Inte minst är begreppen nyckelkomponenter när det gäller att generalisera (F2) och formulera egna problemställningar. Begreppen gör det också möjligt att öka *precisionen* vid matematisk argumentation. Särskilt begåvade elever har många gånger en förmåga att intuitivt se lösningar (jämför exempel 3), men behöver uttrycksformer för att formulera bakomliggande resonemang. Som exempel hade Saras implicita resonemang i exempel 2 kunnat förtydligas så här:

$$\begin{cases} x+5 = 2y \\ x-7 = 0{,}5y \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 7x + 35 = 14y \\ 5x - 35 = 2{,}5y \end{cases} \rightarrow 12x=16{,}5y,$$

och $x = 11, y = 8 \rightarrow 12x = 16{,}5y$.

Förslag på problem:

a) Om $2 - a$ är ett positivt tal så är $1 - a$ positivt. Är detta påstående sant, och vad kan sägas om omvändningen?

b) Visa att om $ax + b = 0$ för alla tal x, så måste $a = 0$ och $b = 0$. Gäller omvändningen?

c) Ett tal n kallas udda om $n = 2k + 1$ för något heltal k. Bevisa att om $n + 2$ är ett udda tal så måste även $3n + 2$ vara ett udda tal. Gäller omvändningen?

d) Hur kan vi förstå att $x = -1$ inte är en lösning till ekvationen $x = \sqrt{(2 - x^2)}$ utifrån följande bearbetning av densamma:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{(2 - x^2)} \\
x^2 &= 2 - x^2 \\
2x^2 &= 2 \\
x^2 &= 1 \\
x &= \pm 1
\end{aligned}
$$

f) Ett heltal n är *lyckligt* då det kan skrivas $n = a^2 + b^2$ för några heltal a och b. Bevisa att ett heltal n är lyckligt om och endast om $2n$ är lyckligt.

Fler liknande problem finns *i Problemlösningens grunder* (Petersson, 2013) och *Mathematical reasoning; writing and proof* (Sundstrom, 2014).

Det första problemet Ca handlar delvis om *hur* man visar att en implikation inte gäller. I Cb har vi ett exempel där implikationen åt ena hållet (omvändningen) är väldigt enkel, men där andra riktningen är svårare. Det i grund och botten enkla kan ibland uppfattas som svårt att visa, då det just ter sig som så uppenbart. Notera att omvändningen i Cc inte gäller (ta exempelvis $n = 1/3$), den gäller bara under förutsättning att n är ett heltal vilket det inte sägs något om. Här kan man diskutera vikten av att vara observant kring förutsättningarna vid problemlösning.

Det sista problemet rör sig om en ekvivalens. En poäng med problemet är dess enkla formulering, medan dess lösning inte är enkel. Att $2n$ är lyckligt då n är det följer av observationen $2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$, vi har alltså att göra med en trevlig tillämpning av kvadreringsregeln. Implikationen åt andra hållet är något svårare att visa.

(D) Arbeta med öppna uppgifter. Öppna uppgifter kan definieras som uppgifter där antingen svaret (antalet korrekta svar) eller lösningsmetoden inte är bestämd. Ett problem kan vara enkelt för vissa elever, men för andra med mindre verktyg med sig har det öppen karaktär. Och en uppgift kan ha olika grad av öppenhet:

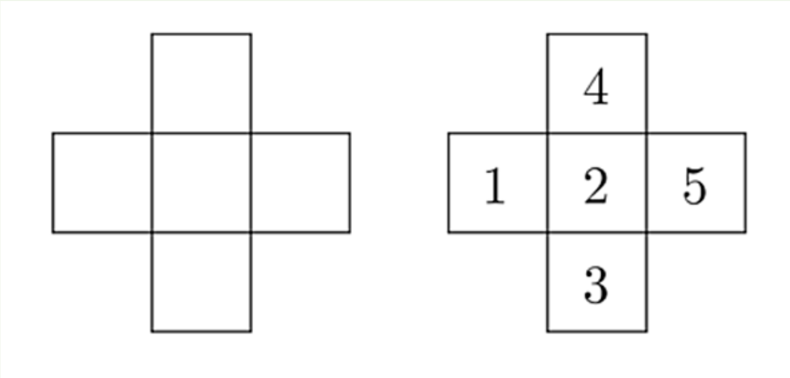
- ett korrekt svar, flera lösningsmetoder
- flera korrekta svar, en lösningsmetod
- flera korrekta svar, flera lösningsmetoder.

Ett lämpligt sätt att förpacka öppna uppgifter är förberedande delfrågor (se exempelvis c och d nedan) som mynnar ut i en mer öppen problemställning. Genom en mjukare övergång till en mer öppen problemställning kan du få med alla elever, och samtidigt kan du genom problemformuleringen (delproblem) guida eleverna till att ställa relevanta frågor vid mötet med ett mer eller mindre komplext problem: Hur blir det i detta specialfall, finns det ett enklare fall, vad händer om… etc. Arbete med öppna uppgifter utvecklar framför allt elevernas kreativitet (F6), och de stimuleras i att tänka bortom det redan lösta, generaliserbarhet (F2).

Förslag på problem:

a) Addition i plus

- Undersök om du kan placera siffrorna 1,2,3,4,5 i rutorna i figuren till vänster nedan så att summan vågrätt och lodrätt blir densamma. (I figuren till höger gäller inte detta då den vågräta summan är $1 + 2 + 5 = 7$ och den lodräta $4 + 2 + 3 = 9$.)



- Om du i stället startar med talen 2,3,4,5,6, undersök hur kan du placera dessa i figuren till vänster så att summan vågrätt och lodrätt blir densamma.
- Kan du finna fem olika positiva heltal så att det *inte* går att placera dem i figuren så att summan vågrätt och lodrätt blir densamma?
- Undersök om det är möjligt att finna fem olika positiva heltal sådana att det är möjligt att få summan vågrätt och lodrätt densamma *med vilket som helst av de fem talen i mitten*.

b) Rundhetstalet R för en geometrisk figur (i planet) definieras av:

$$R = 4\pi \frac{A}{O^2},$$

där A är figurens area och O dess omkrets. En cirkel är den geometriska figur som har störst area i förhållande till sin omkrets, vilket gör att R är som störst för just en cirkel. En geometrisk figur sägs vara rundare än en annan då dess rundhetstal är större.

- Visa att varje cirkel (oavsett radie) har rundhetstalet 1.
- Bestäm rundhetstalet för en kvadrat.
- Bestäm rundhetstalet för en kvartscirkelsektor (rät medelpunktsvinkel).
- Avgör, utan räknares hjälp, om en kvadrat är rundare än en kvartscirkelsektor.
- Visa att kvartscirkelsektorn inte är den rundaste cirkelsektorn.

Ett intressant påbyggnadsproblem är att bestämma den rundaste cirkelsektorn. Det visar sig att den rundaste cirkelsektorn är den med medelpunktsvinkel 2 radianer, denna cirkelsektor har samma rundhetstal som en kvadrat. Intressanta diskussioner kan även uppstå genom att reflektera över om det finns ett motsvarande mått på hur rakt ett kurvstycke är, eller hur klotformad en kropp är. Se Lennerstad (2013) för mer inspiration och detaljer kring begreppet rundhet.

c) Heltal med eller utan nollor:

- Hur många tresiffriga positiva heltal innehåller ingen nolla?
- Hur många tresiffriga positiva heltal innehåller minst en nolla?
- Visa att det finns fler fyrsiffriga positiva heltal utan nolla i talet, än antalet fyrsiffriga positiva heltal med minst en nolla.
- Undersök om det alltid finns fler n-siffriga positiva heltal utan nollor än antalet n-siffriga positiva heltal med minst en nolla.

(Det visar sig att om, och endast om, $n \geq 8$ så finns det fler n-siffriga tal med en nolla i talet.)

d) Om a och b är siffror så betecknar ab motsvarande tvåsiffriga heltal.

- Visa att det inte finns något tvåsiffrigt tal ab sådant att $4 \cdot ab = 3 \cdot ba$.
- Undersök möjliga tvåsiffriga tal ab sådana att $8 \cdot ab = 3 \cdot ba$.
- Undersök för vilka par av siffror n och k det finns tvåsiffriga tal ab med $n \cdot ab = k \cdot ba$.

(Som exempel har vi att $8 \cdot 27 = 3 \cdot 72$ och $4 \cdot 42 = 7 \cdot 24$.
Se förslagsvis Eriksson & Rydh (2003) för liknande problem.)

e) Detta problem handlar om polynom och nollställen.

- Bestäm alla förstagradspolynom $p(x) = x + a$ sådana att $p(a) = 0$.
- Bestäm alla andragradspolynom $p(x) = x^2 + ax + b$ sådana att koefficienterna a,b båda är nollställen till p.
- Undersök *hur många* tredjegradspolynom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ det finns sådana att koefficienterna a,b,c alla är nollställen till p.

Här följer exempel på litteratur med problem som på liknande sätt går från det enklare till det mer öppna och komplexa: Larsson, 2007; Lindberg & Christiansen, 2010; Eriksson & Rydh, 2003; Fich, 2001; Hagland, Hedrén och Taflin, 2005.

Notera hur problem på formen ovan Da-e, med delproblem med stegrande komplexitet och som bygger vidare på varandra, ofta kan förenklas på ett naturligt sätt, och därmed anpassas för lägre åldrar. Det kan exempelvis handla om att begränsa eller modifiera frågeställningarna. På samma sätt kan du i regel göra dem än mer öppna och komplexa genom att bygga på med frågor (se exempelvis diskussionen i samband med problem Db). Vi uppmuntrar lärare till att själva laborera med denna typ av problemstruktur. Genom att dela upp ett problem i delproblem kan du se hur eleverna tänker i problemets delar, vad är det eleverna behöver utveckla?

(E) Arbeta med skriftlig redovisning och matematiska representationsformer. Det matematiska tänkandet när komplexiteten ökar går via ”handen”, via det skriftliga. För att uttrycka och utveckla en djupare form av kreativitet krävs det ett moget matematiskt skriftspråk. Då vi ser särskilt begåvade elever som potentiella professi-

onella matematiker (forskare), är det viktigt att de får arbeta med skriftlig matematisk framställning, gärna redan under grundskolans senare år.

Vi har i (C) pekat på hur arbete med implikations- och ekvivalenspilar är ett sätt att stödja eleverna i att öka precisionen i sina skriftliga resonemang. Nedan ger vi ytterligare förslag på arbetssätt.

FÖRSLAG TILL AKTIVITETER FÖR HÖGRE ÅLDRAR

a) Låt eleverna arbeta med problem som ”tvingar” dem att introducera figurer och beteckningar. Här följer ett exempel på en sådan problemtyp:

- En Fibonaccitalföljd är en talföljd där varje tal i följden, från och med det tredje talet, är summan av de två föregående talen. Om det tredje talet i en Fibonaccitalföljd är 3 och det tionde talet 10, vilket är då det första talet i följden?

b) Hjälp eleverna strukturera sina redovisningar, för lösta problem (Petersson, 2013; Sundstrom, 2014). Låt lämpligtvis eleverna arbeta med ”bevisföringsproblem” (se exempelvis Bc, Cb, Cc, Ce ovan) samt med ”större uppgifter” (som Da-e ovan) som de sedan lämnar in lösningar till. Lämpliga problemsamlingar här är (Berglund, 2005; Eriksson & Rydh, 2003; Fich, 2001; Petersson, 2013). Ytterligare källor för utmärkta problem är nätsidorna för Skolornas matematiktävling och Pythagoras Quest, se (Svenska Matematikersamfundet, 2015), respektive (Pythagoras Quest, 2015).

c) Samla på dig exempel på bra elevlösningar och mindre bra elevlösningar. Låt eleverna få reflektera kring kvaliteten. Vad kännetecknar en bra lösning?

d) Få eleverna att inse hur detaljer (enstaka ord, symboler) kan göra väsentlig skillnad på kvaliteten på ett matematiskt resonemang.

e) Introducera tävlingsmatematik (alla elever är inte intresserade av detta). På detta sätt görs det tydligt att goda redovisningar inte är något som du som enskild lärare önskar bara för att, utan det värderas på samma sätt inom ämnet. Förmågan att skriftligen kunna uttrycka matematik får en mening.

För elever i de yngre åldrarna kan man inte ställa samma krav på skriftlig kommunikationsförmåga. Här föreslår vi stället att man arbetar med (kommunicerar kring) olika representationsformer för matematik. En viktig grund för att, både skriftligt och muntligt, kommunicera (och tänka) matematik är just att vara förtrogen med varierade matematiska uttrycksformer.

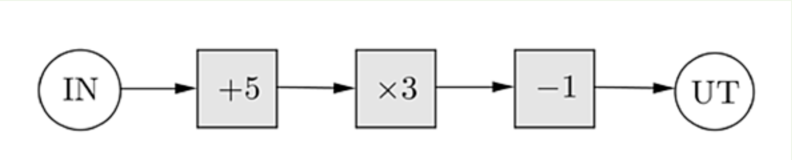
Arbete med olika representationsformer handlar framför allt om att lyfta fram betydelsen av, och styrkan med, det matematiska symbolspråket, men även att med bilder, figurer, tabeller, symboler illustrera matematik (strukturer och samband). Lämpliga uppgifter kan vara problem som bygger på att finna och, exempelvis algebraiskt, uttrycka mönster utifrån bilder eller tabeller eller andra framställningar. Även problem som bygger på att tolka och bearbeta olika former av symbolframställningar är lämpliga. (Se nedan för problemförslag, Ef–j.)

Man kan diskutera olika representationsformer genom exempelvis *fyrfältsblad* (se *Algebra för alla* av Bergsten, Häggström och Lindberg, 1997, s. 43). Det handlar om att en aktivitet, exempelvis arbetet med ett problem, beskrivs utifrån kategorierna: bild, ord, tal och formel, eller andra i sammanhanget lämpliga representationsformer. Genom att samla och dokumentera beskrivningarna i olika fält som svarar mot de olika kategorierna kan du visa möjliga representationsformer för de yngre eleverna.

KLAG-modellen (från *Rika matematiska problem* av Hagland, Hedrén och Taflin, 2005, s. 32–35) kan användas som utgångspunkt för att visa på olika representationsformer när man löser matematiska problem. K står för konkret uttrycksform, L för logisk och språklig uttrycksform, A för algebraisk och aritmetrisk uttrycksform och G för grafisk och geometrisk uttrycksform (se Hagland, Hedrén och Taflin (2005) för detaljer). Denna modell kan även fungera bra som analysunderlag för att samtala med eleven omkring *kvalitet i olika lösningar* och hur dessa kan utvecklas.

FÖRSLAG PÅ AKTIVITETER FÖR LÄGRE ÅLDRAR

f) Genom att arbeta med ”räknekedjor” kan man lyfta fram hur samband kan uttryckas på olika sätt, låt oss ge ett exempel (se även Holgersson, 2014). Betrakta räknekedjan nedan. För varje *invärde* så ger räknekedjan ett *utvärde*:



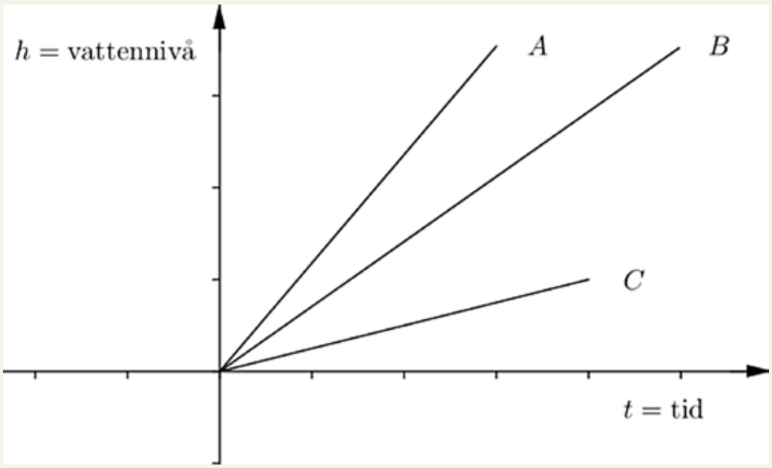
- Vad blir utvärdet då invärdet är 2?

- Är det möjligt att få utvärdet 2?
- Vad blir utvärdet då invärdet är 1/3?
- Kan man få utvärdet 1/3?
- Kan man få samma utvärde som invärdet?
- Kan man få samma utvärde för två *olika* invärden?
- Definiera en *egen* räknekedja, och besvara frågorna ovan för denna.

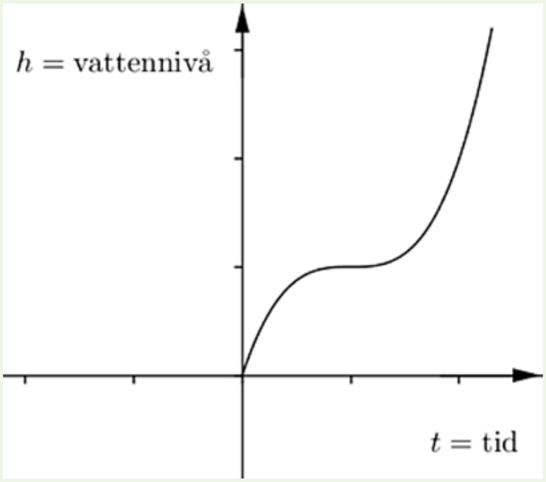
  Notera hur de första frågeställningarna kan lösas förhållandevis enkelt, utan algebraiska ansatser. Längre ner i frågeställningarna ökar behovet av att representera räknekedjan med hjälp av ett algebraiskt samband. Notera speciellt att invärde och utvärde inte betecknats med variabler, låt gärna eleverna själva inse att de har nytta av lämpliga beteckningar. Vid en uppföljning av arbetet med räknekedjan kan grafisk representation lyftas fram (hur kopplar vi svaren på frågorna till grafen för den underliggande funktionen?).

g) Här följer ett exempel på hur representationer i form av grafer kan illustreras.

- Tre olika vaser A, B och C fylls helt med vatten med samma hastighet, en deciliter vatten per sekund. Nedan ser du hur vattennivån i de olika vaserna ökar med tiden. Ge exempel, med motivering, på hur de tre vaserna kan se ut.



- Ge exempel på hur en vas svarandes mot följande graf kan se ut:



Här kan man låta eleverna reflektera över om olika vaser kan ge upphov till samma graf och, hur kan en graf se ut för att svara mot en vas. Intressanta diskussioner kan uppstå genom att ”vända på problemet”, exempelvis så här:

- Rita en vas och fundera kring hur grafen för din vas kan se ut.

h) Arbeta med *olika talsystem och talbaser.* Eleverna utmanas på detta sätt i att förstå hur tal kan representeras på olika sätt, en och samma sak kan skrivas på olika former. Här ges exempel på problemställningar att utgå ifrån:

- Vilket tal svarar mot talet 11010 angivet i binär form?
- Ange talet 27 i binär form?
- Bestäm summan av de binära talen 1101 och 1011 i binär form.
- Fördjupande frågeställningar kan vara: hur många siffror innehåller talet 1000000 angivet i binär form, eller, hur kan man avgöra om ett tal är delbart med 8 då talet är angivet i decimal respektive i binär form? (Se även *Maximatik, Talsystem och grafer* av Palbom och Wigzell (2007) för mer kring detta tema.)

i) Genom att arbeta med *sannolikhetsträd* (träddiagram) kan man visa på hur symboler och bilder kan tjäna som stöd för att lösa problem.

- I en strumplåda finns det 14 strumpor, 8 vita och 6 svarta. Hur stor är sannolikheten att du drar två strumpor i samma färg, om du slumpvis drar två strumpor ur lådan?

  Genom att öka komplexiteten i problemställningen kan man peka på behovet av, och styrkan i, algebraiska ansatser. Här ges ett förslag (se Eriksson & Rydh (2003), s. 41, för liknande problem):

- I en strumplåda finns det endast svarta och vita strumpor. Det finns dubbelt så många svarta som vita strumpor. Sannolikheten att dra två strumpor i samma färg är 9/17. Hur många strumpor ligger det i lådan?
  (Det visar sig vara 18 strumpor i lådan.)

j) Kryptering är ett lämpligt tema för att arbeta med symboler och representationer. Problemställningen kan ges en nerv genom att utmana eleverna i att försöka ”knäcka koden” (dekryptering). Ett exempel på en enklare form av kryptering är att låta A svara mot Ö , B mot Ä och så vidare:

- Kryptera ordet ”MATEMATIK”.
- Dekryptera ordet ”HYJYPKSÖN”

  (HYJYPKSÖN = VETENSKAP.) Andra former av krypton kan vara att ”förskjuta” alfabetet ett antal steg. Med förskjutningen fyra steg kommer A svara mot E, B mot F … och Ö motsvarar D. Mer raffinerade former av kryptering kan exempelvis vara baserade på talbasbyten. Intressanta diskussioner kan uppstå genom att låta eleverna introducera egna krypteringsalgoritmer – vad för krav bör vi ställa på en krypteringsalgoritm? (Se exempelvis *Maximatik, Krypto* av Palbom och Wigzell (2007), NCM:s kryptoskola och *Nöjesmatematik* av Eriksson & Rydh (2003) för fler uppslag kring detta område.)

Ytterligare exempel kan vara att visa på hur geometriska objekt (som linjer och cirklar) kan beskrivas med ekvationer, och där man pekar på fördelar med att kunna växla mellan att gå från geometri till algebra och tvärtom. Hur avgör man exempelvis om en given punkt ligger på en given cirkel? Man kan även jobba med att läsa ut matematiska framställningar och bearbetningar i ord. Låt exempelvis eleverna i ord beskriva hur de löst en given ekvation.

REFERENSER

Berggren, P. & Trygg, L. (2010). *Mönster och algebra.* Stockholm: KVA (Kungl. Vetenskapsakademien), NTA (Naturvetenskap och teknik för alla).

Berglund, D. (2005). *Problemlösning är nummer ett.* Stockholm: Liber.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Nämnaren Tema.

Cobb, P. & Yackel, E. (1996).Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. *Educational Psychologist,* 31(3/4), 175–190.

Eriksson, K., & Rydh S. (2003). *Nöjesmatematik.* Stockholm: Liber.

Fich, O. (2001). *Matelogik.* Viborg: Forlaget Selund ApS.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted students in mathematics. *Arithmetic Teacher,* 28 (6), 14–17.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem.* Stockholm: Liber AB.

Holgersson, I. (2014). *Förslag på problem att arbeta med.* Skolverkets lärportal för matematik. https://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/content/conn/ContentServer/uuid/dDocName:MLPROD013099?rendition=web (11 April 2015.)

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

Kungliga tekniska högskolan (2015), KTH:s *Matematiska cirklars* nätsida https://www.kth.se/sci/institutioner/math/gymnasie/matcirkel/matematisk-cirkel-lasaret-2014-2015-1.483611. (11 Februari 2015.)

Larsson, M. (2007). *32 rika problem i matematik.* Stockholm: Liber.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Red.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (s. 385–411). Rotterdam: Sense Publishers.

Leikin, R., Berman, A. & Koichu, B. (2009). *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students.* Rotterdam: Sense Publishers.

Lennerstad, H. (2013). Hur rund är en kvadrat? *Nämnaren* 2013:1.

Lindberg, D & Christiansen, C. (2010). *Tema Problemlösning i matematik.* Stockholm: Liber.

Linnéuniversitetet (2015), *Vektorgeometri för gymnasieelever* http://homepage.lnu.se/staff/psvmsi/vektorgeometri/gymnasiet.html

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 67, ss. 255–276

Mattsson, L. (2013). *Tracking mathematical giftedness in an egalitarian context.* Doktorsavhandling. Göteborg: Göteborgs universitet & Chalmers, Matematiska vetenskaper.

Mattsson, L. (2013b). Conceptions of mathematical giftedness according to head teachers at gifted programs in mathematics in Swedish upper secondary school. I L. Mattsson *Tracking mathematical giftedness in an egalitarian context,* Doktorsavhandling, Göteborgs universitet & Chalmers, Matematiska vetenskaper.

Mattsson, L. (2010). Head teachers' conception of gifted students in mathematics in Swedish upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 15(3), 3–22.

NCM (2015). NCM:s kryptoskola. http://ncm.gu.se/krypto (15 april 2015)

Palbom & Wigzell (2007). Maximatik. *Krypto.* Stockholm: Natur och Kultur.

Palbom & Wigzell (2007). Maximatik. *Talsystem och grafer.* Stockholm: Natur och Kultur.

Petersson, H. (2013). *Problemlösningens grunder.* Lund: Studentlitteratur.

Pettersson, E. & Wistedt, I. (2013). *Barns matematiska förmågor – och hur de kan utvecklas.* Lund Studentlitteratur.

Pettersson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor.* Doktorsavhandling. Växjö: Linnéuniversitetet, Institutionen för datavetenskap, fysik och matematik.

Pythagoras Quest (2015). Pythagoras Quests nätsida http://www.pythagorasquest.se/gamla-prov. (10 Februari 2015.).

Sheffield, L.J. (2003). *Extending the Challenge in mathematics.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Sheffield, L.J. (2009). Developing Mathematical creativity – Questions may be the answer. I R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu, *Creatvity i Mathematics and the Education of Gifted Students* (ss. 87–100). Rotterdam: Sense Publishers.

Sriramn, B. (2008). *Creativity, Giftedness, and Talent Development in Mathematics.* Missoula, USA: Information Age Publishing Inc & The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20–36.

Stockholms universitet (2015). Matematiska institutionen. Samverkan kommun och skola. Utmanande matematik – en kurs i problemlösning. http://www.math.su.se/samverkan/kommun-skola/utmanande-matematik-en-kurs-i-probleml%C3%B6sning-1.206847. (15 februari 2015.)

Sundstrom, T. (2014). *Mathematical reasoning; writing and proof.* Scholar works at Grand Valley State University. http://scholarworks.gvsu.edu/books/7/ (23 mars 2015.)

Svenska matematikersamfundet (2015). Skolornas matematiktävlings nätsida http://www.mattetävling.se/problem/. (10 Februari 2015.)

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education.